Ministerul Educației și Cercetării
Societatea de Științe Matematice din România

Al patrulea baraj de selecție pentru OBMJ
Pitești, 23 mai 2026

Problema 1. Fie $a, b, c, d > 0$ astfel încât $a + b + c + d = 1$. Demonstrați că:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d}{(a+b+c)^3}+\frac{b^2+c^2+d^2+a}{(b+c+d)^3}+\frac{c^2+d^2+a^2+b}{(c+d+a)^3}+\frac{d^2+a^2+b^2+c}{(d+a+b)^3} \geqslant \frac{112}{27}.$$

Problema 2. Punctele E și F sunt mijloacele laturilor BC și CD ale patrulaterului convex $ABCD$. Segmentele AE, AF și EF împart patrulaterul $ABCD$ în patru triunghiuri ale căror arii sunt numere naturale consecutive. Care sunt valorile posibile ale ariei triunghiului ABD?

Problema 3. Se consideră o tablă dreptunghiulară de dimensiuni $m \times n$, cu m, n numere naturale nenule. În fiecare din cele mn pătrățele unitate ale tablei se duc cele 2 diagonale, rezultând $4mn$ triunghiuri. Fiecare triunghi este colorat cu alb sau negru astfel încât fiecare triunghi alb are cel puțin o latură comună cu cel puțin un triunghi negru. Care este numărul minim posibil de triunghiuri negre?

Problema 4. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural și

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$$

toți divizorii pozitivi ai lui n, scriși în ordine crescătoare. Arătați că

$$d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k \leqslant n^2 - n$$

și determinați cazurile de egalitate.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.