



Al doilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 30 aprilie 2025

Problema 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural și $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere întregi nenule astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 a_2 \dots a_n$.

Arătați că numărul $(a_1^2 - 1)(a_2^2 - 1) \dots (a_n^2 - 1)$ este pătrat perfect.

Problema 2. Considerăm un triunghi oarecare ABC cu centrul I al cercului înscris, iar I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC , tangente laturilor BC, CA , respectiv AB . Fie E, F și G punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA , respectiv AB .

Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor IEI_a, IFI_b, IGI_c mai au un punct comun diferit de punctul I .

Problema 3. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Ion desenează un poligon regulat cu n laturi și unește toate perechile de vârfuri. Pe fiecare segment, Ion scrie un număr natural nenul astfel încât, în orice triunghi, unul dintre numere este suma celorlalte două.

Determinați cel mai mic număr de valori distincte pe care le poate scrie Ion.

Problema 4. Determinați toate numerele naturale n cu proprietatea că $2^n - n^2 + 1$ este pătrat perfect.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.