Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care $ab+bc+ca$ este un număr prim p și p divide numărul $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Soluție. Avem $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$ **2p**

Astfel, p trebuie să dividă $abc(a+b+c)$ **1p**

Deoarece p este prim, trebuie ca $p \mid a$, $p \mid b$, $p \mid c$ sau $p \mid (a+b+c)$ **2p**

Primele trei situații sunt imposibile, deoarece $a,b,c<p$. A patra situație este posibilă doar dacă $a=b=c=1$. Acest caz convine **2p**

Problema 2. Fie a, b, c numere reale strict pozitive, astfel încât

$$\left\{\frac{a}{b+c}\right\}=\left\{\frac{b}{c+a}\right\}=\left\{\frac{c}{a+b}\right\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

a) Arătați că cel puțin două dintre numerele a, b, c sunt egale.

b) Arătați că, dacă a, b, c sunt numere raționale, atunci $a=b=c$.

Soluție. a) Datorită simetriei ipotezei, putem presupune, fără a pierde generalitatea, că $a \leqslant c$ și $b \leqslant c$. Atunci $0<\dfrac{a}{b+c}<1$ și $0<\dfrac{b}{c+a}<1$. Obținem $\left\{\dfrac{a}{b+c}\right\}=\dfrac{a}{b+c}$, $\left\{\dfrac{b}{a+c}\right\}=\dfrac{b}{a+c}$, $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$, $(a-b)(a+b+c)=0$, $a=b$ **3p**

b) Cu presupunerea de la a), obținem $a=b$, iar ipoteza duce la $\dfrac{c}{2a}=\dfrac{a}{a+c}+n$, cu n număr natural **1p**

Ultima relație duce la $c^2+c(a-2an)-2a^2-2a^2n=0$. Discriminantul ecuației este $D=a^2(4n^2+4n+9)$. Deoarece a și c sunt raționale, numărul $4n^2+4n+9$ trebuie să fie un pătrat perfect k^2, cu k natural. Reiese $8=k^2-(2n+1)^2$, $k-(2n+1)=2$ și $k+(2n+1)=4$ (singura posibilitate), $n=0$, $c=a$ **3p**

Problema 3. Fie a un număr real pentru care numărul $a+a^2+a^3$ este întreg. Arătați că, dacă unul dintre numerele a, a^2 sau a^3 este rațional, atunci a este număr întreg.

Soluție. Fie $a+a^2+a^3=n$, cu n număr întreg.

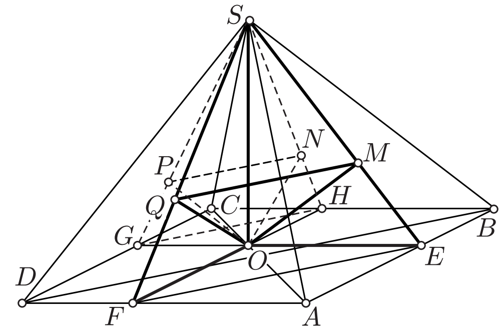
Dacă a este rațional, atunci $a=\dfrac{p}{q}$, cu p, q numere întregi, coprime. Rezultă $\dfrac{p}{q}+\dfrac{p^2}{q^2}+\dfrac{p^3}{q^3}=n$, de unde $q^2p+qp^2+p^3=q^3n$, deci $q \mid p^3$. Aceasta nu se poate decât dacă $q=\pm1$, ceea ce arată că $a=\pm p=$număr întreg **2p**

Dacă a^2 este rațional, atunci $a+a^3=n-a^2$ duce la $a^2+2a^4+a^6=n^2-2a^2n+a^4$, deci $a^2(1+2n)+a^4+a^6=n^2$. Un raționament analog cu cel din paragraful precedent, aplicat acestei egalități, arată că a^2 este întreg, deci a este întreg **2p**

Dacă $a^3=r$ este rațional, atunci $a+a^2=n-a^3$ este rațional. Rezultă că $a^2+2a^3+a^4$ este rațional, deci a^2+ra este rațional. Deducem că $a^2+ra-(a^2+a)=(r-1)a$ este rațional.

Dacă $r\neq1$, atunci a este rațional, deci, conform primei părți, a este întreg. Dacă $r=1$, atunci $a^3=1$, deci $a=1\in\mathbb{Z}$ **3p**

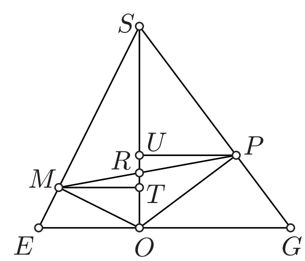
Problema 4. Într-un punct O din interiorul pătratului $ABCD$ se ridica perpendiculara OS. Fie M, N, P, Q proiecțiile punctului O pe planele (SAB), (SBC), (SCD), respectiv (SDA). Demonstrați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare dacă și numai dacă O se află pe una dintre diagonalele pătratului.



Soluție. Presupunem că O se află, de exemplu, pe diagonala AC. Fie $OE \perp AB$, $E \in AB$ și $OF \perp AD$, $F \in AD$. Atunci avem succesiv $OE = OF$, $\triangle SOE \equiv \triangle SOF$ (C.C.), $SE = SF$. Apoi $M \in SE$ și $OM \perp SE$, $Q \in SF$ și $OQ \perp SF$, $\triangle SOM \equiv \triangle SOQ$, $SM = SQ$, $\dfrac{SM}{SE} = \dfrac{SQ}{SF}$, $QM \parallel EF$, deci $QM \parallel BD$. Analog avem $NP \parallel BD$, deci $QM \parallel NP$ și punctele M, N, P, Q sunt coplanare **2p**

Reciproc, presupunem că M, N, P, Q sunt coplanare, într-un plan α. Fie $OG \perp CD$, $G \in CD$ și $OH \perp BC$, $H \in BC$. Atunci E, O, G sunt coliniare, deci SE, SO, SG sunt coplanare. Rezultă că SO și MP sunt coplanare, iar $SO \cap MP$ coincide cu $SO \cap \alpha$. Analog $NQ \cap SO$ coincide cu $SO \cap \alpha$, deci MP și NQ taie SO în același punct R **1p**

Calculăm raportul în care punctul R împarte OS, în funcție de OS, OE și OG.



Fie $MT \perp OS$, $PU \perp OS$, $U, T \in OS$. Din patrulaterul inscriptibil $MOPS$ obținem $\triangle MSR \sim \triangle OPR$, deci $\dfrac{MS}{OP} = \dfrac{MR}{OR} = \dfrac{SR}{PR}$, de unde $\dfrac{MS^2}{OP^2} = \dfrac{SR}{OR} \cdot \dfrac{MR}{PR} = \dfrac{SR}{OR} \cdot \dfrac{MT}{PU}$.

Rezultă $\dfrac{SR}{OR} = \dfrac{PU}{MT} \cdot \dfrac{MS^2}{OP^2} = \dfrac{PS \cdot PO \cdot MS^2}{MO \cdot MS \cdot PS \cdot PG} = \dfrac{PO}{PG} \cdot \dfrac{MS}{MO}$.
Dar $\dfrac{PO}{PG} = \operatorname{tg} \angle SGO = \dfrac{SO}{OG}$ și $\dfrac{MS}{MO} = \operatorname{ctg} \angle MSO = \dfrac{SO}{OE}$, deci

$$\frac{SR}{OR} = \frac{SO^2}{OE \cdot OG}.$$ **2p**

Deoarece NQ taie OS tot în R, obținem $OE \cdot OG = OF \cdot OH$. Pe de altă parte, $OE + OG = l = OF + OH$, unde $l = AB = AD$. Rezultă $OE(l - OE) = OF(l - OF)$, apoi $(OE - OF)(l - OE - OF) = 0$, deci $(OE - OF)(OH - OE) = 0$. Astfel $OE = OF$ sau $OE = OH$, ceea ce implică $O \in AC$ sau $O \in BD$ **2p**