



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Drobeta-Turnu Severin, 31 martie 2026

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Determinați numerele $x \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{Z}$ care verifică relația

$$2(x^2 + y^2) + x + y = 3xy.$$

Soluție. Egalitatea dată se poate scrie ca o ecuație cu coeficienți întregi, în necunoscuta x , sub forma: $2x^2 + (1 - 3y)x + (2y^2 + y) = 0$, iar discriminantul ecuației este $\Delta = (1 - 3y)^2 - 8(2y^2 + y) = -7y^2 - 14y + 1$ **6p**

Ecuația are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$, iar cum $\Delta = 8 - 7(y + 1)^2$, rezultă că $7(y + 1)^2 \leq 8$, de unde, având în vedere că $y \in \mathbb{Z}$, obținem $|y + 1| \in \{0, 1\}$ **6p**

Pentru ca ecuația să aibă rădăcini raționale, Δ trebuie să fie pătrat perfect, de unde obținem $|y + 1| = 1$, deci $y \in \{-2, 0\}$ și $\Delta = 1$ **3p**

Pentru $y = -2$ ecuația devine $2x^2 + 7x + 6 = 0$, de unde $x \in \{-2, -\frac{3}{2}\}$, iar pentru $y = 0$ obținem $2x^2 + x = 0$, de unde $x \in \{-\frac{1}{2}, 0\}$, deci problema admite patru soluții: $(0, 0)$, $(-2, -2)$, $(-\frac{3}{2}, -2)$ și $(-\frac{1}{2}, 0)$ **6p**

Finalizare **1,5p**



CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 2. Determinați numărul natural m pentru care numărul

$$A = 25^m - 3^m - 2$$

poate fi scris ca produs de două numere întregi consecutive.

Soluție. Pentru $m = 0$, avem $A = -2$, care nu poate fi scris ca produs de două numere consecutive, deci $m \in \mathbb{N}^*$ și $A = 25^m - 3^m - 2 \in \mathbb{N}^*$.

Fie $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x \cdot (x+1) = 25^m - 3^m - 2$. Obținem $4x^2 + 4x + 1 = 4(25^m - 3^m - 2) + 1 \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 4(25^m - 3^m) - 7$, deci $4(25^m - 3^m) - 7$ este pătrat perfect. **6p**

Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem $4(25^m - 3^m) - 7 < (2 \cdot 5^m)^2$ **3p**

Arătăm că $4(25^m - 3^m) - 7 > (2 \cdot 5^m - 2)^2$, inegalitate echivalentă cu $4 \cdot 3^m + 11 < 8 \cdot 5^m$, care este evident adevărată, deoarece $4 \cdot 3^m < 4 \cdot 5^m$ și $11 < 4 \cdot 5^m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ **3p**

Deci $(2 \cdot 5^m - 2)^2 < 4 \cdot 25^m - 4 \cdot 3^m - 7 < (2 \cdot 5^m)^2$, iar cum $4(25^m - 3^m) - 7$ este pătrat perfect, deducem că $4 \cdot 25^m - 4 \cdot 3^m - 7 = (2 \cdot 5^m - 1)^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 25^m - 4 \cdot 3^m - 7 = 4 \cdot 25^m - 4 \cdot 5^m + 1 \Leftrightarrow 5^m - 3^m = 2$ **3p**

Pentru $m \geq 2$ avem $5^m - 3^m = (5 - 3)(5^{m-1} + 5^{m-2} \cdot 3 + \dots + 3^{m-1}) \geq 2 \cdot (5^{m-1} + 3^{m-1}) > 2$, deci nu avem soluție. **3p**

Pentru $m = 1$, obținem $A = 20 = 4 \cdot 5$, deci problema are unica soluție $m = 1$ **3p**

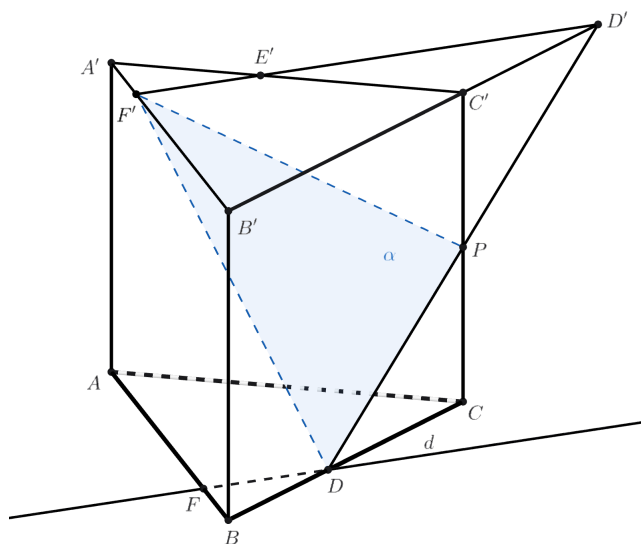
Finalizare **1,5p**

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 3. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, P mijlocul muchiei CC' și punctele D pe muchia BC , respectiv F' pe muchia $A'B'$.

Demonstrați că planele (DPF') și (ABB') sunt perpendiculare dacă și numai dacă $BD = 2 \cdot A'F'$.

Soluție. Notăm $\alpha = (DPF')$, $\{D'\} = DP \cap B'C'$, $\{E'\} = D'F' \cap A'C'$ și $d = \alpha \cap (ABC)$; atunci $D', E' \in \alpha$, $d \subset \alpha$; $D', E' \in (A'B'C')$ și $d \subset (ABC)$.



($\Rightarrow$) Presupunem că $\alpha \perp (ABB')$. Întrucât $(A'B'C') \parallel (ABC)$, $\alpha \cap (A'B'C') = E'F'$ și $\alpha \cap (ABC) = d$, rezultă $E'F' \parallel d$, (1).

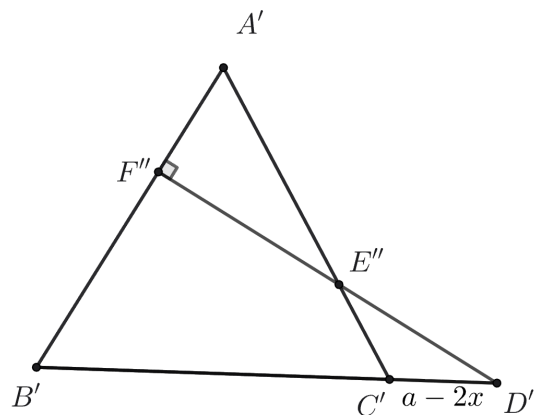
Pe de altă parte, $\alpha \perp (ABB')$, $(ABC) \perp (ABB')$, $\alpha \cap (ABC) = d$, prin urmare $d \perp (ABB')$, iar din (1) obținem $E'F' \perp A'B'$ **6p**

În continuare, notăm $A'F' = x$ și $AB = a$. Triunghiul $F'B'D'$ fiind de tipul $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, avem $B'D' = 2 \cdot F'B' = 2(a - x)$, deci $C'D' = B'D' - B'C' = 2(a - x) - a = a - 2x$.

Cum $\triangle C'PD' \equiv \triangle CPD$ (cazul C.U.), rezultă că $DC = D'C' = a - 2x$, de unde $BD = 2x$, adică $BD = 2A'F'$ **6p**

($\Leftarrow$) Presupunem că $A'F' = x$ și $BD = 2x$, unde $0 < x < \frac{a}{2}$.

Fie $D'F'' \perp A'B'$, $F'' \in A'B'$ și $\{E''\} = D'F'' \cap A'C'$.



Din congruența triunghiurilor $C'PD'$ și CPD , avem $DC = C'D' = a - 2x$, deci $B'D' = B'C' + C'D' = 2a - 2x$, de unde $B'F'' = a - x$ ($30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ în triunghiul $F''B'D'$). Atunci $A'F'' = x = A'F'$, prin urmare $F'' = F'$ și dreptele $D'F''$ și $D'F'$ coincid. În acest caz $D'F' \perp A'B'$ și $E'' = E'$ **6p**

Avem $E'F' \perp A'B'$, $E'F' \perp A'A$, $A'B' \cap A'A = \{A'\}$, deci $E'F' \perp (ABB')$ și cum $E'F' \subset \alpha = (DPF')$, rezultă că $(DPF') \perp (ABB')$ **3p**

Finalizare **1,5p**



CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 4. Determinați numerele reale x pentru care există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = \left[\frac{a}{b} \right] + \left\{ \frac{b}{a} \right\}$.

(Notățiile $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară, a numărului real x .)

Soluție. Evident, se impune ca $a, b \in \mathbb{N}^*$. Atunci, dacă $x = \left[\frac{a}{b} \right] + \left\{ \frac{b}{a} \right\}$, avem $x = \left[\frac{a}{b} \right] \in \mathbb{N}$ și $\{x\} = \left\{ \frac{b}{a} \right\} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, deci $x \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ **3p**

Pentru $x = 0$ avem scrierea $x = \left[\frac{1}{2} \right] + \left\{ \frac{2}{1} \right\}$.

Dacă $x < 1$, atunci $[x] = 0$, deci $\left[\frac{a}{b} \right] = 0$, de unde reiese că $a < b$, deci $x = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$. Cum orice număr rațional $x \in (0, 1)$ se scrie sub forma $x = \frac{p}{q}$, unde $0 < p < q$, p și q numere naturale nenule, alegând $a = q$ și $b = p + q$, avem $a < b$ și $\left\{ \frac{b}{a} \right\} = \left\{ \frac{p+q}{q} \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \right\} = x$. Deducem că toate numerele $x \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ verifică. **6p**

Fie $k \geq 1$ un număr natural. Căutăm x pentru care $[x] = k$. Atunci avem $\left[\frac{a}{b} \right] = k$, deci $k \leq \frac{a}{b} < k + 1$ și atunci $\frac{1}{k+1} < \frac{b}{a} \leq \frac{1}{k}$.

Dacă $b = a$, avem $k = 1$ și $x = 1$.

Dacă $b \neq a$, din $\frac{b}{a} \leq \frac{1}{k} \leq 1$, avem $b < a$. Atunci $\{x\} = \left\{ \frac{b}{a} \right\} = \frac{b}{a}$, deci $\{x\} \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$, pentru $k \geq 2$, respectiv $\{x\} \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$, pentru $k = 1$. **6p**

Pentru orice număr rațional $r \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$, există o scriere $r = \frac{b}{a}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ și pentru aceasta avem $\frac{a}{b} \in [k, k+1)$, deci $\left[\frac{a}{b} \right] = k$, așadar toate numerele de forma $k + r$, unde $r \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \cap \mathbb{Q}$ verifică.

În mod excepțional, pentru $k = 1$, dacă $a = b$ avem soluția $x = 1$,
 altfel avem $r \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap \mathbb{Q}$. În concluzie, soluțiile problemei sunt numerele
 raționale din mulțimea $[0, 1] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \bigcup_{k \geq 2} \left(k + \frac{1}{k+1}, k + \frac{1}{k}\right]$ **6p**
 Finalizare **1,5p**