



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Alba Iulia, 31 martie 2026

CLASA a X-a – soluții și bareme

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Determinați funcțiile $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu f strict crescătoare și g surjectivă, care verifică

$$f(nf(n^2) + n) \leq f(n^3) + f(g(n)),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluție.

Deoarece f este strict crescătoare pe $\mathbb{N}$, avem $f(n+1) - f(n) \geq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În plus, adunând $m - n \geq 0$ relații consecutive, obținem $f(m) - f(n) \geq m - n$, adică funcția $f(n) - n$ este crescătoare pe $\mathbb{N}$ și $f(n) \geq n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ **3p**

Relația din enunț se scrie $f(g(n)) \geq f(nf(n^2) + n) - f(n^3)$, ceea ce împreună cu $f(n^2) \geq n^2$ și $f(n^2) - f(n) \geq n^2 - n$, conduce la:

$$f(g(n)) \geq nf(n^2) + n - n^3 \geq n(f(n) - n + n^2) + n - n^3 = (n-1)(f(n) - n) + f(n).$$

..... **6p**

Deoarece $f(n) \geq n$, avem că $f(g(n)) \geq f(n)$, pentru orice $n \geq 1$, iar cum f este strict crescătoare, avem $g(n) \geq n$, pentru orice $n \geq 1$. Dar, cum g este surjectivă, obținem că $g(n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ **3p**

Din $g(n) = n$, obținem că $(n-1)(f(n) - n) \leq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce implică $f(n) \leq n$, pentru orice $n \geq 2$ **3p**

Dar $f(n) \geq n$, deci $f(n) = n$, pentru orice $n \geq 2$. În plus, cum f este strict crescătoare, avem $0 \leq f(0) < f(1) < f(2) = 2$, deci $f(n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ **3p**

Observăm că $f(n) = g(n) = n$ verifică toate proprietățile din enunț, deci acestea sunt funcțiile căutate. **3p**

Finalizare **1.5p**

Problema 2. Se consideră $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ notăm $s_k = z_1^k + z_2^k + z_3^k$. Dacă $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$, demonstrați că $z_1^{12} = z_2^{12} = z_3^{12} = 1$.

Soluție. Considerăm ecuația $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = 0$, care se poate rescrie $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, unde $a = z_1 + z_2 + z_3$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ și $c = z_1z_2z_3$.

Conform condițiilor din enunț avem $s_1 = a \in \mathbb{Z}$, $2b = a^2 - s_2 \in \mathbb{Z}$ și $3c = s_3 - a^3 + 3ab \implies 6c \in \mathbb{Z}$ **3p**

Deoarece $|c| = |z_1||z_2||z_3| = 1$ și $6c \in \mathbb{Z}$, obținem $c = \pm 1$ **3p**

De asemenea, deoarece $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, avem:

$$a = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{b}{c} \implies b = ac.$$

..... **3p**

Astfel, ecuația inițială devine:

$$x^3 - ax^2 + ac \cdot x - c^3 = 0 \Leftrightarrow (x - c)(x^2 + (c - a)x + 1) = 0,$$

deci una dintre soluții este $z_1 = c$ pentru care $z_1^{12} = 1$ **3p**

Pentru a determina z_2 și z_3 ne uităm la ecuația de gradul al doilea $x^2 + (c - a)x + 1 = 0$, având discriminantul $\Delta = (c - a)^2 - 4 \in \mathbb{Z}$.

Dacă $\Delta \geq 0$, atunci $z_2, z_3 \in \mathbb{R}$, iar cum $|z_2| = |z_3| = 1$, avem $z_2, z_3 \in \{\pm 1\}$, deci $z_2^{12} = z_3^{12} = 1$ **3p**

Dacă $\Delta < 0$, cum $\Delta \in \mathbb{Z}$, avem $c - a \in \{-1, 0, 1\}$.

Pentru $c - a = -1$ avem $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, deci $z_2^{12} = z_3^{12} = 1$.

Pentru $c - a = 0$ avem $z_{2,3} = \pm i$, deci $z_2^{12} = z_3^{12} = 1$.

Pentru $c - a = 1$ avem $z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, deci $z_2^{12} = z_3^{12} = 1$.

Așadar, $z_1^{12} = z_2^{12} = z_3^{12} = 1$ **6p**

Finalizare **1.5p**

Problema 3. Considerăm numerele complexe $z_1, z_2, \dots, z_{2026}$ cu $|z_i| \leq 1$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$. Arătați că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2026} \in \{-1, 0, 1\}$, nu toate nule, astfel încât

$$|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \dots + \varepsilon_{2026} z_{2026}| \leq \frac{1}{2^{1000}}.$$

Soluție. Pentru fiecare $X \subseteq \{1, 2, \dots, 2026\}$ notăm $z_X = \sum_{i \in X} z_i$, cu convenția $z_\emptyset = 0$.

Din inegalitatea modulului, rezultă că z_X se află în interiorul discului D de rază 2026 centrat în origine. **3p**

Pentru orice $X, Y \subseteq \{1, 2, \dots, 2026\}$ distincte avem

$$z_X - z_Y = \sum_{i \in X \setminus Y} z_i - \sum_{j \in Y \setminus X} z_j.$$

Astfel, este suficient să găsim două submulțimi distincte X, Y cu

$$|z_X - z_Y| \leq \frac{1}{2^{1000}}$$

și putem defini apoi

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i \in X \setminus Y, \\ -1, & i \in Y \setminus X, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

de unde obținem $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, nu toate nule, și

$$\left| \sum_{i=1}^{2026} \varepsilon_i z_i \right| = |z_X - z_Y| \leq \frac{1}{2^{1000}}.$$

..... **3p**

Presupunem prin absurd că nu există astfel de X, Y . Construim, pentru fiecare submulțime X , un disc închis D_X de rază $\frac{1}{2^{1001}}$ centrat în z_X **3p**

Dacă $D_X \cap D_Y \neq \emptyset$, atunci

$$|z_X - z_Y| \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{1001}} = \frac{1}{2^{1000}},$$

ceea ce ar contrazice presupunerea făcută. Așadar, pentru orice $X \neq Y \subseteq \{1, 2, \dots, 2026\}$ avem $D_X \cap D_Y = \emptyset$ **3p**

Pe de altă parte, discurile D_X sunt conținute în discul D' de rază $2026 + \frac{1}{2^{1001}}$ centrat în origine. Astfel, suma ariilor celor 2^{2026} discuri D_X este mai mică sau egală cu aria lui D' :

$$2^{2026} \cdot \pi \left(\frac{1}{2^{1001}} \right)^2 \leq \pi \left(2026 + \frac{1}{2^{1001}} \right)^2,$$

ceea ce este echivalent cu

$$2^{12} \leq 2026 + \frac{1}{2^{1001}},$$

ceea ce este absurd. Prin urmare, presupunerea este falsă și există submulțimi distincte $X, Y \subseteq \{1, 2, \dots, 2026\}$ cu

$$|z_X - z_Y| \leq \frac{1}{2^{1000}}.$$

..... **9p**
 Finalizare **1.5p**

Problema 4. Fie $n \geq 5$ un număr natural impar. Pentru un poligon convex $P = A_1A_2 \dots A_n$ și un punct S aflat în interiorul său (care nu se află pe nicio diagonală a poligonului), notăm cu $q_P(S)$ numărul de patrulare convexe distincte, cu vârfurile în mulțimea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, care îl conțin pe S în interior.

Determinați cea mai mare valoare posibilă a lui $q_P(S)$ atunci când P parcurge mulțimea poligoanelor convexe cu n laturi, iar S parcurge interiorul lui P fără diagonalele sale.

Soluție.

Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, considerăm dreapta SA_i și notăm cu x_i numărul de vârfuri ale poligonului aflate în semiplanul deschis determinat de SA_i care conține pe A_{i+1} . Atunci aceste vârfuri sunt consecutive $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{i+x_i}$, unde indexarea se face modulo n .

Un patrulater cu vârfuri printre $A_1, \dots, A_n$ nu conține punctul S dacă și numai dacă toate cele patru vârfuri ale sale se află într-un același semiplan deschis determinat de o dreaptă prin S . Pentru un i fix, numărul acestor patrulare care au unul dintre vârfuri A_i și celelalte trei în semiplanul deschis determinat de SA_i care îl conține pe A_{i+1} este $C_{x_i}^3$, iar fiecare patrulater care nu conține pe S este numărat exact o dată. Rezultă

$$q_P(S) = C_n^4 - \sum_{i=1}^n C_{x_i}^3.$$

..... **6p**

Numărăm perechile ordonate (A_i, A_j) , $i \neq j$, pentru care A_j se află în semiplanul lui SA_i care conține pe A_{i+1} . Pentru fiecare i există x_i astfel de vârfuri, deci numărul total este $\sum_{i=1}^n x_i$.

Pe de altă parte, pentru fiecare pereche neordonată $\{A_i, A_j\}$, exact una dintre perechile (A_i, A_j) sau (A_j, A_i) este numărată. Prin urmare,

$$\sum_{i=1}^n x_i = C_n^2.$$

..... **3p**

Valoarea maximă a lui $q_P(S)$ se atinge când $\sum_{i=1}^n C_{x_i}^3$ este minimă, cu

$\sum_{i=1}^n x_i = C_n^2$. Observăm apoi că pentru orice două numere naturale $1 \leq x < y$ avem:

$$C_{x+1}^3 + C_{y-1}^3 \leq C_x^3 + C_y^3,$$

iar egalitatea are loc dacă și numai dacă $x+1 = y$. Astfel, valoarea minimă a expresiei $\sum_{i=1}^n C_{x_i}^3$ se atinge pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, iar din constrângerea

$\sum_{i=1}^n x_i = C_n^2$, avem $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n-1}{2}$. Așadar, valoarea maximă a

lui $q_P(S)$ este $C_n^4 - nC_{\frac{n-1}{2}}^3 = \frac{n(n-1)(n-3)(n+1)}{48}$.

..... **6p**

Valoarea aceasta se poate atinge pentru un poligon regulat cu n laturi și S centrul său de greutate. Într-adevăr, în acest caz, pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem exact $x_i = \frac{n-1}{2}$ vârfuri A_j în semiplanul deschis determinat de SA_i care îl conține pe A_{i+1} **6p**

Finalizare **1.5p**

Notă 1: Pentru minimizarea $\sum_{i=1}^n C_{x_i}^3$ cu constrângerea $\sum_{i=1}^n x_i = C_n^2$ se poate defini alternativ funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$, care este convexă pe $[1, \infty)$ (se demonstrează prin calcul direct). Astfel, deoarece $x_i \geq 1$, putem aplica inegalitatea lui Jensen și obținem că:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq nf\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = nf\left(\frac{n-1}{2}\right) = nC_{\frac{n-1}{2}}^3,$$

adică valoarea maximă a lui $q_P(S)$ este $C_n^4 - nC_{\frac{n-1}{2}}^3 = \frac{n(n-1)(n-3)(n+1)}{48}$.

Notă 2: Pentru simpla numărare a patrulaterelor în cazul unui poligon regulat P cu n laturi cu S centrul său de greutate se acordă **3 puncte**.