

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Drobeta-Turnu Severin, 31 martie 2026

CLASA a VII-a – soluții

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Numerele naturale nenule a, b, c , distincte două câte două, îndeplinesc condițiile: $abc = 3(a + b + c)$ și $ab + bc + ca = 4(a + b + c) - 1$.

a) Arătați că unul dintre numere este 1.

b) În cazul $a = 1$, determinați toate valorile posibile ale perechii (b, c) .

Soluție. a) Observăm că $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1 = 3(a + b + c) - 4(a + b + c) + 1 + (a + b + c) - 1 = 0$. Atunci unul din numerele $a - 1, b - 1, c - 1$ este egal cu 0, deci unul dintre numerele a, b, c este egal cu 1 **9p**

b) Pentru $a = 1$, cele două relații devin $bc = 3 + 3b + 3c$, sau $bc - 3b - 3c = 3$, sau $(b - 3)(c - 3) = 12$ **6p**

Analizând descompunerile numărului 12 în produs de doi factori, obținem în final soluțiile $(4, 15), (5, 9), (6, 7), (7, 6), (9, 5), (15, 4)$ **6p**

Soluție alternativă. Împărțind prima relație la abc obținem $1 = \frac{3}{bc} + \frac{3}{ac} + \frac{3}{ab}$ **3p**

Putem presupune că a este cel mai mic dintre numere.

Dacă $a \geq 3$, deci $b, c \geq 4$, atunci $ab \geq 12, ac \geq 12, bc \geq 16$ iar $\frac{3}{bc} + \frac{3}{ac} + \frac{3}{ab} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} < 1$, deci acest caz nu este posibil **3p**

Dacă $a = 2$, atunci a doua relație dă $bc - 2b - 2c = 7$, de unde $(b - 2)(c - 2) = 11$. Sunt posibile cazurile $b = 3, c = 13$ sau $b = 13, c = 3$, dar în niciunul dintre ele nu se verifică prima relație. Așadar, cel mai mic dintre numere trebuie să fie 1 **3p**

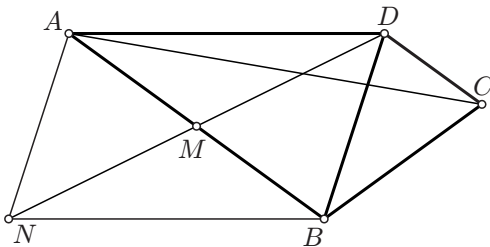
Pentru $a = 1$, continuăm ca mai sus **12p**

Finalizare **1,5p**

Problema 2. În patrulaterul convex $ABCD$ știm că $\angle ADC = 4 \cdot \angle DAB = 4 \cdot \angle DBC$, $BD = BC$, iar DB este bisectoarea unghiului ADC .

a) Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

b) Fie M mijlocul laturii AB . Arătați că $AC = 2 \cdot DM$.



Soluție. a) Notăm $\angle DAB = \angle DBC = \alpha$; rezultă $\angle ADC = 4\alpha$, iar $\angle ADB = \angle BDC = 2\alpha$. Din $BD = BC$ rezultă că triunghiul BCD este isoscel cu $\angle BCD = \angle BDC = 2\alpha$ **3p**

În triunghiul BCD avem $\angle DBC + \angle BCD + \angle CDB = 180^\circ$, adică $5\alpha = 180^\circ$ de unde $\alpha = 36^\circ$ și astfel: $\angle DAB = 36^\circ, \angle ABC = 108^\circ, \angle BCD = 72^\circ, \angle CDA = 144^\circ$ **6p**

b) Deoarece $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ rezultă $CD \parallel AB$, iar $ABCD$ este trapez **3p**

Notăm cu N simetricul lui D față de M . Pentru a dovedi concluzia este suficient să arătăm că $\triangle DBN \equiv \triangle CBA$, (*) **3p**

Deoarece $ADBN$ este paralelogram reiese $BN = AD$ și $\angle NBD = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ = \angle ABC$. Cum $AD = AB$ și $BD = BC$, relația (*) este dovedită (cazul LUL) .. **6p**

Finalizare **1,5p**

Problema 3. Determinați perechile (a, b) de numere naturale nenule pentru care numerele $\frac{a^2 + b}{a + b - 1}$ și $\frac{b^2 + a}{a + b}$ sunt naturale.

Soluție. Avem $m = \frac{a^2 + b}{a + b - 1} = a + 1 - \frac{ab - 1}{a + b - 1}$ și $n = \frac{b^2 + a}{a + b} = b + 1 - \frac{ab + b}{a + b}$ **9p**

Dacă m și n sunt numere naturale, numărul $p = \frac{ab + b}{a + b} - \frac{ab - 1}{a + b - 1} = \frac{b^2 + a}{(a + b)(a + b - 1)}$ este, evident, pozitiv. Apoi $p < 1 \iff b^2 + a < a^2 + 2ab + b^2 - a - b \iff a(a - 2) + b(2a - 1) > 0$, iar ultima inegalitate este adevărată pentru $a \geq 2$, deci în cazul $a \geq 2$ nu există soluții **9p**

Pentru $a = 1$ obținem soluția $(1, 1)$ **3p**

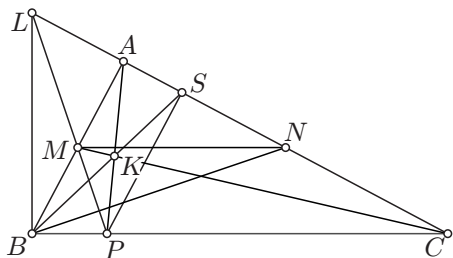
Altă soluție. Cu notațiile precedente, dacă $a = 1$ rezultă $m = 1 + \frac{1}{b}$, care este număr natural dacă și numai dacă $b = 1$; asemănător dacă $b = 1$. Obținem soluția $(1, 1)$ **3p**

Analizăm acum cazul $a, b \geq 2$. Fie $s = a + b \geq 4$. Atunci $n = \frac{s + b(b - 1)}{s} = 1 + \frac{c}{s}$ **3p**
și $m = \frac{(s - b)^2 + b}{s - 1} = s - 2b + 1 + \frac{c + 1}{s - 1}$, unde $c = b(b - 1) \geq 2$ **6p**

Dacă $c = ks$, atunci $s > b$ duce la $k < b - 1$. Apoi $s - 1 \mid ks + 1 = k(s - 1) + k + 1$ implică $s - 1 \mid k + 1$, deci $k \geq s - 2 = a + b - 2 \geq b - 1$ - contradicție. Astfel, în cazul $a, b \geq 2$ nu există soluții **9p**

Finalizare **1,5p**

Problema 4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în care punctele M și N sunt respectiv mijloacele catetelor AB și AC . Perpendiculara din M pe BN intersectează BC în punctul P . Dreptele AP și CM se intersectează în K . Demonstrați că $\angle ABK = \angle NBC$.

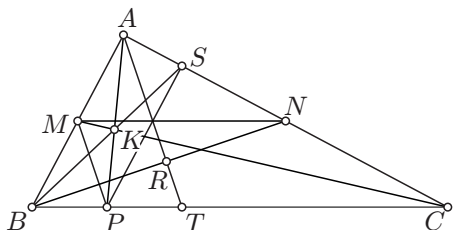


Soluție. Notăm $\{S\} = BK \cap AC$. Teorema lui Ceva aplicată în triunghiul ABC pentru cevienle concurente BS , AP și CM , împreună cu condiția CM mediană conduce, folosind reciproca teoremei lui Thales la concluzia $PS \parallel BA$. De aici, $\angle BSP = \angle ABS$ (alterne interne) (1) **6p**

Notăm $\{L\} = PM \cap AC$. În triunghiul BLN , BA și LP sunt înălțimi, prin urmare M este ortocentrul triunghiului BLN și, în consecință, NM este, de asemenea, înălțime **3p**

Deoarece MN este linie mijlocie în triunghiul ABC avem $MN \parallel BC$, deci $BC \perp BL$. Astfel, patrulaterul $LBPS$ este inscripabil, de unde $\angle BSP = \angle BLP$, deci $\angle ABK = \angle BLP$ (2) ... **6p**

În sfârșit, $\angle BLP = 90^\circ - \angle LBN = \angle NBC$, iar relația (2) implică $\angle ABS = \angle NBC$... **6p**



Altă soluție. Arătăm că BS este simediană, i.e., conform relației Steiner, $\frac{AS}{SC} = \frac{c^2}{a^2}$ **3p**

Conform teoremei lui Ceva în $\triangle ABC$, aceasta revine la $\frac{BP}{PC} = \frac{c^2}{a^2}$ **6p**

Fie R, T intersecțiile perpendicularei din A pe BN cu BN , respectiv BC . Teorema lui Menelaus în $\triangle BNC$ cu punctele coliniare $A - R - T$ ne arată că

$$\frac{BT}{TC} = \frac{BR}{RN} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{2c^2}{b^2}, \text{ deoarece } \frac{BR}{RN} = \frac{AB^2}{AN^2} = \frac{4c^2}{b^2} \text{ (teorema catetei în } \triangle ABN) \text{) 9p}$$

$$\text{Obținem } \frac{BT}{BC} = \frac{2c^2}{2c^2 + b^2}, \text{ de unde } \frac{BP}{BC} = \frac{c^2}{2c^2 + b^2}, \text{ deci } \frac{BP}{PC} = \frac{c^2}{c^2 + b^2} = \frac{c^2}{a^2} \text{ 3p}$$

Finalizare **1,5p**