

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Drobeta-Turnu Severin, 31 martie 2026

CLASA a V-a – soluții și bareme

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Un număr natural se numește *primsum* dacă este prim și se poate scrie ca suma a două numere naturale prime. Un număr natural se numește *primdif* dacă este prim și se poate scrie ca diferența a două numere naturale prime.

a) Determinați cel mai mare număr primsum de două cifre și cel mai mic număr primdif de trei cifre.

b) Determinați numerele care sunt simultan și de tip primsum, și de tip primdif.

Soluție. a) Deoarece suma și diferența a două numere naturale impare este număr par rezultă că un număr primsum se scrie ca suma dintre un număr prim și 2, iar un număr primdif de trei cifre se scrie ca diferența dintre un număr prim și 2.

Cel mai mic număr prim de trei cifre este $101 = 103 - 2$, deci cel mai mic număr primdif de trei cifre este 101 **3p**

Verificând cele mai mari numere prime de două cifre, găsim că cea mai mare pereche de două numere prime cu diferența egală cu 2 este cea formată din 71 și 73. În concluzie, cel mai mare număr primsum de două cifre este $73 = 71 + 2$ **3p**

b) Fie p un număr care este primsum. Atunci $p = q + r > 2$, cu q, r numere prime, implică p impar. Deci q sau r trebuie să fie număr par, așadar unul dintre ele este egal cu 2 **3p**

Dacă p este și primdif, deci $p = t - s$, unde t, s numere prime, obținem că s este par, deci $s = 2$ **3p**

Așadar, căutăm numerele p cu proprietatea că $p - 2$, p și $p + 2$ sunt simultan numere prime.

Dacă $p = M_3$, cum p este număr prim, obținem $p = 3$, dar $p - 2 = 1$ nu este prim, deci nu se poate **3p**

Dacă $p = M_3 + 1$, rezultă că $p + 2 = M_3 + 3 = M_3$. Dar $p + 2 > 3$, deci $p + 2$ nu este prim, nu se poate **3p**

Dacă $p = M_3 + 2$, rezultă că $p - 2 = M_3$. Însă $p - 2$ este prim, așadar $p - 2 = 3$. Cum $p + 2 = 7$, obținem $p = 5$ singurul număr care este simultan primsum și primdif. **3p**

Finalizare **1,5p**



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Drobeta-Turnu Severin, 31 martie 2026

Problema 2. Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$ cu proprietatea că, după eliminarea unei cifre, se obține un număr egal cu produsul cifrelor numărului $\overline{abc}$.

Soluție. Cum $a \cdot b \cdot c \geq 10$, rezultă că a, b și c sunt cifre nenule.

Observăm că, dacă cifrele distincte a, b, c au proprietatea că $a \cdot b \cdot c = \overline{ab}$, atunci există exact trei numere care verifică cerința problemei și se scriu folosind toate cele trei cifre – și anume $\overline{abc}$, $\overline{cab}$ și $\overline{acb}$, (*) **3p**

Din $a \cdot b \cdot c = \overline{ab}$ rezultă $a \cdot b \cdot c = 10 \cdot a + b$, de unde deducem că $a \mid b$ și $b \mid 10 \cdot a$ **3p**

Atunci $b = a \cdot k$, unde k număr natural nenul, și $a \cdot k \mid 10 \cdot a$, deci $k \mid 10$. Avem de analizat trei cazuri: $k = 5$, $k = 2$ și $k = 1$.

Cazul I: Pentru $k = 5$ avem $b = 5 \cdot a \Rightarrow a = 1$ și $b = 5$, de unde $c = 3$. Obținem soluțiile 153, 315, 135. **3p**

Cazul II: Pentru $k = 2$ avem $b = 2 \cdot a \Rightarrow a \cdot 2 \cdot a \cdot c = 12 \cdot a$, de unde $a \cdot c = 6$. Avem posibilitățile:

- dacă $a = 1$, atunci $c = 6$, $b = 2$, iar din observația (*) rezultă că numerele 126, 612, 162 sunt soluții ale problemei **3p**
- dacă $a = 2$, atunci $c = 3$, $b = 4$, cu soluțiile 234, 324, 243 **3p**
- dacă $a = 3$, atunci $c = 2$, $b = 6$, cu soluțiile 326, 362, 236 **3p**

Cazul III: Pentru $k = 1$ rezultă că $a = b$, deci $a \cdot a \cdot c = 11 \cdot a$, de unde rezultă $a \cdot c = 11$, imposibil dacă a și c sunt cifre **3p**

Observație: Pentru abordările de tipul ”eliminăm, pe rând, cifrele a, b , respectiv c ” se acordă **3 puncte** pentru demonstrația afirmației $k \mid 10$ și câte **6 puncte** analizei complete a fiecărui caz.

Finalizare **1,5p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Drobeta-Turnu Severin, 31 martie 2026

Problema 3. Aflați numerele naturale a și b , știind că $3^a + 3^b + 2$ este un cub perfect.

Soluție. Ne vom folosi de faptul că un cub perfect poate avea doar una dintre formele M_9 , $M_9 + 1$ sau $M_9 + 8$.

Putem presupune $a \geq b$. Analizăm cazurile:

I. $a \geq b \geq 2$, care implică $3^a = M_9$ și $3^b = M_9$, de unde rezultă $3^a + 3^b + 2 = M_9 + 2$, care nu este cub perfect **6p**

II. $a \geq 2, b \leq 1$. Atunci $3^a + 3^b + 2$ poate fi $M_9 + 5$ sau $M_9 + 3$, deci nu este cub perfect **6p**

III. $a = b = 1$, care implică $3^a + 3^b + 2 = 8 = 2^3$, cub perfect **6p**

IV. $a \leq 1, b = 0$. Obținem că $3^a + 3^b + 2$ este egal cu 4 sau cu 6, care nu sunt cuburi perfecte **3p**

Finalizare **1,5p**

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Națională, Drobeta-Turnu Severin, 31 martie 2026

Problema 4. Pe o tablă sunt scrise primele 22 de numere naturale nenule. Numim *mutare* alegerea a două numere de pe tablă, unul par și celălalt impar, ștergerea acestor numere de pe tablă și scrierea lor în propriul caiet.

Doi copii, Ana și Bogdan, joacă un joc, alternativ, începând cu Ana. Când îi vine rândul, fiecare jucător poate face fie una, fie două mutări, cu condiția să nu facă același număr de mutări în oricare două runde consecutive. Câștigător este acela care reușește ca, la finalul unei runde, suma numerelor scrise în caietul său să fie egală cu 100.

Arătați că unul dintre cei doi jucători are o strategie de câștig indiferent de alegerile făcute de celălalt jucător.

Soluție. Vom arăta că Ana are strategia câștigătoare. Pentru început, facem două observații:

1) La fiecare mutare, suma numerelor alese de către un jucător este număr impar **3p**

2) Niciunul dintre copii nu poate câștiga după doar două runde. Dacă vor începe cu o mutare în prima rundă, vor trebui să facă obligatoriu două mutări în cea de-a doua rundă, iar dacă încep cu două mutări în prima rundă, obligatoriu vor face o singură mutare în cea de-a doua. În concluzie, indiferent de alegerea făcută, după 2 runde, fiecare dintre copii va alege exact 3 perechi. Dar suma numerelor dintr-o pereche este impară, deci suma numerelor celor 3 perechi va fi tot număr impar, așadar diferită de 100 **6p**

Deoarece Ana începe jocul, ea poate alege să facă inițial o singură mutare. Astfel, va trebui să continue cu 2 mutări în cea de-a doua rundă și cu o mutare în cea de-a treia, ajung la un total de 4 perechi alese după primele 3 runde. Cum Bogdan nu poate câștiga jocul după doar 2 runde, Ana are șansa de a câștiga după 3 runde, dacă va reuși să însumeze 100 din cele 4 perechi selectate **3p**

Vom arăta că Ana are întotdeauna posibilitatea de a alege 4 perechi ce însumează 100.

Există 10 perechi de numere par-impar, dintre cele scrise pe tablă, a căror sumă este egală cu 25, și anume $25 = 22 + 3 = 21 + 4 = 20 + 5 = 19 + 6 = 18 + 7 = 17 + 8 = 16 + 9 = 15 + 10 = 14 + 11 = 13 + 12$ **3p**

Cum Bogdan alege exact 6 numere în primele 2 runde jucate, întotdeauna vor exista 4 perechi, dintre cele 10 menționate mai sus, disponibile pentru a fi alese de către Ana. Dar $25 \cdot 4 = 100$, deci Ana câștigă **6p**

Finalizare **1,5p**