

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 2.02.2025 –

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AX = XA\}$.

4p a) Dacă $X \in G$, arătați că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$;

3p b) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = A$.

SUBIECTUL 2

2p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos px}{x^2}$, unde p este un număr real nenul.

5p b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{q} - 1 \right)$, știind că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} px - \sin px}{\operatorname{tg} qx - \sin qx} = \frac{1}{27}$, unde p și q sunt numere reale pozitive.

SUBIECTUL 3

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $na_n a_{n+1} = n + a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = a_n^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4p a) Studiați monotonia, mărginirea și convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

3p b) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Profesor Petre Năchilă

SUBIECTUL 4

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2023 & 2024 & 2024 \\ 2024 & 2023 & 2024 \\ 2024 & 2024 & 2023 \end{pmatrix}$. Arătați că numărul $\operatorname{Tr}(A^{2024} - I_3)$ este

divizibil cu 2024, unde $\operatorname{Tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei pătratică X .

Supliment GAZETA MATEMATICĂ

Notă: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.