

Olimpiada Națională de Matematică
Eta Națională, Drobeta-Turnu Severin, 31 martie 2026

CLASA a VI-a – soluții

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Fie p și q numere prime impare, cu $p < q < 2p$ și x, y numere naturale nenule astfel încât $x + 1$ și $y - 1$ sunt direct proporționale cu p și $q - p$, iar $x - 1$ și $y + 1$ sunt invers proporționale cu $2q - 2p$ și $2p - q$.

a) Demonstrați că $y = 3$.

b) Demonstrați că $x + y$ este număr prim.

Soluție. a) Din enunț rezultă $\frac{x+1}{p} = \frac{y-1}{q-p}$, (1) și $\frac{x-1}{2p-q} = \frac{y+1}{2q-2p}$ **3p**

Rezultă $\frac{x+1}{p} = \frac{y-1}{q-p} = \frac{x+y}{q}$ și $\frac{x-1}{2p-q} = \frac{y+1}{2q-2p} = \frac{x+y}{q}$, de unde $\frac{y-1}{q-p} = \frac{y+1}{2(q-p)}$,

ceea ce duce la $y - 1 = \frac{y+1}{2}$, adică $y = 3$ **6p**

b) Înlocuind în (1) obținem $\frac{x+1}{p} = \frac{2}{q-p}$, adică $x = \frac{3p-q}{q-p} \in \mathbb{N}^*$ **3p**

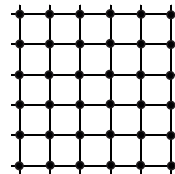
Rezultă $q - p \mid 3p - q$. Cum $q - p \mid 3q - 3p$, deducem $q - p \mid 2q$ **3p**

Cum q este număr prim și $q > q - p \geq 2$, reiese $q - p = 2$, de unde $x = q - 3$ și $x + y = q$, ceea ce dovedește concluzia **6p**

Finalizare **1,5p**

Observație. O rezolvare completă a punctului b) bazată pe folosirea concluziei de la a) se notează cu cele 12 puncte corespunzătoare lui b).

Problema 2. Pe o foaie cu pătrățele a fost evidențiată o mulțime M de 36 de puncte, situate ca în figura alăturată. Considerăm mulțimea T a triunghiurilor (nedeenerate) care au toate cele trei vârfuri în M .



a) Câte dintre punctele mulțimii M sunt ortocentre ale unor triunghiuri din T ?

b) Câte dintre punctele mulțimii M sunt centre de greutate ale unor triunghiuri din T ?

c) Câte dintre punctele mulțimii M sunt centre ale cercurilor circumscrise unor triunghiuri din T ?

Soluție. Luăm ca unitate de măsură latura unui pătrățel mic. Astfel, mulțimea M este situată pe laturile și în interiorul unui pătrat P de latură 5.

a) Fiecare punct al mulțimii M este ortocentrul unui triunghi dreptunghic din T , având catetele de lungime 1 **3p**

Reiese că toate cele 36 de puncte ale mulțimii M convin, deci răspunsul este 36 **3p**

b) Punctele de pe laturile lui P nu sunt situate în interiorul niciunui triunghi din T , deci nu pot fi centre de greutate ale unui astfel de triunghi **3p**

Fiecare dintre cele 16 puncte rămase este centrul de greutate al unui triunghi isoscel din T , cu baza de lungime 2 și înălțimea de lungime 3. Așadar, răspunsul este 16 **3p**

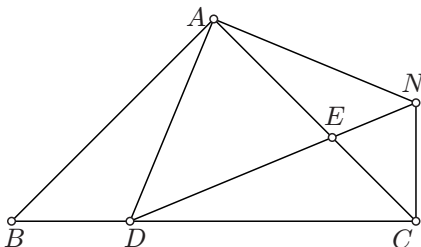
c) Fiecare punct care nu este vârf al lui P este mijlocul ipotenuzei de lungime 2 a unui triunghi dreptunghic din T , deci este centrul cercului circumscris acestui triunghi **3p**

Fiecare vârf al lui P este centrul unui cerc C de rază 5, care trece prin alte două vârfuri ale lui P . Deoarece $5^2 = 3^2 + 4^2$, C trece și printr-un punct al lui M situat în interiorul lui P , obținut prin parcurgerea pe orizontală a unei distanțe de 4 unități și, apoi, parcurgerea pe verticală a unei distanțe de 3 unități. Cum orice punct din M convine, răspunsul este 36 ... **6p**

Finalizare **1,5p**

Problema 3. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC$. Pe laturile (BC) și (AC) luăm punctele D , respectiv E , astfel încât $BD = CE < \frac{1}{2}BC$. Dreapta DE taie perpendiculara în C pe BC în punctul N . Presupunem că $AN = AD = DE$.

- a) Demonstrați că $AC = CD$.
b) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.



Soluție. a) În $\triangle ADB$ și $\triangle DEC$ avem $AD = DE$, $DB = EC$ și $\angle ABD = \angle DCE$ **6p**
Unghiul $\angle DEC$ este obtuz, deoarece are ca suplement un unghi de la baza triunghiului isoscel ADE . Unghiul $\angle ADB$ este obtuz, deoarece este unghi exterior pentru triunghiul dreptunghic ADM , unde M este mijlocul segmentului BC . Reiese că $\triangle ADB \equiv \triangle DEC$ (LLU). Rezultă că $DC = AB = AC$ **6p**

b) Am demonstrat că $\angle BAD = \angle CDE$. Avem $\angle ADC = \angle ABD + \angle BAD$ și $\angle ADC = \angle ADN + \angle CDE$, deci $\angle ABD = \angle ADN$. Rezultă că triunghiurile isoscele ABC și ADN au unghiurile respectiv congruente **6p**

Rezultă $\angle NAC = \angle BAD = \angle CDE$. În plus, $AN = DE$ și $AC = DC$, deci $\triangle NAC \equiv \triangle EDC$ (LUL). Deducem $\angle NCA = \angle ECD$, de unde $\angle ACD = 45^\circ$, ceea ce duce imediat la concluzia cerută **3p**

Finalizare **1,5p**

Observații. 1. La a), în locul cazului de congruență (LLU) se poate folosi un raționament bazat, de exemplu, pe ducerea înălțimilor din D și E în triunghiurile ADB , respectiv DEC . Și în acest caz este nevoie de argumentarea faptului că picioarele acestor perpendiculare sunt situate în interiorul laturilor pe care au fost duse.

2. O rezolvare completă a punctului b) bazată pe folosirea concluziei de la a) se notează cu cele 9 puncte corespunzătoare lui b).

Problema 4. Pentru n număr natural nenul considerăm mulțimea A_n a numerelor întregi având modulul mai mic sau egal cu n . Determinați pentru câte valori $n \leq 2026$ este îndeplinită condiția:

Mulțimea A_n poate fi împărțită în trei submulțimi disjuncte X, Y, Z având același număr de elemente, iar $s(X) = s(Y) = s(Z)$.

Am notat cu $s(M)$ suma elementelor mulțimii $M \subset \mathbb{Z}$.

Soluție. Numărul de elemente ale mulțimii A_n este $2n + 1$. Pentru ca partiționarea să fie posibilă, numărul total de elemente din A_n trebuie să fie un multiplu de 3. Reiese că n trebuie să fie de forma $n = 3k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}$. Pentru $k = 0$: $A_1 = \{-1, 0, 1\}$ și este evident că împărțirea nu este posibilă **6p**

Pentru $k = 1$: $A_4 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ și o partiție validă este $X = \{1, 3, -4\}$, $Y = \{-1, -3, 4\}$, $Z = \{-2, 0, 2\}$, deci $n = 4$ convine **6p**

Pentru $k \geq 2$, o partiție validă se obține împărțind mulțimea $\{\pm 5, \pm 6, \pm 7, \dots, \pm (3k + 1)\}$ în $3(k - 1)$ perechi de numere întregi opuse și adăugând câte $k - 1$ perechi la X, Y , respectiv Z . Astfel, orice n de forma $3k + 1$, $k \geq 1$ convine **6p**

$3k + 1 \leq 2026 \iff k \leq 675$, deci există exact 675 de valori convenabile ale lui n **3p**

Finalizare **1,5p**