

Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Buzău, 10 aprilie 2025

Problema 1. Spunem că un număr natural $n \geq 3$ este *aproape liber de pătrate* dacă există un număr prim p , $p \equiv 1 \pmod{3}$, astfel încât n este divizibil cu p^2 , iar numărul $\frac{n}{p}$ este liber de pătrate (adică nu este divizibil cu pătratul niciunui număr prim).

Arătați că, pentru orice număr natural n , aproape liber de pătrate, raportul dintre dublul sumei divizorilor lui n și numărul divizorilor lui n este număr natural.

Problema 2. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $\angle BAC > 90^\circ$, și cercul $\mathcal{C}$ de centru A și rază AC . Notăm cu M mijlocul laturii AC . Dreapta BM intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}$ în D . Fie E un punct pe cercul $\mathcal{C}$ astfel încât $BE \perp AC$ și $DE \cap AC = \{N\}$. Arătați că $AN = 2 \cdot AB$.

Problema 3. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Ana alege numerele naturale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$ și, pentru fiecare submulțime nevidă $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$, calculează suma $s_A = \sum_{k \in A} a_k$, apoi ordonează crescător aceste sume, obținând șirul $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{2^n-1}$.

Arătați că există o submulțime $B \subset \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, cu $2^{n-2} + 1$ elemente, astfel încât, indiferent care sunt numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ alese de Ana, acestea pot fi determinate cunoscând toate valorile s_i , $i \in B$.

Problema 4. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex în care triunghiurile ABC și DEF sunt echilaterale, iar diagonalele AD , BE , CF sunt concurente. Demonstrați că $AC \parallel DF$ sau $BE = AD + CF$.

Problema 5. Fie $n \geq 3$ un număr natural și $\mathcal{F}$ o familie cu cel mult n submulțimi distincte ale mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ cu proprietatea că putem să considerăm în plan n puncte distincte în care sunt scrise numerele $1, 2, \dots$, respectiv n și să desenăm segmente între unele dintre acestea astfel încât, pentru orice numere distincte $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, punctele în care sunt scrise numerele i și j sunt conectate printr-un segment dacă și numai dacă numărul i se află în exact j submulțimi din $\mathcal{F}$.

Aflați valoarea maximă pe care o poate lua suma numerelor de elemente ale mulțimilor din $\mathcal{F}$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.