Al cincilea baraj de selecție pentru OBMJ
Pitești, 24 mai 2026

Problema 1. Fie $n \geqslant 3$ un număr natural. Pentru o secvență $a_1, \ldots, a_n$ de n numere reale pozitive cu suma 2026 numim un număr natural k ($1 \leqslant k \leqslant n$) *special* dacă există k numere în secvență care au suma 1013. Determinați numărul maxim posibil de numere speciale pe care îl poate avea o secvență ca mai sus.

Problema 2. Fie p și q două numere prime diferite astfel încât fiecare dintre aceste numere prime este mai mic strict decât dublul celuilalt număr. Demonstrați că există două numere naturale consecutive astfel încât cel mai mare divizor prim al unuia dintre aceste numere este p, iar cel mai mare divizor prim al celuilalt este q.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ și $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Se scriu numerele $1, 2, \ldots, N$ într-un șir, care se împarte în n blocuri formate din secvențe consecutive de numere în ordine crescătoare, de lungimi $1, 2, \ldots, n$ respectiv, iar numerele din fiecare bloc sunt scrise în ordine descrescătoare, după cum urmează:

$$1 \mid 3, 2 \mid 6, 5, 4 \mid 10, 9, 8, 7 \mid \ldots$$

Trei jucători, Alice, Bob și Charlie, joacă pe rând în această ordine, repetând ciclic. La o mutare, un jucător poate alege două elemente $x > y$ din șir, cu x situat la stânga lui y, și le poate interschimba, cu condiția ca numărul elementelor aflate între ele, ale căror valori sunt strict cuprinse între y și x, să fie divizibil cu 3 (inclusiv egal cu 0). Jocul se termină atunci când șirul devine strict crescător. Jucătorul care efectuează ultima mutare câștigă. Determinați câștigătorul în funcție de n.

Problema 4. Fie ω cercul circumscris triunghiului ABC. O dreaptă paralelă cu BC intersectează segmentele $(AB), (AC)$ în punctele E, respectiv F, iar cercul ω în punctele U, respectiv V. Notăm cu M mijlocul segmentului BC și cu γ cercul circumscris triunghiului UMV. Dreapta ME intersectează cercul γ în T, iar dreapta FT intersectează același cerc în S. Știind că cele două cercuri, ω și γ, au razele de lungimi egale, demonstrați că EF este tangentă cercului circumscris triunghiului MCS.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.