

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 2.02.2025 –

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$, notăm $x * y = \frac{4-xy}{5-x-y}$.

3p a) Să se arate că $x * y \in M, \forall x, y \in M$.

4p b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă și asociativă, dar nu admite element neutru.

SUBIECTUL 2

Se consideră

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin^{2025} x}{\pi + 2\sin^{2025} x + 2\cos^{2025} x} dx.$$

Demonstrați că $I = \frac{\pi}{8}$.

Profesor Claudiu Militaru

SUBIECTUL 3

Se consideră numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$ și funcția

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + (a + b - x)^n}$$

3p a) Arătați că funcția f admite primitive.

4p b) Demonstrați că $F\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right) - F(\sqrt{ab}) = \frac{a+b}{2} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, pentru orice primitivă F a lui f .

Supliment GAZETA MATEMATICĂ

SUBIECTUL 4

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea $x \circ y = [x + a] + [y + b]$, unde $a, b \in (0, 1)$, $[m]$ înseamnă partea întreagă a numărului real m . Determinați submulțimile G ale lui \mathbb{R} pentru care (G, \circ) formează un grup abelian.

Profesor Petre Năchilă

Notă: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.