

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**ETAPA LOCALĂ – VRANCEA****9 februarie 2025****CLASA a XI-a****SUBIECTUL 1.**

a) Fie $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \alpha^n - \beta^n \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^{2025} = \begin{pmatrix} 2025 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL 2.

a) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{C}$ are loc egalitatea

$$\det(A + xB) = \det(A) + (Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(A \cdot B)) \cdot x + \det(B) \cdot x^2.$$

b) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, cu $A \cdot B = B \cdot A$ și $\det(A^2 + B^2) = 0$.

Demonstrați că $Tr(A) \cdot Tr(B) = Tr(A \cdot B)$.

(pentru $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ avem $Tr(X) = x_{11} + x_{22}$)

Suplimentul G.M. 11/2024

SUBIECTUL 3.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{10} + \frac{5 + (-1)^n}{2}$, pentru orice $n \geq 0$.

a) Arătați că $(x_{2n})_{n \geq 0}$ este convergent și determinați limita sa.

b) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

SUBIECTUL 4.

Fie $L_n = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze L_1, L_2, L_{2025} .

NOTĂ:

- Timp de lucru 3 ore.
- Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

Propunători:

Prof. Cornel Noană, Colegiul Național "Unirea"

Prof. Mohonea Marius, Colegiul Național "Unirea"