

Al treilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 17 mai 2025

Problema 1. Fie ABC un triunghi cu $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle ACB$. Notăm cu X și Y mijloacele arcelor AB și BC ale cercului circumscris triunghiului ABC , care nu conțin punctele C , respectiv A .

Fie BL bisectoarea unghiului ABC , $L \in AC$. Știind că $\sphericalangle XLY = 90^\circ$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale. Notăm

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| \quad \text{și} \quad d = \max \{ |a_j - a_i| \mid 1 \leq i < j \leq n \}.$$

Demonstrați că

$$(n-1)d \leq S \leq \frac{n^2 d}{4}$$

și precizați când are loc egalitatea în fiecare dintre cele două inegalități.

Problema 3. Fie $n \geq 2$ și un tablou cu $n+1$ linii și n coloane în care, pe fiecare dintre primele n linii, Nicușor scrie, într-o anumită ordine, numerele $1, 2, \dots, n$. Apoi, el alege o permutare $a_1, a_2, \dots, a_n$ a numerelor $1, 2, \dots, n$ și completează ultima linie astfel: pentru fiecare $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, el scrie în celula de pe coloana j numărul de apariții ale lui a_j în celulele aflate la intersecția coloanei j cu liniile $1, 2, \dots, n$.

Determinați n pentru care Nicușor poate completa tabloul și poate alege $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât să obțină și pe ultima linie, într-o anumită ordine, numerele $1, 2, \dots, n$.

Problema 4. Determinați toate numerele naturale nenule a, b, c cu proprietatea că $ab + c$, $bc + a$ și $ca + b$ sunt puteri ale lui 2.

Problema 5. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu proprietatea că cercurile de diametre AB și CD sunt tangente exterior într-un punct M , diferit de punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului.

Notăm cu K al doilea punct de intersecție a cercului circumscris triunghiului AMC cu dreapta determinată de M și mijlocul segmentului AB , iar cu L al doilea punct de intersecție a cercului circumscris triunghiului BMD cu dreapta determinată de M și mijlocul segmentului CD .

Demonstrați că $|MK - ML| = |AB - CD|$.

Timp de lucru 4 ore și 30 de minute.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.