TESTUL 3, 2025

Problema 1. Melcul Turbo se află în celula din stânga jos a unui tablou $n \times n$, $n \geq 2$, şi vrea să ajungă în celula din dreapta sus, deplasându-se câte o celulă la dreapta sau câte o celulă în sus. Unele celule conţin monştri, vizibili lui Turbo, şi trebuie evitate. Presupunem că există un singur mod în care Turbo îşi poate atinge scopul. Determinaţi numărul minim de monştri pe care îi poate conţine un astfel de tablou. (Minimumul este peste toate configuraţiile care satisfac condiţia drumului unic.)

Problema 2. O colecţie finită C de numere reale (nu neapărat distincte) est *adecvată*, dacă C conţine două numere a şi b, astfel încât $a + b \neq s + 1$, unde s este suma tuturor numerelor din C; două astfel de numere a şi b formează o pereche *eligibilă*.

Fixăm un număr întreg $n \geq 2$. Pe o tablă sunt scrise n numere reale, distincte două câte două. Un *pas* constă în alegerea unei perechi eligibile (a, b) de numere de pe tablă (dacă există), ştergerea lor şi înlocuirea lor cu numărul

$$\frac{(a+b)(s+1) - a^2 - ab - b^2}{s - a - b + 1}.$$

(a) Arătaţi că există o succesiune de $n - 1$ paşi, astfel încât la fiecare etapă numerele de pe tablă să formeze o colecţie adecvată;
(b) Determinaţi numărul final de pe tablă în funcţie de numerele iniţiale.

Problema 3. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale este definit prin $a_1 = 1$ şi $a_n = (a_{n-1} + 1)^2$, pentru $n \geq 2$. Fie p un număr prim impar. Arătaţi că $a_{2p} - a_p$ are cel puţin p factori primi distincţi, doi câte doi.