

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 02.02.2025 –

Clasa a VIII-a

## SUBIECTUL 1

Se consideră relația:

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + 5} + \sqrt{y^6 - 16y^3 + 68} + |x^2 - y + z - \sqrt{2}| = 3$$

4p a) Determinați numerele reale pozitive  $x$ ,  $y$  și  $z$  care verifică relația.3p b) Verificați dacă numărul  $\left(\frac{x+z}{y}\right)^{2025}$  este rațional.

\*\*\*

*Soluție:*

$$a) \sqrt{(x^2 - 2)^2 + 1} + \sqrt{(y^3 - 8)^2 + 4} + |x^2 - y + z - \sqrt{2}| = 3 \quad 1p$$

$$\text{Cum } \sqrt{(x^2 - 2)^2 + 1} \geq 1, \sqrt{(y^3 - 8)^2 + 4} \geq 2 \text{ și } |x^2 - y + z - \sqrt{2}| \geq 0 \quad 1p$$

$$\text{obținem } x^2 - 2 = 0 \text{ și } y^3 - 8 = 0 \text{ deci } x = \sqrt{2}, y = 2 \text{ și } z = \sqrt{2} \quad 2p$$

$$b) \left(\frac{x+z}{y}\right)^{2025} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^{2025} = (\sqrt{2})^{2025} = \quad 2p$$

$$2^{1012} \sqrt{2} \text{ care este irațional.} \quad 1p$$

\*\*\*

## SUBIECTUL 2

Fie ABCDEF o prismă triunghiulară regulată și punctele M, N, P pe muchiile AD, BE respectiv CF, astfel încât  $MN \parallel AB$ . Fie  $\{T\} = AP \cap CM$  și  $\{S\} = BP \cap CN$ . Arătați că :

3p a)  $TS \parallel (ABE)$ ;4p b)  $(FMN) \parallel (ABP)$  dacă și numai dacă  $BN = FP$ .

\*\*\*

*Soluție:*

a)  $MN \parallel AB, AM \parallel BN \Rightarrow AMBN$  este dreptunghi  $\Rightarrow AM \equiv BN$  1p

$$AM \parallel CP \Rightarrow \triangle TAM \sim \triangle TPC \Rightarrow \frac{TA}{TP} = \frac{AM}{PC} = \frac{TM}{TC} \quad 1p$$

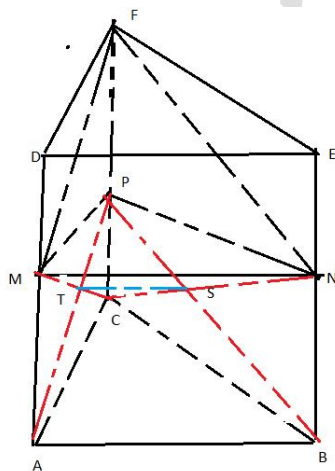
$$BN \parallel CP \Rightarrow \triangle SBN \sim \triangle SPC \Rightarrow \frac{SB}{SP} = \frac{BN}{PC} = \frac{SN}{SC} \quad 1p$$

$$\frac{AM}{PC} = \frac{BN}{PC} \Rightarrow \frac{TA}{TP} = \frac{SB}{SP} \Rightarrow \text{conform reciprocei teoremei lui Thales } TS \parallel AB, AB \subset (ABE), TS \not\subset (ABE) \Rightarrow TS \parallel (ABE) \quad 1p$$

b)  $(FMN) \parallel (PAB) \Rightarrow FN \parallel BP$  (deoarece sunt drepte coplanare),  $FP \parallel BN \Rightarrow BNFP$  este paralelogram  $\Rightarrow BN \equiv FP$  1p

$BN = FP, FP \parallel BN \Rightarrow BNFP$  este paralelogram  $\Rightarrow FN \parallel BP$  1p

$FN \parallel BP, BP \subset (PAB), FN \not\subset (PAB) \Rightarrow FN \parallel (PAB), MN, FN \parallel (ABP), MN, FN \subset (FMN), MN \cap FN = \{N\} \Rightarrow (FMN) \parallel (PAB)$  1p



### SUBIECTUL 3

Aflați numerele  $x_1, x_2, \dots, x_{2025} \in (0, 1]$  pentru care

$$\frac{2024x_1+1}{x_1} + \frac{2024x_2+1}{x_2} + \dots + \frac{2024x_{2025}+1}{x_{2025}} = 2025^2$$

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$$\frac{2024x_1+1}{x_1} + \frac{2024x_2+1}{x_2} + \dots + \frac{2024x_{2025}+1}{x_{2025}} = 2025^2 \Leftrightarrow \frac{2024x_1+1}{x_1} - 2025 + \frac{2024x_2+1}{x_2} - 2025 + \dots + \frac{2024x_{2025}+1}{x_{2025}} - 2025 = 0 \Leftrightarrow \quad 2p$$

$$\frac{1-x_1}{x_1} + \frac{1-x_2}{x_2} + \dots + \frac{1-x_{2025}}{x_{2025}} = 0 \quad 2p$$

$$\text{Dar } x_1, x_2, \dots, x_{2025} \in (0, 1] \Rightarrow \frac{1-x_1}{x_1} \geq 0, \frac{1-x_2}{x_2} \geq 0, \dots, \frac{1-x_{2025}}{x_{2025}} \geq 0 \quad 2p$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{2025} = 1 \quad 1p$$

#### SUBIECTUL 4

Se consideră paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$  cu  $AB=6\sqrt{2}\text{cm}$ ,  $BC=6\text{cm}$  și  $AA'=6\sqrt{3}\text{cm}$  iar punctul  $E$  este mijlocul muchiei  $A'B'$ .

**3p** a) Calculați aria triunghiului  $EBD$ ;

**2p** b) Calculați distanța de la punctul  $A$  la planul  $(EBD)$ ;

**2p** c) Calculați tangenta unghiului plan determinat de planele  $(EBD)$  și  $(A'AB)$ .

*Profesor Anton Negrilă*

*Soluție:*

a) Construim  $AQ \perp EB$ ,  $Q \in EB$ ;

$$EB = 3\sqrt{14} \text{ cm}$$

$$AQ \cdot EB = EM \cdot AB \text{ deci } AQ = \frac{12\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$$

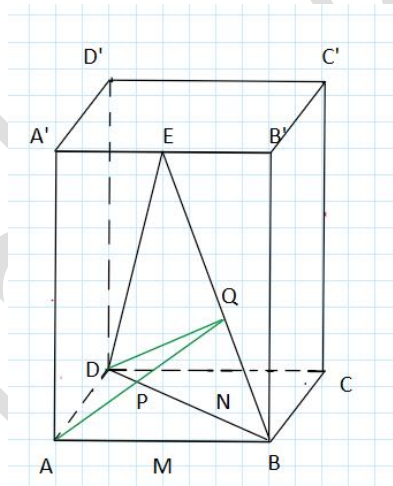
T Pitagora în  $\triangle ADQ$  avem  $DQ = \frac{6\sqrt{19}}{\sqrt{7}} \text{ cm}$ , deci aria lui  $EBD$  este  $9\sqrt{38} \text{ cm}$ .

b)  $d(A, (EBD))$  este înălțimea din  $A$  a triunghiului  $DAQ$

$$d(A, (EBD)) = \frac{AD \cdot AQ}{DQ} = \frac{12\sqrt{57}}{19} \text{ cm}.$$

$$c) \angle((EBD), (A'AB)) = \angle(AQ, DQ) = \angle AQD$$

$$\text{tg} \angle AQD = \frac{AD}{AQ} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$



1p

1p

1p

1p

1p

1p

1p

**Notă:**

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.