Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Alba Iulia, 31 martie 2026

CLASA a IX-a – soluţii şi bareme

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Determinaţi funcţiile strict monotone $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care verifică simultan următoarele două condiţii:

$$f(f(n)) = 4n + 3;$$
$$f(f(n) - n) = 2n + 3,$$

pentru orice număr natural nenul n.

Soluţia 1. Evident, f este strict crescătoare. **3p**

Folosind ipoteza, avem $f(f(2n) - 2n) = 4n + 3 = f(f(n))$. Cum f este strict crescătoare, obţinem $f(2n) - 2n = f(n)$, deci

$$f(2n) - f(n) = 2n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1)$$

.... **3p**

Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n + 1) = f(n) + 1$. Atunci $f(n+1)-(n+1) = f(n)-n$, deci $f(f(n+1)-(n+1)) = f(f(n)-n)$, de unde rezultă $2(n + 1) + 3 = 2n + 3$, fals. Prin urmare,

$$f(n + 1) - f(n) \geq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (2)$$

.... **3p**

Folosind relaţiile (1) şi (2), avem:

$$2n = f(2n) - f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(n + k + 1) - f(n + k)) \geq 2n,$$

deci $f(n + 1) - f(n) = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă

$$f(n) = f(1) + 2(n - 1), \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

.... **9p**

În final, avem: $7 = f(f(1)) = f(1) + 2(f(1) - 1)$, deci $f(1) = 3$ şi $f(n) = 2n+1$, pentru orice n, care verifică ipoteza. **3p**

Finalizare **1,5p**

Soluţia 2. Evident, f este strict crescătoare. **3p**

Pentru $n = 1$ în prima relaţie din enunţ şi $n = 2$ în a doua relaţie avem $f(f(1)) = 7 = f(f(2)-2)$. Cum f este strict crescătoare, obţinem $f(1) = f(2) - 2$ deci $f(2) = f(1) + 2$. **3p**

Pentru $n = 2$ în cele două relaţii din enunţ şi $n = 3$ în a doua relaţie avem $f(f(2)) = 8+3 = 11,\ f(f(2)-2) = 7,\ f(f(3)-3) = 9$, deci $f(f(2)-2) < f(f(3)-3) < f(f(2))$. Funcția fiind strict crescătoare, rezultă $f(2) - 2 < f(3) - 3 < f(2)$ deci $f(3) = f(2) + 2 = f(1) + 4$.

.... **3p**

Demonstrăm inductiv că $f(n) = f(1) + 2(n-1),\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că $f(k) = f(1) + 2(k-1),\quad k < n$.

Dacă n este par, folosind relaţiile din enunţ, avem:

$$\begin{cases} f\left(f\left(\dfrac{n}{2}\right)\right) = 4\dfrac{n}{2} + 3 = 2n+3 \\ f(f(n)-n) = 2n+3 \end{cases} \Rightarrow f(n) - n = f\left(\frac{n}{2}\right),$$

deci

$$f(n) = n + f\left(\frac{n}{2}\right) = n + f(1) + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = f(1) + 2(n-1).$$

.... **3p**

Dacă n este impar, avem:

$$\begin{cases} f\left(f\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\right) = 2n+5 \\ f\left(f\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\right) = 2n+1 \end{cases} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) < f(f(n)-n) < f\left(f\left(\frac{n+1}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) < f(n) - n < f\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

deci

$$f(1) + 2\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) < f(n) - n < f(1) + 2\left(\frac{n+1}{2} - 1\right),$$

prin urmare

$$f(1) + n - 3 < f(n) - n < f(1) + n - 1 \quad \Rightarrow f(n) - n = f(1) + n - 2$$

de unde rezultă

$$f(n) = f(1) + 2(n - 1).$$

....**6p**

În final, avem: $7 = f(f(1)) = f(1) + 2(f(1) - 1)$, deci $f(1) = 3$ şi $f(n) = 2n + 1$, pentru orice n, care verifică ipoteza. **3p**

Finalizare **1,5p**

Soluţia 3. Evident, f este strict crescătoare. **3p**

Avem $f(1) \geq 2$. Dacă $f(1) = 2$, obţinem contradicţia $f(1) = f(2-1) = 5$. **3p**

Dacă $f(1) = k \geq 4$, atunci $f(k - 1) = 5$ ceea ce contrazice monotonia funcţiei. **6p**

Rezultă că $f(1) = 3$. De unde inductiv $f(n) = 2n + 1$ **6p**

Această funcţie convine. **3p**

Finalizare **1,5p**

Problema 2. Considerăm numărul natural $n \geq 2$ şi numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, \infty)$ cu proprietatea că există numărul natural nenul k astfel încât

$$a_1^{k-1} + a_2^k + ... + a_n^{k+n-2} \geq a_1^k + a_2^{k+1} + ... + a_n^{k+n-1}.$$

Arătaţi că $a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k \leq n$.

Soluţie. În rezolvare vom folosi proprietatea că dacă a este un număr real pozitiv, atunci pentru orice număr natural i, este adevărată inegalitatea

$$a^i - a^{i+1} \geq a^{i+1} - a^{i+2}, \qquad (*)$$

echivalentă cu

$$a^{i+2} - a^{i+1} \geq a^{i+1} - a^i. \qquad (**)$$

Într-adevăr trecând toţi termenii în partea stângă se obţine relaţia

$$a^i(1 - a)^2 \geq 0.$$

....**6p**

Astfel, avem suita de inegalităţi

$$1-a_1 \overset{(*)}{\geq} a_1-a_1^2 \overset{(*)}{\geq} ... \overset{(*)}{\geq} a_1^{k-1}-a_1^k \overset{ipoteza}{\geq} (a_2^{k+1}-a_2^k)+...+(a_n^{k+n-1}-a_n^{k+n-2}) \overset{(**)}{\geq}$$

$$\overset{(**)}{\geq} ... \overset{(**)}{\geq} (a_2^k - a_2^{k-1}) + (a_3^k - a_3^{k-1}) + ... + (a_n^k - a_n^{k-1}) \overset{(**)}{\geq} ... \overset{(**)}{\geq}$$

$$\overset{(**)}{\geq} (a_2^2 - a_2) + ... + (a_n^2 - a_n) \overset{(**)}{\geq} (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + ... + (a_n - 1).$$

.... **9p**

Uitându-ne la termenii extremi, deducem

$$n \geq a_1 + ... + a_n,$$

apoi la al doilea şi penultimul

$$a_1 + ... + a_n \geq a_1^2 + ... + a_n^2,$$

şi tot aşa

....

$$a_1^{k-1} + ... + a_n^{k-1} \geq a_1^k + ... + a_n^k,$$

deci

$$n \geq a_1 + ... + a_n \geq a_1^2 + ... + a_n^2 \geq ... \geq a_1^k + ... + a_n^k,$$

şi cerinţa este demonstrată.. **6p**

Finalizare **1,5p**

Problema 3. Considerăm numerele reale a şi b astfel încât $[a] = [b] \in \mathbb{N}^*$. Dacă $[a^n] \cdot [b^n]$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n, arătaţi că $a = b$.
(Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.)

Soluţie. La început, demonstrăm că $[a^2] = [b^2]$.

Dacă $[a] = [b] = k$, atunci există numerele naturale r şi s astfel încât $[a^2] = k^2 + r,\ [b^2] = k^2 + s,\ 0 \leq r \leq 2k,\ 0 \leq s \leq 2k.$ **(∗)**

.... **3p**

Deoarece $[a^2] \cdot [b^2]$ este pătrat perfect, există numărul natural t astfel încât

$$[a^2] \cdot [b^2] = (k^2 + r)(k^2 + s) = (k^2 + t)^2,$$

de unde obţinem

$$k^2(r+s-2t) = t^2 - rs.$$

Dacă $r+s < 2t$, rezultă $t^2 < rs$, prin urmare $\frac{r+s}{2} < t < \sqrt{rs}$, contradicţie.

Dacă $r+s > 2t$, rezultă $t < \frac{r+s}{2}$ şi avem:

$$k^2 \le k^2(r+s-2t) = t^2 - rs < \left(\frac{r+s}{2}\right)^2 - rs = \left(\frac{r-s}{2}\right)^2,$$

de unde obţinem $k < \left|\frac{r-s}{2}\right|$, adică $|r-s| > 2k$, în contradicţie cu $(*)$.

Prin urmare $r+s = 2t$, deci $t^2 = rs$, aşadar $t = \sqrt{rs} = \frac{r+s}{2}$, adică $r = s$, ceea ce înseamnă că $[a^2] = [b^2]$.

....**6p**

Inductiv, obţinem $\left[a^{2^n}\right] = \left[b^{2^n}\right]$, pentru orice număr natural nenul n.

....**3p**

Presupunând că $a < b$, rezultă $0 < b^{2^n} - a^{2^n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n. În continuare, folosind inegalitatea lui Bernoulli, avem:

$$1 > a^{2^n}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{2^n} - 1\right) \ge \left(\frac{b}{a}\right)^{2^n} - 1 > \left(\frac{b}{a}\right)^n - 1 =$$

$$= \left(1 + \frac{b-a}{a}\right)^n - 1 \ge 1 + n\cdot\frac{b-a}{a} - 1 = n\cdot\frac{b-a}{a},$$

pentru orice număr natural nenul n, de unde rezultă $n < \frac{a}{b-a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, contradicţie. **9p**

Finalizare **1,5p**

Observaţie. (altă demonstraţie pentru $[a^2] = [b^2]$) Pentru $[a] = [b] = k$, deoarece $[a^2]\cdot[b^2]$ este pătrat perfect, există numerele naturale nenule d, x, y cu $[a^2] = dx^2$, $[b^2] = dy^2$. Presupunând $[a^2] < [b^2]$, avem: $k^2 \le dx^2 < dy^2 < (k+1)^2$, de unde $2k \ge d(y^2 - x^2) \ge d(x+y) > d(\frac{k}{\sqrt{d}} + \frac{k}{\sqrt{d}}) = 2k\sqrt{d} \ge 2k$, contradicţie.

Problema 4. a) Considerăm cele patru laturi ale unui pătrat şi una dintre diagonalele sale. Fiecărui astfel de segment îi alegem în mod arbitrar un sens, obţinând astfel cinci vectori. Arătaţi că modulul sumei acestor cinci vectori este cel puţin egal cu lungimea diagonalei pătratului.

b) Fie n un număr natural nenul şi fie n drepte care partiţionează un pătrat în poligoane convexe. Notăm cu M mulţimea tuturor segmentelor care reprezintă laturile acestor poligoane. Arătaţi că putem alege pentru fiecare segment din M un sens, astfel încât suma vectorilor corespunzători să aibă modulul cel mult egal cu lungimea diagonalei pătratului.

Soluţie.

a) Notăm pătratul $ABCD$, considerăm $AB = 1$ şi fie $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AD}$. Atunci cerinţa este echivalentă cu

$$|x \cdot \overrightarrow{v} + y \cdot \overrightarrow{s} + z(\overrightarrow{v} \pm \overrightarrow{s})| \geq \sqrt{2},$$

pentru orice $x, y \in \{-2, 0, 2\}$ şi $z \in \{-1, 1\}$. Întrucât modulul unui vector este egal cu modulul opusului său, putem presupune fără a restrânge generalitatea că $z = 1$. Atunci cerinţa se scrie $|(x+1)\overrightarrow{v} + (y \pm 1)\overrightarrow{s}| \geq \sqrt{2}$, care este echivalentă cu $(x+1)^2 + (y \pm 1)^2 \geq 2$. Întrucât $|x+1| \geq 1$ şi $|y \pm 1| \geq 1$, pentru orice $x, y \in \{-2, 0, 2\}$, concluzia este adevărată.
.... **6p**

b) Pentru fiecare dreaptă d_i, $i = \overline{1,n}$, notăm unul din semiplanele determinate de aceasta cu 1 iar celălalt cu -1. Fiecărui punct P din interiorul pătratului care nu se află pe nici o dreaptă d_i îi asociem n-uplul $(p_1, p_2, ..., p_n)$, unde p_i identifică notarea 1 sau -1 aferentă poziţiei lui P faţă de dreapta d_i, pentru $i = \overline{1,n}$. Punctele interioare fiecărui poligon rezultat în urma tăierii vor avea toate acelaşi n-uplu asociat, deci putem asocia poligonului numărul $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$, care poate lua una din valorile 1 sau -1. Observăm că orice două poligoane care au o latura comună vor avea asociate pe 1 respectiv -1. Vom colora interioarele poligoanelor asociate cu 1 cu negru şi interioarele celor asociate cu -1 cu alb şi vom obţine un tipar similar unei table de şah.
.... **6p**

Pentru fiecare poligon negru, orientăm toate laturile acestuia conform parcurgerii laturilor sale în sensul acelor de ceasornic, iar pentru fiecare poligon alb, orientăm toate laturile acestuia în sensul invers acelor de ceasornic. Atunci fiecare segment interior este la fel orientat în ambele procese, deci orientatea tuturor segmentelor este coerentă. Fie $\overrightarrow{\alpha}$ suma vectorilor interiori pătratului şi $\overrightarrow{\beta}$ suma vectorilor de pe laturile pătratului. Întrucât în orice poligon suma vectorilor ordonaţi de pe laturi este nulă, avem $2\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{0}$, deci $\overrightarrow{\alpha} = -\dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\beta}$. **6p**

Dacă considerăm ca la punctul a) că latura pătratului este egală cu unitatea, pentru ca această configuraţie să corespundă cerinţei, trebuie ca

$|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}| \leq \sqrt{2}$, adică $|\overrightarrow{\beta}| \leq 2\sqrt{2}$. Dar $\overrightarrow{\beta}$ este suma dintre doi vectori perpendiculari sau nuli, amândoi de modul cel mult 2, deci inegalitatea se verifică. **3p**

Finalizare **1,5p**