



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Alba Iulia, 31 martie 2026

CLASA a XII-a – soluții și bareme

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Se consideră un reper cartezian xOy în planul Π . Pentru fiecare număr natural nenul n notăm cu D_n discul închis de rază n centrat în originea reperului,

$$D_n = \{P \in \Pi \mid OP \leq n\}$$

și notăm cu a_n numărul punctelor laticeale $P(k, l) \in D_n$ (un punct laticéal este un punct cu ambele coordonate numere întregi). Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}.$$

Soluție.

Vom identifica orice punct din planul Π cu perechea (x, y) a coordonatelor sale în raport cu reperul fixat xOy . Fie $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Mulțimea punctelor laticeale din discul D_n este $L_n = D_n \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Considerăm mulțimile

$$M_{1n} = D_n \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*), \quad M_{2n} = D_n \cap ((-\mathbb{N}^*) \times \mathbb{N}),$$

$$M_{3n} = D_n \cap ((-\mathbb{N}) \times (-\mathbb{N}^*)) \quad \text{și} \quad M_{4n} = D_n \cap (\mathbb{N}^* \times (-\mathbb{N})).$$

Atunci $L_n = \{(0, 0)\} \cup M_{1n} \cup M_{2n} \cup M_{3n} \cup M_{4n}$.

Prin rotații de centru $O(0, 0)$ și unghiuri cu măsura multiplu de $\frac{\pi}{2}$, mulțimea M_{1n} se transformă în

$$\text{rot}_{O, \frac{\pi}{2}}(M_{1n}) = M_{2n}, \quad \text{rot}_{O, \pi}(M_{1n}) = M_{3n}, \quad \text{rot}_{O, \frac{3\pi}{2}}(M_{1n}) = M_{4n}.$$

Rezultă că mulțimile M_{kn} , cu $k = \overline{1, 4}$, au un același cardinal b_n , pentru care are loc egalitatea $a_n = 1 + 4 \cdot b_n$.

.....**3p**

Deoarece

$$M_{1n} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{k\} \times \{l \in \mathbb{N}^* \mid k^2 + l^2 \leq n^2\} =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{n-1} \{k\} \times \{l \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq l \leq \sqrt{n^2 - k^2}\},$$

rezultă că $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$.

.....**3p**

Notând $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$, cu definiția părții întregi a unui număr real obținem inegalitățile

$$s_n - n < b_n \leq s_n,$$

echivalente cu

$$4 \cdot s_n - 4n + 1 < a_n \leq 4 \cdot s_n + 1.$$

Rezultă

$$4 \cdot \frac{s_n}{n^2} - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{a_n}{n^2} \leq 4 \cdot \frac{s_n}{n^2} + \frac{1}{n^2}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

.....**6p**

În mod evident, $\frac{s_n}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ reprezintă suma Riemann a funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită pentru orice $x \in [0, 1]$ prin $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, în raport cu diviziunea $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1\right)$ și sistemul de puncte

intermediare $\xi_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right)$**3p**

Deoarece funcția f este continuă pe $[0, 1]$, deci integrabilă, există limita

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2}$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

.....**3p**

Aceasta reprezintă aria unui sfert de disc de rază 1, deci este egală cu $\frac{\pi}{4}$. Cu criteriul cleștelui, aplicat șirurilor din relația (1), avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

.....**3p**

Finalizare **1,5p**

Problema 2. Fie n un număr natural liber de pătrate (n se numește liber de pătrate dacă nu este divizibil prin niciun pătrat perfect mai mare decât 1), iar G un grup de ordin n . Fie d cel mai mare ordin al unui element al grupului G și N numărul elementelor de ordin d din grupul G .

- a) Demonstrați că N este divizibil cu $\frac{n}{d}$.
b) Demonstrați că $N^2 \geq \varphi(n)$, unde $\varphi(n)$ este numărul întregilor k , cu $1 \leq k \leq n$ și $(k, n) = 1$.

Soluție.

Dacă grupul G este ciclic, atunci $d = n$, $N = \varphi(n)$ și ambele afirmații sunt evident adevărate.

a) Deoarece n este liber de pătrate, $\frac{n}{d}$ este de asemenea liber de pătrate, deci este cel mai mic multiplu comun al divizorilor săi primi. Este suficient să arătăm că orice divizor prim al lui $\frac{n}{d}$ este divizor al lui N .

Fie X mulțimea tuturor elementelor de ordin d din grupul G . Deoarece pentru oricare două elemente a și b ale unui grup, elementele ab și ba au același ordin, pentru orice $x \in X$ și orice $g \in G$ avem $\text{ord}(g x g^{-1}) = \text{ord}(x g^{-1} g) = \text{ord}(x) = d$. Rezultă că $g x g^{-1} \in X$, pentru orice $x \in X$ și orice $g \in G$.

Conform enunțului, $N = |X|$. Vom arăta că pentru orice divizor prim p al lui $\frac{n}{d}$, X se partiționează în submulțimi de câte p elemente.

Fie p un divizor prim oarecare al lui $\frac{n}{d}$. Conform teoremei lui Cauchy, există $a \in G$ de ordin p . Deoarece $(d, p) = 1$, dacă ar exista $g \in X$ cu $ga = ag$, atunci $\text{ord}(ga) = dp$, ceea ce ar contrazice maximalitatea lui d . Rezultă $ag \neq ga$ și $ga^k \neq a^k g$ pentru orice $1 \leq k \leq p-1$.

.....3p

Așadar, pentru orice $g \in X$ fixat, elementele $a^k g a^{-k}$, cu $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq p-1$ sunt distincte două câte două. Dacă $k \in \mathbb{Z}$ este un întreg oarecare, există și sunt unice $q \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, astfel încât $k = pq + r$. Deoarece $\text{ord}(a) = p$, avem $a^k = a^{pq+r} = (a^p)^q \cdot a^r = a^r$, și mulțimea

$$X_g = \{a^k g a^{-k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

are cardinalul p .

.....3p

Pentru orice $h = a^l g a^{-l} \in X_g$ avem că

$$X_h = \{a^l h a^{-l} \mid l \in \mathbb{Z}\} = \{a^{k+l} g a^{-k-l} \mid l \in \mathbb{Z}\} = X_g.$$

Astfel, oricare două mulțimi X_g și X_h , cu $g, h \in X$, sunt fie egale, fie disjuncte.

.....**3p**
 Rezultă că există o submulțime $R \subset X$ (un sistem de reprezentanți), astfel încât X se partiționează în mulțimile X_g , cu $g \in R$: $X = \bigcup_{g \in R} X_g$. Aceasta fiind o reuniune disjunctă, pentru numărul elementelor lui X avem

$$N = |X| = \sum_{g \in R} |X_g| = \sum_{g \in R} p = |R| \cdot p.$$

Așadar, N este un multiplu al numărului prim p . Cum p este un divizor prim oarecare al lui $\frac{n}{d}$, rezultă că N este divizibil cu $\frac{n}{d}$.

.....**3p**
 b) Din relația de divizibilitate demonstrată la a) rezultă că $N \geq \frac{n}{d}$. (1)
 Pentru orice $g \in X$, elementele g^j , cu $1 \leq j \leq d$ și $(j, d) = 1$, sunt $\varphi(d)$ elemente distincte de ordin d . Obținem

$$N = |X| \geq |\{g^j \mid 1 \leq j \leq d, (j, d) = 1\}| = \varphi(d). \quad (2)$$

.....**3p**
 Înmulțind inegalitățile (1) și (2) rezultă

$$N^2 \geq \frac{n}{d} \cdot \varphi(d) \geq \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \varphi(d) = \varphi(n).$$

.....**6p**
 (Am folosit inegalitatea $m \geq \varphi(m)$, valabilă pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, și identitatea $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $(m, n) = 1$.)
 Finalizare **1,5p**

Observație: Mulțimile X_g definite mai sus sunt orbitele acțiunii de conjugare a grupului $\langle a \rangle$ pe mulțimea X a elementelor de ordin d . Maximalitatea lui d implică faptul că stabilizatorul fiecărui element conține doar elementul neutru al grupului. Astfel, toate orbitele au lungimea p .

Problema 3. Fie p un număr prim, iar A un inel de caracteristică p . Arătați că A are cel mult $\frac{|A|}{p}$ elemente nilpotente, unde $|A|$ reprezintă numărul elementelor inelului A .

($x \in A$ se numește nilpotent dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^m = 0$.)

Soluție.

Notăm cu $U(A)$ mulțimea elementelor inversabile ale inelului A , cu $N(A)$ mulțimea elementelor nilpotente din inelul A , iar pentru orice $k \in \mathbb{N}$ vom nota $k = k \cdot 1_A = 1_A + 1_A + \dots + 1_A$, în care elementul unitate 1_A al inelului A apare de k ori.

Deoarece p este prim, avem $k \in U(A)$ pentru orice $1 \leq k \leq p-1$, iar $k^{-1} \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Pentru orice $a \in A \setminus \{0\}$, deoarece $p \cdot a = 0$, ordinul elementului a în grupul aditiv $(A, +)$ este p , astfel că $k^{-1} \cdot a = a \cdot k^{-1} \neq 0$.

.....3p
Pentru orice $x \in N(A) \setminus \{0\}$ există $m \geq 2$ cu $x^m = 0$, astfel că

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})=1$$

și $1-x \in U(A)$, cu $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\dots+x^{m-1}$.

.....3p
De asemenea, deoarece $k^{-1}x = xk^{-1}$, rezultă că $k^{-1}x \in N(A)$ și $1-k^{-1}x \in U(A)$. Prin urmare,

$$k-x = k(1-k^{-1}x) \in U(A).$$

.....3p
Pentru fiecare $1 \leq k \leq p-1$ considerăm mulțimea $R_k = \{k-x \mid x \in N(A)\}$, $R_k \subseteq U(A)$. Evident, pentru orice $x, y \in N(A)$, cu $x \neq y$, avem $k-x \neq k-y$, astfel că $|R_k| = |N(A)|$.

.....3p
De asemenea, cum $U(A) \cap N(A) = \emptyset$, pentru orice $1 \leq k < l \leq p-1$ și orice $x, y \in N(A)$ avem $l-k-y \neq -x$, deoarece $l-k-y \in U(A)$ și $-x \in N(A)$, astfel că $l-y \neq k-x$. Rezultă că $R_k \cap R_l = \emptyset$, pentru orice $1 \leq k < l \leq p-1$,
.....3p
și

$$|U(A)| \geq \left| \bigcup_{k=1}^{p-1} R_k \right| = \sum_{k=1}^{p-1} |R_k| = (p-1) \cdot |N(A)|.$$

.....3p
Prin urmare,

$$|A| \geq |U(A)| + |N(A)| \geq (p-1) \cdot |N(A)| + |N(A)| = p \cdot |N(A)|,$$

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

.....3p
Finalizare 1,5p

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Demonstrați că f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă

$$\int_x^y f(t) dt \neq (y-x)f(x), \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, \text{ cu } x \neq y.$$

Soluție.

Relația din enunț se transcrie echivalent sub forma

$$\int_x^y (f(t) - f(x)) dt \neq 0, \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, \text{ cu } x \neq y.$$

Notăm $I(x, y) = \int_x^y (f(t) - f(x)) dt$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Cu teorema de medie, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x \neq y$, există un număr $c \in (\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$ cu proprietatea că $I(x, y) = (y-x) \cdot (f(c) - f(x))$. Cum $x \neq c$, dacă f este strict monotonă, atunci $f(c) \neq f(x)$ și

$$I(x, y) \neq 0, \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y.$$

.....3p
Reciproc, să presupunem ca are loc relația $I(x, y) \neq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x \neq y$.

Arătăm că f nu poate fi constantă pe niciun interval $[a, b]$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Într-adevăr, dacă ar exista $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, astfel încât f să fie constantă pe $[a, b]$, atunci pentru orice $x, y \in [a, b]$, cu $x \neq y$, am obține $I(x, y) = 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza. Funcția f nu este deci constantă pe niciun interval $[a, b]$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

.....3p
Funcția f fiind continuă, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, există $u, v \in [a, b]$, astfel $f(u) = \min\{f(t) | t \in [a, b]\}$ și $f(v) = \max\{f(t) | t \in [a, b]\}$, iar u și v sunt distincte, deoarece f nu este constantă pe $[a, b]$.

.....3p
Dacă f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, atunci f este strict monotonă pe $[a, b]$,

astfel că $\{u, v\} = \{a, b\}$.

Dacă f nu este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, astfel încât f să nu fie strict monotonă pe $[a, b]$ și prin urmare putem alege $u, v \in [a, b]$ ca mai înainte cu $\{u, v\} \neq \{a, b\}$. Rezultă că $b \notin \{u, v\}$, deci $u, v \in [a, b)$, sau $a \notin \{u, v\}$, deci $u, v \in (a, b]$.

.....**3p**

Dacă $u, v \in [a, b)$, fie $d = \min\{b - u, b - v\}$. Deoarece funcția f este continuă, funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$ prin $g(x) = I(x, x + d)$, este continuă. Cum $g(u) \geq 0 \geq g(v)$, există $x \in \mathbb{R}$, cu $x \in [\min\{u, v\}, \max\{u, v\}]$, astfel încât $g(x) = 0$. Dar atunci $0 = g(x) = I(x, x + d) \neq 0$ este o contradicție.

.....**3p**

Dacă $u, v \in (a, b]$, fie $d = \min\{u - a, v - a\}$ și funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $h(x) = I(x, x - d)$. Cum f este continuă, rezultă că și h este continuă și, deoarece $h(u) \leq 0 \leq h(v)$, există $x \in [\min\{u, v\}, \max\{u, v\}]$ cu $h(x) = 0$. Obținem atunci contradicția $0 = h(x) = I(x, x - d) \neq 0$ **3p**

Contradicțiile obținute în cele două cazuri arată că nu se poate ca funcția f să nu fie strict monotonă, ceea ce încheie demonstrația.

.....**3p**

Finalizare **1,5p**