

PROPRIETATI ALE PUNCTULUI INTERMEDIAR DIN TEOREMELE DE MEDIE AE ANALIZEI MATEMATICE

Dorel I. DUCA

Facultatea de Matematică și Informatică,
Universitatea "Babeș-Bolyai", Cluj-Napoca

Fie I un interval al axei reale \mathbb{R} și $a \in I$ fixat. Au loc următoarele afirmații:

1⁰ Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe I , atunci pentru orice $x \in I \setminus \{a\}$, există cel puțin un punct c_x , din intervalul cu extremitățile a și x , astfel încât:

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(c_x) \left(\begin{array}{c} \text{teorema creșterilor finite,} \\ \text{teorema de medie a calculului diferențial,} \\ \text{Lagrange} \end{array} \right).$$

2⁰ Dacă funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe I , atunci pentru orice $x \in I \setminus \{a\}$, există cel puțin un punct c_x , din intervalul cu extremitățile a și x , astfel încât:

$$(f(x) - f(a)) g'(c_x) = (g(x) - g(a)) f'(c_x) \quad (\text{Cauchy}).$$

3⁰ Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă de $n \geq 2$ ori pe I , atunci pentru orice $x \in I \setminus \{a\}$, există cel puțin un punct c_x , din intervalul cu extremitățile a și x , astfel încât:

$$f(x) - f(a) = (x - a) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^{k-1} + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} (x - a)^{n-1} \right) \quad (\text{Taylor}).$$

4⁰ Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe I , atunci pentru orice $x \in I \setminus \{a\}$, există cel puțin un punct c_x , din intervalul cu extremitățile a și x , astfel încât:

$$\int_a^x f(t) dt = (x - a) f(c_x) \quad (\text{teorema de medie a calculului integral}).$$

În această lucrare se abordează următoarele probleme:

a) poziția, mai exactă, a punctelor intermediare c_x , din afirmațiile 1⁰ – 4⁰ de mai sus, față de punctele a și x ;

b) viteza, accelerația etc. cu care se apropie punctele intermediare c_x de punctul a , atunci când punctul x se apropie de punctul a .

References

- [1] D. Andrica, D.I. Duca, I. Purdea și I. Pop: *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2004
- [2] Z. Bao-lin: *A Note on the Mean Value Theorem for Integrals*, Amer. Math. Monthly, 104(1997), 561-562
- [3] Berinde, V.: *Despre proprietatea punctului intermediar în teoremele de medie pentru integrala Riemann*, Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică, Univ. de Nord Baia Mare, 10(2001), 97-106
- [4] D.I. Duca and O. Pop: *On the Intermediate Point in Cauchy's Mean-Value Theorem*, Mathematical Inequalities & Applications, 9(2006), 3, 375-389
- [5] R. Mera, *On the Determination of the Intermediate Point in Taylor's Theorem*, The American Mathematical Monthly, 99(1992), 1, 56-58