Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a V-a – soluţii şi bareme

Problema 1. Un număr natural nenul, mai mic sau egal cu 2025, se numește *interesant* dacă este pătrat perfect și *fantastic* dacă restul împărțirii acelui număr la 45 este 0.

a) Determinați numărul numerelor care sunt interesante.

b) Determinați numărul numerelor care sunt și interesante și fantastice.

c) Determinați numărul numerelor naturale, cel mult egale cu 2025, care nu sunt nici interesante și nici fantastice.

Soluţie. a) Din $45^2 = 2025$, rezultă că numerele interesante sunt 1^2, 2^2, 3^2, $\ldots$, 45^2, deci sunt 45 de numere interesante **2p**

b) Numerele fantastice sunt $1 \cdot 45, 2 \cdot 45, 3 \cdot 45, \ldots, 45 \cdot 45$, deci sunt 45 numere fantastice **1p**

Din $45 = 5 \cdot 3^2$, rezultă că numerele fantastice care sunt și interesante sunt $5 \cdot 45 = 15^2$, $2^2 \cdot 5 \cdot 45 = 30^2$ şi $3^2 \cdot 5 \cdot 45 = 45^2$, deci sunt 3 numere care sunt și interesante și fantastice **2p**

c) Numărul numerelor care sunt interesante sau fantastice este $45 + 45 - 3 = 87$, deci numărul numerelor naturale cel mult egale cu 2025, care nu sunt nici interesante și nici fantastice, este $2026 - 87 = 1939$ **2p**

Problema 2. Alexia are mai multe bile, iar prietena ei Cristina nu are nicio bilă. În fiecare zi a unei săptămâni, începând cu ziua de luni, Alexia dăruiește Cristinei câteva dintre bile. În fiecare zi, Alexia dăruiește mai multe bile decât în ziua precedentă.

Alexia a dăruit luni de cinci ori mai puține bile decât vineri, marți a dăruit de șase ori mai puține bile decât sâmbătă, iar miercuri a dăruit de șapte ori mai puține bile decât duminică.

Duminică, la sfârșitul săptămânii, Cristina are 72 de bile.

Determinați câte bile a dăruit Alexia joi prietenei sale.

Soluţie. Notăm $a_1, a_2, \ldots, a_7$ numărul de bile dăruite de Alexia de luni până duminică, unde $1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ și $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 72$.

Din datele problemei, rezultă că $a_5 = 5a_1$, $a_6 = 6a_2$, $a_7 = 7a_3$, deci $6a_1 + 7a_2 + 8a_3 + a_4 = 72$, (1). **1p**

Dacă $a_1 \geqslant 3$, atunci $6a_1 + 7a_2 + 8a_3 + a_4 \geqslant 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 6 = 92$, contradicție cu (1). Așadar, $a_1 = 1$ sau $a_1 = 2$ **2p**

Dacă $a_1 = 1$, atunci $a_5 = 5$, iar din $a_1 = 1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = 5$ deducem că $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ și $a_4 = 4$, deci $6a_1 + 7a_2 + 8a_3 + a_4 = 48$, contradicție cu (1). Așadar, $a_1 = 2$ **2p**

Cum $a_5 = 5a_1 = 10$, rezultă că $2 = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = 10$. În plus, din (1) obținem $7a_2 + 8a_3 + a_4 = 60$, (2).

Dacă $a_2 \geqslant 4$, atunci $7a_2 + 8a_3 + a_4 \geqslant 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 6 = 74$, contradicție cu (1), deci $a_2 \leqslant 3$. Cum $a_2 > a_1 = 2$, rezultă că $a_2 = 3$. **1p**

Din (2) obținem $8a_3 + a_4 = 39$, deci $8a_3 < 39$, de unde rezultă că $a_3 \leqslant 4$. Dar $a_3 > a_2 = 3$, deci $a_3 = 4$, iar din $8a_3 + a_4 = 39$ rezultă că $a_4 = 7$, care verifică relația $a_4 < 10$. Așadar, joi, Alexia a dăruit Cristinei 7 bile **1p**

Problema 3. Determinați numerele prime a, b, c, d, cu $a \leqslant b$ și $c \leqslant d$, care verifică simultan condiţiile:
(1) $a + b = c + d + 1$;
(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3543$.

Soluţie. Întrucât $c + d$ și $a + b$ sunt numere naturale consecutive, suma lor, $a+b+c+d$, este număr impar. Rezultă că fie exact trei dintre numerele a, b, c, d sunt pare, deci, fiind prime, sunt egale cu 2, fie exact unul dintre a, b, c, d este par, egal cu 2.

Dacă trei dintre numerele a, b, c, d sunt egale cu 2, din relația (2) rezultă că pătratul celui de-al patrulea număr este 3531, fals, deoarece 3531 nu este pătrat perfect. Ca urmare, exact unul dintre numerele a, b, c, d este egal cu 2, iar din $a \leqslant b$ și $c \leqslant d$, rezultă că fie $a = 2$, fie $c = 2$. **2p**

Renotând cu x, y, z cele trei numere diferite de 2 dintre a, b, c și d, din relația (2) rezultă că $x^2 + y^2 + z^2 = 3539$.

Deoarece un pătrat perfect are forma M_3 sau $M_3 + 1$, iar $3539 = M_3 + 2$, unul dintre numerele x^2, y^2, z^2 este multiplu de 3, iar celelalte două au forma M_3+1. Așadar, unul dintre numerele x, y, z este multiplu de 3, iar cum x, y, z sunt prime, rezultă că unul dintre aceste numere este egal cu 3. .... **2p**

Presupunând, de exemplu, că $z = 3$, obținem $x^2 + y^2 = 3530$.

Dacă $x \leqslant 41$ și $y \leqslant 41$, atunci $x^2+y^2 \leqslant 2\cdot 41^2 = 3362 < 3530$, nu convine. Deci cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 43, fie acesta x.

Dacă $x \geqslant 61$, atunci $x^2 + y^2 > 61^2 = 3721 > 3530$, deci $43 \leqslant x \leqslant 59$. Așadar, x poate fi doar 43, 47, 53 sau 59. .... **2p**

Analizând cele patru variante, pentru $x = 47$ și $x = 53$ nu obținem soluții, pentru $x = 43$ obținem $y = 41$, iar pentru $x = 59$ obținem $y = 7$, deci numerele a, b, c, d pot fi 2, 3, 41, 43 sau 2, 3, 7, 59 (nu neapărat în această ordine).

Având în vedere relația (1), deducem că problema are o singură soluție: $a = 2$, $b = 43$, $c = 3$, $d = 41$ **1p**

Soluția 2. Ca la soluția 1, se arată că unul dintre numerele a și c este egal cu 2, iar celelalte numere sunt mai mari sau egale cu 3 .... **2p**

Cazul I: $a = 2$. Din relația (2) obținem $b^2 + c^2 + d^2 = 3539$. Deoarece un pătrat perfect are forma M_3 sau $M_3 + 1$, iar $3539 = M_3 + 2$, deducem că unul dintre numerele b^2, c^2, d^2 este multiplu de 3, iar celelalte două au forma $M_3 + 1$. Așadar, unul dintre numerele b, c, d este multiplu de 3, iar cum b, c, d sunt prime, rezultă că numărul respectiv este egal cu 3. .... **2p**

Folosind relația (1), pentru $b = 3$ obținem $c = d = 2$, iar pentru $d = 3$, din $d \geqslant c$, rezultă $c = 3$, $b = 5$. În ambele cazuri, nu se verifică relația (2).

Dacă $c = 3$, atunci $b = d + 2$, iar din (2) obținem $d^2 + (d+2)^2 = 3530$, (3). Reiese că $2d^2 < 3530$, de unde $d^2 < 1765 < 43^2$, deci $d \leqslant 42$. Ţinând cont că d este prim, se verifică ușor că pentru $d = 41$ se verifică egalitatea (3), iar pentru $d \leqslant 37$ nu se verifică, întrucât $d^2 + (d+2)^2 \leqslant 37^2 + 39^2 = 2890$.

Așadar, în acest caz, obținem soluția $a = 2$, $b = 43$, $c = 3$, $d = 41$ ... **2p**

Cazul II: $c = 2$. Din relația (2) obținem $a^2 + b^2 + d^2 = 3539$. Analizând din nou după resturile împărțirii la 3 ale unui pătrat perfect, ca mai sus, deducem că exact unul dintre numerele a, b, d este egal cu 3. .... **(∗)**

Acest număr nu poate fi b (ar rezulta că și $a = 3$), nici d (deoarece din relația (1) ar reieși că $a + b = 6$, deci $a = b = 3$). Dacă $a = 3$, din (1) obținem $b = d$, iar din (2) rezultă că $2d^2 = 3530$, adică $d^2 = 1765$, imposibil, deoarece 1765 nu este pătrat perfect.

În consecință, în acest caz nu se obțin soluții, deci singura soluție a problemei este $a = 2$, $b = 43$, $c = 3$, $d = 41$ **1p**

Notă. Pentru justificarea afirmației **(∗)** de la cazul II, în situația în care afirmația similară de la cazul I nu a fost justificată, se acordă **2p**.

Problema 4. Spunem că un număr natural nenul este *special* dacă atât suma cifrelor sale, cât și suma cifrelor succesorului său sunt divizibile cu 11.

a) Determinați ultimele cinci cifre ale unui număr special.

b) Arătați că există o infinitate de numere speciale.

Soluţie. a) Notăm cu $s(m)$ suma cifrelor unui număr natural nenul m. Fie $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}$ un număr special de $k \geqslant 1$ cifre. Din ipoteză, $11 \mid s(n)$ și $11 \mid s(n+1)$.

Dacă $a_1 \leqslant 8$, atunci $n+1 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 (a_1+1)}$, deci $s(n+1) = s(n)+1$. Ca urmare, dacă $s(n) = M_{11}$, atunci $s(n+1) = M_{11}+1$, fals. În consecință, $a_1 = 9$ **1p**

Dacă $a_2 \leqslant 8$, atunci $n+1 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots (a_2+1)0}$, deci $s(n+1) = s(n) + 1 - a_1 = s(n) - 8$. Ca urmare, dacă $s(n+1) = M_{11}$, atunci $s(n) = M_{11}+8$, fals. Deducem că $a_2 = 9$ **1p**

Presupunem că ultimele p cifre ale lui n sunt egale cu 9, iar prima cifră diferită de 9 a lui n, în scrierea de la stânga la dreapta, se află pe poziția $p+1$. Așadar, $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_{p+1} 99 \ldots 9}$ și $n+1 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots (a_{p+1}+1) 00 \ldots 0}$, deci $s(n) = a_k + a_{k-1} + \ldots + a_{p+1} + 9p$, iar $s(n+1) = a_k + a_{k-1} + \ldots + a_{p+1} + 1$.

Deducem că $s(n) = s(n+1) + 9p - 1$, de unde rezultă că $9p - 1$ este multiplu de 11. Cel mai mic astfel de număr p este $p = 5$, deci ultimele cinci cifre ale unui număr special sunt toate egale cu 9 .... **3p**

b) Conform punctului a), numerele speciale au forma $n = m \cdot 10^5 + 99\,999$, unde m este un număr natural convenabil ales. Deoarece $s(n) = s(m) + 45$ și $45 = M_{11}+1$, este suficient să găsim numere m, având ultima cifră diferită de 9, cu proprietatea că $s(m) = 11 \cdot t - 1$, unde t este număr natural nenul. În particular, pentru $t = 1$, numerele de forma $m = 2 \cdot 10^q + 8$, cu $q \geqslant 1$, au suma cifrelor 10.

Așadar, pentru orice $q \geqslant 1$, numărul natural $n = 2 \cdot 10^{q+5} + 899\,999 = \overline{2\underbrace{00\ldots0}_{q-1 \text{ cifre}}899\,999}$ este special, deci există o infinitate de numere speciale **2p**