IMAR 2026 — Enunţuri

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale nenule k exprimabile sub forma

$$k = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{abc},$$

unde a, b, c sunt numere naturale nenule.

Problema 2. Fie ABC un triunghi şi fie ω cercul său circumscris. Bisectoarea exterioară a unghiului $\angle BAC$ intersectează ω a doua oară în M şi biectoarea interioară a unghiului $\angle ACB$ în I. Fie D simetricul lui A în raport cu I. Cercul de diametru IM intersectează din nou ω în E. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului DEI se află pe dreapta BC.

Problema 3. Fixăm numrele întregi $a \geq 2$ şi $n \geq 2$ şi considerăm un polinom P de grad n cu coeficienţi complecşi. Arătaţi că există un număr natural nenul $q \leq n^2 + n + 1$, astfel încât $P(q)$ să nu fie o putere a lui a cu exponent natural.

Problema 4. Fie G un graf conex simplu cu n vârfuri. Presupunem că G are m arbori generatori, oricare doi fără nicio muchie comună. Arătaţi că G are cel puţin m^{n-1} arbori generatori.

Un *arbore generator* al lui G este un subgraf cu aceeaşi mulţime de vârfuri ca şi G, care are câte un drum unic între oricare două vârfuri distincte.