



Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Alba Iulia, 31 martie 2026

CLASA a XI-a – soluții și bareme

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Fie o funcție $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există funcțiile $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu proprietățile:

1. $f_n(x) < h(x) < g_n(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (g_n(x) - f_n(x)) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Presupunem că funcțiile f_n și g_n sunt continue, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că h este continuă.
 - b) Presupunem că funcțiile f_n și g_n sunt derivabile, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Rezultă că h este derivabilă?

Soluție.

a) Considerăm $x_0 \in \mathbb{R}$. Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Din ipoteză rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$, care depinde de ε , astfel ca $0 < g_k(x_0) - f_k(x_0) < \varepsilon/2$ **3p**
Cum f_k este continuă în x_0 , există $\delta_1 > 0$ astfel ca $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon/2$, pentru oricare $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Similar, continuitatea lui g_k în x_0 implică existența unui număr $\delta_2 > 0$ astfel ca $|g_k(x) - g_k(x_0)| < \varepsilon/2$, pentru oricare $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ **3p**
Fie $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, avem:

$$f_k(x_0) - \varepsilon/2 < f_k(x) < h(x) < g_k(x) < g_k(x_0) + \varepsilon/2.$$

Cum $-g_k(x_0) < -h(x_0) < -f_k(x_0)$, obținem prin sumarea inegalităților:

$$f_k(x_0) - g_k(x_0) - \varepsilon/2 < h(x) - h(x_0) < g_k(x_0) - f_k(x_0) + \varepsilon/2.$$

Dar $f_k(x_0) - g_k(x_0) > -\varepsilon/2$, iar $g_k(x_0) - f_k(x_0) < \varepsilon/2$. Rezultă:

$$-\varepsilon < h(x) - h(x_0) < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, funcția h este continuă în x_0 . Dar $x_0 \in \mathbb{R}$ este arbitrar, deci h este continuă pe $\mathbb{R}$9p

b) Nu. Contraexemplu:

Funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$ nu este derivabilă în $x = 0$, dar este încadrată de funcțiile derivabile $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n}}$

și $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, pentru $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} (g_n(x) - f_n(x)) = 0$.

.....6p

Finalizare1,5p

Problema 2. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și numerele complexe $a_0, a_1, \dots, a_m$, cu a_0 și a_m nenule, astfel încât

$$A \cdot (a_0 I_n + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_m B^m) = B.$$

Arătați că $AB = BA$.

Soluția 1. Considerăm polinomul $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m \in \mathbb{C}[X]$. Relația din ipoteză devine $A \cdot f(B) = B$. Înmulțind această relație la stânga cu B , obținem $(BA) \cdot f(B) = B^2$. Înmulțind relația $A \cdot f(B) = B$ la dreapta cu B obținem $A \cdot f(B) \cdot B = B^2$, sau $(AB) \cdot f(B) = B^2$. Deducem relația $(AB - BA) \cdot f(B) = O_n$3p

Pentru concluzie, este suficient să arătăm că matricea $f(B)$ este inversabilă.

.....3p

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei B , iar x un vector propriu coloană nenul asociat valorii λ . Avem

$$\lambda x = Bx = A(f(B)x) = A(f(\lambda)x) = f(\lambda)Ax.$$

.....6p

Presupunem, prin absurd, că $f(\lambda) = 0$. Atunci λx este vectorul coloană nul. Cum x este nenul, rezultă $\lambda = 0$, deci $f(0) = 0$, în contradicție cu ipoteza $a_0 \neq 0$. Prin urmare, $f(\lambda) \neq 0$3p

Rezultă $\det(f(B)) = \prod_{\lambda \in \sigma(B)} f(\lambda) \neq 0$, unde $\sigma(B)$ este spectrul matricei B .
 Atunci matricea $f(B)$ este inversabilă.....**6p**
 Finalizare**1,5p**

Soluția 2. Considerăm polinomul $f = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m \in \mathbb{C}[X]$.
 Relația din ipoteză devine $A \cdot f(B) = B$. Înmulțind această relație la stânga
 cu B , obținem $(BA) \cdot f(B) = B^2$. Înmulțind relația $A \cdot f(B) = B$ la dreapta
 cu B obținem $A \cdot f(B) \cdot B = B^2$, sau $(AB) \cdot f(B) = B^2$. Deducem relația
 $(AB - BA) \cdot f(B) = O_n$**3p**
 Pentru concluzie, este suficient să arătăm că matricea $f(B)$ este inversabilă.
**3p**
 Pentru $m = 1$ avem:

$$-\frac{1}{a_0}(a_1A - I_n)f(B) = -\frac{a_1}{a_0}Af(B) + \frac{1}{a_0}f(B) = -\frac{a_1}{a_0}B + I_n + \frac{a_1}{a_0}B = I_n.$$

Rezultă că $f(B)$ este inversabilă.....**3p**
 Presupunem $m \geq 2$. Cum $a_0 \neq 0$, polinomul f nu are rădăcina 0.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{C}^*$ rădăcinile lui f . Avem $f = a_m \prod_{k=1}^m (X - x_k)$, de unde

$$f(B) = a_m(B - x_1I_n)(B - x_2I_n) \dots (B - x_mI_n). \quad (1)$$

.....**3p**

Definim polinoamele $f_k = a_m \prod_{j=1, j \neq k}^m (X - x_j)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Pentru fiecare
 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, avem

$$\frac{1}{x_k}(Af_k(B) - I_n)(B - x_kI_n) = \frac{1}{x_k}[(Af(B) - B) + x_kI_n] = I_n.$$

Rezultă că matricele $B - x_kI_n$, $k = 1, 2, \dots, m$, sunt inversabile. Din (1)
 deducem că matricea $f(B)$ este inversabilă.....**9p**
 Finalizare**1,5p**

Problema 3. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție convexă și derivabilă.
 Presupunem că există $s > 1$ astfel încât

$$x^s f'(x) \geq (f(f(x)))^s, \text{ pentru oricare } x \in [0, \infty).$$

Arătați că:

- a) $f(x) \leq x$, pentru oricare $x \in [0, \infty)$;
- b) $x^t f'(x) \geq (f(f(x)))^t$, pentru oricare $x \in [0, \infty)$ și oricare $t \geq 1$.

Soluție.

a) Avem $x^s f'(x) \geq f^s(f(x)) \geq 0$, $\forall x \geq 0$, deci $f'(x) \geq 0$, $\forall x > 0$. Rezultă că f este monoton crescătoare pe $[0, \infty)$. Pentru $x = 0$, obținem $0 \geq f^s(f(0)) \geq 0$, de unde rezultă $f(f(0)) = 0$. Cum f este monoton crescătoare și pozitivă, avem $0 \leq f(0) \leq f(f(0)) = 0$. Atunci $f(0) = 0$.

.....**3p**
Întrucât f este convexă, f' este monoton crescătoare pe $[0, \infty)$**3p**
Fie $A = \{x \geq 0 \mid f(x) = 0\}$. Am arătat că $0 \in A$, deci $A \neq \emptyset$.

1) Dacă mulțimea A este nemărginită superior, atunci pentru orice $x > 0$ există $y \in A$ astfel încât $y > x$. Rezultă $0 \leq f(x) \leq f(y) = 0$, deci $f(x) = 0$. Atunci f este nulă pe $[0, \infty)$. Astfel, cerința este verificată.**3p**

2) Presupunem că mulțimea A este mărginită superior.
Atunci există $a = \sup(A) \in [0, \infty)$. Din continuitatea funcției f rezultă $f(a) = 0$. Cum f este monoton crescătoare, avem $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, a]$. Din definiția mulțimii A deducem $f(x) > 0$, $\forall x \in (a, \infty)$. Inegalitatea $f(x) \leq x$ este satisfăcută pentru $x \in [0, a]$. Presupunem, prin absurd, că există $x_0 > a$ astfel ca $f(x_0) > x_0$. Rezultă

$$x_0^s f'(x_0) \geq f^s(f(x_0)) \geq f^s(x_0) > x_0^s,$$

de unde obținem $f'(x_0) > 1$. Astfel, $f'(x) \geq f'(x_0) > 1$, $\forall x \geq x_0$. Deducem că funcția $g : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, este strict crescătoare pe $[x_0, \infty)$. Atunci $f(x) - x = g(x) > g(x_0) = f(x_0) - x_0 > 0$, $\forall x > x_0$. Ca urmare, $f(x) > x$, $\forall x \geq x_0$, de unde rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Considerăm funcția

$$h : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x^{s-1}} - \frac{1}{f^{s-1}(x)}.$$

Cum $s > 1$, obținem $f^{s-1}(x) > x^{s-1}$, $\forall x \geq x_0$. Atunci $h(x) > 0$, $\forall x \geq x_0$. Funcția h este derivabilă, cu $h'(x) = (s-1) \cdot \frac{x^s f'(x) - f^s(x)}{x^s f^s(x)}$, $\forall x \geq x_0$. Constatăm că $x^s f'(x) \geq f^s(f(x)) \geq f^s(x)$, $\forall x \geq x_0$. Rezultă că h' este pozitivă pe $[x_0, \infty)$. Astfel, h este monoton crescătoare. Dar $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$. Contradicție. Prin urmare, $f(x) \leq x$, $\forall x \in [0, \infty)$**6p**

b) Convexitatea funcției f și proprietatea dovedită $f(0) = 0$ implică

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq f'(x), \quad \forall x > 0.$$

Rezultă $f(x) \leq xf'(x), \quad \forall x \geq 0$**3p**

Fie $t \geq 1$. Utilizând rezultatele demonstrate anterior, obținem

$$x^t f'(x) = x^{t-1}(xf'(x)) \geq x^{t-1}f(x) \geq f^{t-1}(x) \cdot f(x) = f^t(x) \geq f^t(f(x)),$$

pentru oricare $x \in [0, \infty)$**3p**

Finalizare**1,5p**

Problema 4. Fie $M = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ o mulțime de $n \geq 2$ matrice din $\mathcal{M}_{2026}(\mathbb{C})$ astfel încât $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$. Demonstrați că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$, nu toate nule, astfel încât

$$\text{rang}(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \dots + \varepsilon_n A_n) \leq 1013.$$

Soluție. Fie T mulțimea matricelor de forma $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_k$, cu $\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$,

nu toate nule. Presupunem prin absurd că $\text{rang}(P) > 1013, \quad \forall P \in T$**3p**

Fie A o matrice arbitrară din M . Considerăm funcția $f : M \rightarrow M$, definită prin $f(X) = AX$, pentru fiecare $X \in M$. Conform ipotezei, funcția f este corect definită. Demonstrăm că f este injectivă. Astfel, presupunem prin absurd că există $B, C \in M, B \neq C$, astfel ca $f(B) = f(C)$. Atunci $A(B - C) = O_{2026}$. Din Teorema lui Sylvester, rezultă

$$\text{rang}(A) + \text{rang}(B - C) \leq \text{rang}(A(B - C)) + 2026 = 2026.$$

Atunci $\text{rang}(A) \leq 1013$ sau $\text{rang}(B - C) \leq 1013$. Dar $A, B - C \in T$. Contradicție. Prin urmare, funcția f este injectivă pe mulțimea finită M , deci este bijectivă.**6p**

Notăm $S = \sum_{k=1}^n A_k$. Din bijectivitatea lui f rezultă $AS = \sum_{k=1}^n f(A_k) = S$.

Astfel, $(A - I_{2026})S = O_{2026}$. Din Teorema lui Sylvester obținem

$$\text{rang}(A - I_{2026}) \leq 1013 \text{ sau } \text{rang}(S) \leq 1013.$$

Dar $S \in T$, deci $\text{rang}(S) > 1013$. Atunci $\text{rang}(A - I_{2026}) \leq 1013$**3p**
 Fie $A, B \in M$, distincte. Cum $\text{rang}(A - I_{2026}) \leq 1013$, obținem

$$\text{rang}(AB - B) = \text{rang}((A - I_{2026})B) \leq \text{rang}(A - I_{2026}) \leq 1013.$$

.....**3p**
 Presupunem $AB \neq B$. Conform ipotezei, $AB \in M$. Atunci $AB - B \in T$, deci $\text{rang}(AB - B) > 1013$. Contradicție. Prin urmare, $AB = B$. Analog găsim $AB = A$. Rezultă $A = B$, în contradicție cu alegerea celor două matrice.

În concluzie, presupunerea $\text{rang}(P) > 1013, \forall P \in T$, este falsă, deci există o matrice $P \in T$ cu $\text{rang}(P) \leq 1013$**6p**

Finalizare**1,5p**