



Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Drobeta-Turnu Severin, 3 aprilie 2026

Problema 1. Triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Se consideră punctul D pe segmentul AC și punctul E pe segmentul (BD) astfel încât $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ECD = \sphericalangle CED$. Arătați că $BE = 2AD$.

Problema 2. Fie n un număr natural nenul și S o mulțime de $2n$ numere reale cu suma 0. Arătați că există două submulțimi disjuncte A și B ale lui S cu n elemente, având următoarea proprietate: *pentru orice permutare a_1, a_2, \dots, a_n a elementelor lui A și orice permutare b_1, b_2, \dots, b_n a elementelor lui B , are loc inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i < 0.$$

Problema 3. Fie $n \geq 5$. Într-un tablou $n \times n$ se scriu n^2 numere naturale distincte astfel încât, oricum am alege câteva numere din tablou, oricare două situate pe linii și pe coloane diferite, media aritmetică a acestora este număr natural. Determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul maxim scris în tablou.

Problema 4. Fie ABC un triunghi scalen și punctele $D \in (BC)$, $M \in (AD)$. Notăm cu ω , ω_1 și ω_2 cercurile circumscrise triunghiurilor ABC , BDM , respectiv CDM . Cercurile ω și ω_1 se intersectează a doua oară în E , $E \neq B$, iar ω și ω_2 se intersectează a doua oară în F , $F \neq C$. Dreapta AB intersectează a doua oară cercul ω_1 în punctul S , iar dreapta AC intersectează a doua oară cercul ω_2 în R .

Fie Q , respectiv P punctele de intersecție ale dreptei EF cu cercurile ω_1 , respectiv ω_2 , diferite de E și F . Arătați că punctele P , Q , R și S sunt conciclice.

Problema 5. Spunem că numerele naturale nenule a și b sunt *intercalate*, dacă au același număr de divizori proprii, cel puțin câte doi, notați a_1, a_2, \dots, a_n , respectiv b_1, b_2, \dots, b_n , astfel încât:

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n.$$

- Dați exemplu de numere intercalate a și b care să aibă fiecare exact 2026 de divizori.
- Dacă a și b sunt numere intercalate, este posibil ca $a + b$ și ab să fie intercalate?

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.