Ministerul Educației și Cercetării
Societatea de Științe Matematice din România

Al treilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 3 mai 2026

Problema 1. Un număr natural $n \geqslant 2$ se numește *superprim* dacă $(n, 3) = 1$ și, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$, numărul

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k + 1 \quad \text{este prim},$$

unde $d_1 < d_2 < \ldots < d_s$ sunt toți divizorii proprii ai lui n. Arătați că dacă n este *superprim*, atunci $n + 1$ este număr prim.

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat. Bisectoarea unghiului $\angle CDB$ intersectează AC în M. Cercul circumscris triunghiului DAM intersectează latura DC în E și latura AB în F. Notăm cu P centrul cercului circumscris triunghiului CEM, cu Q centrul cercului circumscris triunghiului DAM, iar cu R centrul cercului circumscris triunghiului BFM. Arătați că $PQ = PR$.

Problema 3. Fie $n \geqslant 3$ un număr natural, c un număr real fixat și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$. Arătați că

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant c - \{c\} \cdot (1 - \{c\}),$$

unde $\{c\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real c.

Problema 4. Arătați că patru puncte din plan, astfel încât oricare trei sunt necoliniare, reprezintă vârfurile unui patrulater convex dacă și numai dacă oricum am nota punctele cu A, B, C și D există o dreaptă d în plan, pentru care

$$d(A, d) \leqslant d(B, d) \leqslant d(C, d) \leqslant d(D, d),$$

unde $d(X, d)$ reprezintă distanța de la punctul X la dreapta d.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.