

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**Etapă locală, Neamț****08.02.2025****Clasa a VII-a****Problema 1.** Fie numerele $a, b \in \mathbb{R}$, unde

$$a = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{10}) \cdot \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{10}) \cdot \sqrt{10}} + \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} + (\sqrt{3} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{3}} \text{ și}$$

$$b = \left[\frac{2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 7\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + 7 \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \right] \cdot (-\sqrt{3610})^{-1}.$$

a) Arătați că a^2 este număr natural**b)** Calculați media geometrică a numerelor a și b .**Soluție și barem:**

a) $a = \sqrt{3 - \sqrt{30} - \sqrt{30} + 10} + \sqrt{\sqrt{30} + 10 + 3 + \sqrt{30}} = \sqrt{13 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{13 + 2\sqrt{30}}$ **1p**

$$a^2 = 13 - 2\sqrt{30} + 2\sqrt{(13 - 2\sqrt{30})(13 + 2\sqrt{30})} + 13 + 2\sqrt{30}$$
 1p

$$a^2 = 40, \text{ deci număr natural}$$
 1p

b) $a^2 = 40 \Rightarrow a = 2\sqrt{10}$ **1p**

$$b = \left[\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 7\sqrt{6})}{2 - 3} + 14\sqrt{3} - 21\sqrt{2} - 7\sqrt{6} \right] \cdot \left(-\frac{1}{19\sqrt{10}} \right)$$
 1p

$$b = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
 1p

$$M_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{2}$$
 1p

Problema 2.**a)** Să se arate că suma S este un număr natural, pătrat perfect, unde S :

$$S = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 3} + \sqrt{1 + 3 + 5} + \sqrt{1 + 3 + 5 + 7} + \sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + 9} + \sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11} + \sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13}.$$

b) Fie $T = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 3} + \sqrt{1 + 3 + 5} + \sqrt{1 + 3 + 5 + 7} + \dots + \sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2025}$.Arătați că T este un număr natural, dar nu este pătrat perfect.**Soluție și barem:**

a) $\sqrt{1} = 1, \sqrt{1 + 3 + 5} = 3, \dots, \sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13} = 7$ **2p**

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2, \text{ deci } S \text{ pătrat perfect}$$
 1p

b) Deoarece $\sqrt{1 + 3 + \dots + (2n - 1)} = \sqrt{n^2} = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

$$T = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1013$$
 1p

$$T = \frac{1013 \cdot 1014}{2} = 1013 \cdot 507$$
 1p

$$T \text{ nu-i pătrat perfect } (3|T \text{ dar } 9 \nmid T)$$
 1p

Problema 3.

Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și P un punct oarecare pe diagonala BD , $DP < PB$.

Pe semidreapta $(CP$ se ia un punct M astfel încât $PM = CP$ și se duc $ME \perp AD, E \in AD$ și $MF \perp AB, F \in AB$.

a) Demonstrați că $AM \parallel BD$ și $EF \parallel AC$

b) Punctele E, F și P sunt coliniare.

Soluție și barem:

a) Fie $BD \cap AC = \{O\}$ și $MA \cap EF = \{N\}$, $ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow O$ mijloc AC
 $PM = CP \Rightarrow P$ mijloc MC , deci OP linie mijlocie în $\triangle MAC \Rightarrow OP \parallel AM \Rightarrow AM \parallel BD$ **1p**

$\sphericalangle MFA = \sphericalangle EAF = \sphericalangle AEM = 90^\circ \Rightarrow AEMF$ dreptunghi **1p**

$AM \parallel BD \Rightarrow \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle DAC$

$\sphericalangle MAF = \sphericalangle NFA = \sphericalangle OAB = 90^\circ - \sphericalangle DAM \Rightarrow \sphericalangle EFA + \sphericalangle FAC = 180^\circ \Rightarrow EF \parallel AC$ **2p**

b) $AEMF$ dreptunghi $\Rightarrow N$ mijloc MA

P mijloc MC , deci NP linie mijlocie în $\triangle MAC \Rightarrow NP \parallel AC$ **1p**

Dar $EF \parallel AC$ și $N \in EF \Rightarrow EN \parallel AC \Rightarrow E, F$ și P sunt coliniare (axioma paralelelor) **2p**

Problema 4.

Triunghiul ABC este dreptunghic în A , iar M este mijlocul laturii BC .

Construim triunghiul AMD echilateral, cu B și D situate de o parte și de alta a dreptei AM .

Aflați măsura unghiului BDC .

Supliment Gazeta Matematică, nr.10/2024

Soluție și barem:

AM mediană în $\triangle ABC$ este dreptunghic în $A \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$ **2p**

Punctele A, B, C sunt conciclice pe cercul de centru M și diametru BC **1p**

$\triangle AMD$ echilateral, deci $DM = AM = \frac{1}{2}BC$ **1p**

Punctul D se află pe cercul de centru M și diametru BC **1p**

În $\triangle BDC$, unghiul D subîntinde un semicerc **1p**

Măsura $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ **1p**