Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a VII-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie r un număr rațional pozitiv, astfel încât numerele r și $\sqrt{r+1}$ să aibă aceeași parte fracționară. Arătați că numărul r este întreg.

Soluție. Ipoteza spune că $\sqrt{r+1}-r=a$, cu a număr întreg **2p**

Obținem $r+1=r^2+2ra+a^2$ **2p**

Fie $r=\dfrac{m}{n}$, cu $m,n\in\mathbb{N}^*$ și $(m,n)=1$ **1p**

Atunci $mn+n^2=m^2+2mna+a^2n^2$, deci $m^2=n(m+n-2ma-a^2n)$. Rezultă că m^2 se divide cu n, ceea ce nu se poate decât dacă $n=1$. Reiese $r=m\in\mathbb{N}$ **2p**

Problema 2. Considerăm numerele reale strict pozitive m, n, a, b, c astfel încât $m>n$ și

$$|ma-nb|\leqslant c(m-n),\quad |mb-nc|\leqslant a(m-n),\quad |mc-na|\leqslant b(m-n).$$

Demonstrați că $a=b=c$.

Soluție. Prin adunarea relațiilor date rezultă $|ma-nb|+|mb-nc|+|mc-na|\leqslant(m-n)(a+b+c)=|(m-n)(a+b+c)|=|(ma-nb)+(mb-nc)+(mc-na)|$. Deducem că printre numerele $x=ma-nb$, $y=mb-nc$ și $z=mc-na$ nu există două cu semne opuse, iar inegalitățile din ipoteză sunt egalități **3p**

Dacă $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, $z\leqslant 0$, atunci $ma\leqslant nb$, $mb\leqslant nc$, $mc\leqslant na$. Prin înmulțire obținem $m^3abc\leqslant n^3abc$, de unde $m^3\leqslant n^3$ – imposibil **1p**

Dacă $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, atunci $ma-nb=c(m-n)$ și analoagele, deci

$$m(a-c)=n(b-c),\ m(b-a)=n(c-a),\ m(c-b)=n(a-b)\quad (*).$$

Dacă toate parantezele din (*) au valori nenule, atunci $a-c$ și $b-c$, $b-a$ și $c-a$, $c-b$ și $a-b$ au același semn, în contradicție cu $(a-c)(b-a)(c-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$. Rezultă că măcar una este nulă, de exemplu, $a-c=0$. Atunci $b-c=0$, de unde $a=b=c$ **3p**

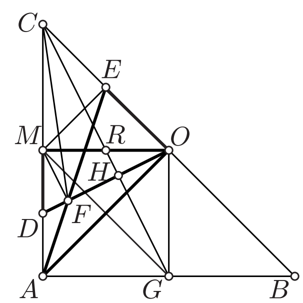
Altă soluție. Avem $ma-nb\leqslant|ma-nb|\leqslant c(m-n)$ și analoagele. Prin adunare rezultă că $(m-n)(a+b+c)\leqslant|ma-nb|+|mb-nc|+|mc-na|\leqslant(m-n)(a+b+c)$, deci avem egalitate peste tot **3p**

Atunci avem $(ma-nb)^2=(mc-nc)^2$ și analoagele. Prin adunarea acestor relații rezultă, în urma efectuării calculelor, $2mn(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$, adică $mn[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$, de unde $a=b=c$ **4p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi drepunghic isoscel, O mijlocul ipotenuzei BC, E mijlocul segmentului CO, M mijlocul segmentului AC și D mijlocul segmentului AM. Fie F intersecția dreptelor OD și AE.

a) Arătați că $MF\perp OD$.

b) Arătați că $FC=OC$.



Soluție. a) *Varianta* 1. Deoarece $ME\perp OC$, avem de arătat că patrulaterul $MEOF$ este inscriptibil, (1) **1p**

Cum $ME\parallel AO$, deci $\sphericalangle MEF=\sphericalangle OAE$, rămâne de arătat că $\sphericalangle MOD=\sphericalangle OAE$ **1p**

Această ultimă egalitate rezultă din $\triangle MOD\sim\triangle OAE$: $\sphericalangle DMO=\sphericalangle EOA=90^\circ$ și $\dfrac{DM}{MO}=\dfrac{EO}{OA}=\dfrac{1}{2}$, (2) **2p**

Varianta 2. Din teorema lui Menelaus în $\triangle CDO$ tăiat de transversala $A-F-E$ rezultă $\dfrac{DF}{FO}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{1}{4}$ **1p**

Fie $AB = 4a$. În $\triangle MDO$ avem $MD = a$, $MO = 2a$, deci $DO = a\sqrt{5}$ și $DF = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ **1p**

Rezultă că $DO \cdot DF = MD^2$ și, din reciproca teoremei catetei, rezultă $MF \perp DO$ **2p**

Varianta 3. $\triangle CAE \sim \triangle AOD$, deoarece $\sphericalangle ACE = \sphericalangle OAD = 45°$, $\dfrac{CA}{CE} = 2\sqrt{2} = \dfrac{OA}{AD}$. Atunci $\sphericalangle AOD = \sphericalangle CAE = \sphericalangle DAF$ **2p**

Atunci $\triangle DAF \sim \triangle DOA$ (U.U.) și deci $MD^2 = DA^2 = DF \cdot DO$. Din reciproca teoremei catetei rezultă concluzia **2p**

b) *Varianta* 1. Fie G, R mijloacele segmentelor AB, respectiv MO. Cum $CMGO$ este paralelogram, R este mijlocul lui CG **1p**

Cum patrulaterul $EMFO$ este inscriptibil, rezultă $\sphericalangle EFO = \sphericalangle EMO = 45° = \sphericalangle OBA$, deci patrulaterul $ABOF$ este inscriptibil, centrul cercului circumscris fiind G. Atunci $GF = GO$ (raze), $RF = RO$ (RF este mediană în triunghiul dreptunghic FOM), deci RG este mediatoarea lui $[OF]$. Cum $C \in RG$, avem $CF = CO$ **2p**

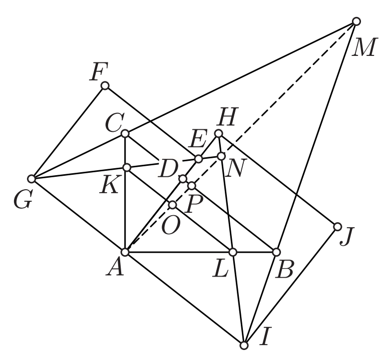
Varianta 2. Fie G mijlocul segmentului AB. Analog cu (2), $\triangle MOD \sim \triangle ACG$, deci $\sphericalangle ACG + \sphericalangle CDO = \sphericalangle MOD + \sphericalangle CDO = 90°$, de unde $CG \perp OD$ **1p**

Fie $H = CG \cap OD$. Atunci $OG \parallel CD$ implică $\dfrac{OH}{HD} = \dfrac{OG}{CD} = \dfrac{2}{3}$, deci $\dfrac{OH}{OD} = \dfrac{2}{5}$. Pe de altă parte, în triunghiul dreptunghic MOD avem $OM = 2MD$, $OD = MD\sqrt{5}$, $OF = \dfrac{OM^2}{OD} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}MD$, deci $\dfrac{OF}{OD} = \dfrac{4}{5}$. Rezultă că H este mijlocul segmentului OF, deci CH este înălțime și mediană în $\triangle COF$, de unde concluzia **2p**

Problema 4. Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A și înălțimea sa AD, $D \in BC$. Pe semidreapta $[AD$ luăm punctele E și H astfel încât $AE = AC$ și $AH = AB$. Considerăm pătratele $AEFG$ și $AHJI$ care conțin în interiorul lor punctele C, respectiv B. Dreptele EG și AC se intersectează în K, IH și AB în L, IL și GK în N, iar IB și GC în M. Demonstrați că:

a) $LK \parallel BC$;

b) punctele A, N și M sunt coliniare.



Soluție. a) Avem $\triangle AGK \sim \triangle AHL$, (1), deoarece $\sphericalangle AGK = \sphericalangle AHL = 45°$ și $\sphericalangle GAK = 90° - \sphericalangle CAD = \sphericalangle HAL$. Rezultă $\dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AG}{AH}$. Cum $AG = AE = AC$ și $AH = AB$, deducem $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AL}{AB}$, deci $LK \parallel BC$ **3p**

b) *Varianta* 1. Din (1) rezultă că $\sphericalangle AKG = \sphericalangle ALH$, deci patrulaterul $ALNK$ este inscriptibil. Reiese $\sphericalangle NAK = \sphericalangle NLK = \sphericalangle NIG = 45°$, ceea ce arată că AN este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ **2p**

Bisectoarea unghiului ABC este paralelă cu bisectoarea unghiului BAI, care este și înălțime în $\triangle BAI$. Rezultă că BM este bisectoarea exterioară din B a triunghiului ABC; analog, CM este bisectoarea exterioară din C a triunghiului ABC. Rezultă că M este centrul cercului $A-$exînscris în triunghiul ABC, deci M se află pe AN .. **2p**

Varianta 2. Fie O intersecția dreptelor KL și AN. Avem A, G, I coliniare, $DA \perp GI$ și $DA \perp BC$, deci $GI \parallel BC \parallel KL$. Rezultă $\dfrac{OK}{OL} = \dfrac{AG}{AI} = \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{AK}{AL}$; conform reciprocei teoremei bisectoarei, $[AO$ este bisectoarea unghiului LAK **2p**

Fie P intersecția dreptelor AM și BC. Atunci $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{AG}{AI} = \dfrac{AC}{AB}$, deci AP este bisectoarea unghiului BAC. Rezultă că M și N se află pe bisectoarea unghiului BAC, ceea ce arată că A, M, N sunt coliniare **2p**