

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Neamț
08.02.2025
Clasa a VIII-a

Problema 1. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x = a(a+2), a \in \mathbb{Z}\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2 + 2b - b^2, b \in \mathbb{Z}\}.$$

- Demonstrați că: $a < \sqrt{a^2 + 2a} < a + 1, \forall a > 0$ și
 $-a - 2 < \sqrt{a^2 + 2a} < -a - 1, \forall a < -2$
- Demonstrați că dacă un număr real nenul are pătratul în mulțimea A atunci acel număr este irațional
- Determinați $A \cap B$
- Demonstrați că $A \cup B$ are un singur element care este pătrat perfect

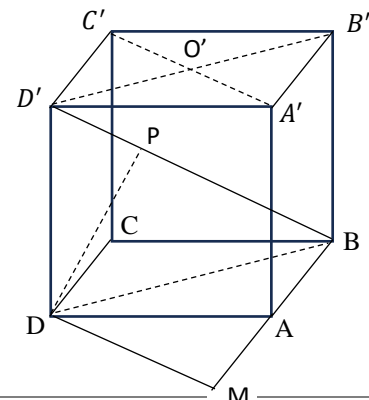
Soluție și barem:

- Toți membrii sunt pozitivi și ridicând la pătrat se obține:
 $a^2 < a^2 + 2a < a^2 + 2a + 1$ - adevărat pentru $a > 0$
și $a^2 + 4a + 4 < a^2 + 2a < a^2 + 2a + 1$ - adevărat pentru $a < -2$
1p
- $y \in \mathbb{R}^*, y^2 \in A \Leftrightarrow y^2 = a(a+2), a \in \mathbb{Z}^* - \{-2, -1\}$
Conform a) avem că $a^2 < y^2 < (a+1)^2$ pentru $a > 0$ și $(a+2)^2 < y^2 < (a+1)^2$ pentru $a < -2$ deci y^2 nu este pătrat perfect adică $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
2p
- $x \in A \cap B \Leftrightarrow x = a(a+2) = 2 + 2b - b^2, a, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-1)^2 = 4$
Deducem că $(a+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |a+1| \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow a \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$
Se obține $A \cap B = \{(-3; 1); (-1; 3); (-1; -1); (1; 1)\}$
2p
- $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ sau } x \in B$
Dacă $x \in A$ și este pătrat perfect, rezultă conform a), că $x = 0$
Dacă $x \in B \Leftrightarrow x = 2 + 2b - b^2 = 3 - (b-1)^2, b \in \mathbb{Z}$ și dacă x este pătrat perfect, deci pozitiv, $(b-1)^2 \leq 3, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow x \in \{2; 3\}$ deci x nu este pătrat perfect.
Deci singurul pătrat perfect din $A \cup B$ este 0.
2p

Problema 2. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub cu $AB = a\sqrt{2}, a \in \mathbb{R}_+^*$ și $A' C' \cap B' D' = \{O'\}$. Fie M simetricul lui B față de dreapta AD. Se cer:

- Arătați că $MD \perp (D' DB)$
- Calculați distanța de la M la $D' B$
- Demonstrați că $D' B \perp D O'$

Soluție și barem:



- a. $\Delta MBD: DA = \frac{MB}{2}$ și DA mediană $\Rightarrow m(\widehat{MDB}) = 90^\circ \Rightarrow MD \perp BD$
 $D'D \perp (ABCD) \Rightarrow D'D \perp MD$
 Deci $MD \perp (D'DB)$.

2p

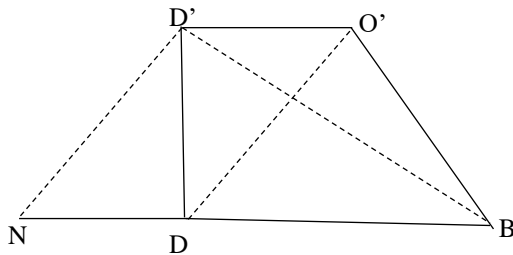
- b. Fie $DP \perp BD'$ și cum $MD \perp (D'DB)$ rezultă $MP \perp BD'$ deci d(M, D'B) = MP.
 $MD = 2a$

$$\Delta D'DB \text{ dreptunghic în } D: DP = \frac{DD' \cdot DB}{D'B} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta MDP \text{ dreptunghic în } D: MP = \sqrt{MD^2 + DP^2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

3p

c.



Construind $D'N \parallel O'D$, $N \in BD$, avem în $\Delta D'NB$: $ND = D'O' = a$, $DB = 2a$, $DD' = a\sqrt{2}$
 rezultă, conform reciprocei teoremei înălțimii, că $ND' \perp D'B$ deci $D'B \perp DO'$.

2p

Problema 3. Fie a, b două numere reale care verifică relațiile $a \cdot b = 1$ și $\frac{a}{\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{b}{\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

- a) Să se demonstreze egalitatea $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$;

- b) Să se determine numerele reale a și b care îndeplinesc condițiile din enunț.

Soluție și barem:

- a) Demonstrarea egalității

2p

- b) Demonstrarea relației $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

1p

Raționalizând fiecare fracție și înlocuind $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ și $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$, se obține $a \cdot (2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{10} - \sqrt{2}) - b \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{10} - \sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{10}$

1p

Înlocuind $b = \frac{1}{a}$, se obține $(\sqrt{6} - 1) \cdot (a^2 - 1) + \sqrt{5}(a^2 + 1) = 2 \cdot a \cdot \sqrt{5}$

1p

$$(a-1) \cdot [(\sqrt{6} - 1) \cdot (a+1) + \sqrt{5} \cdot (a-1)] = 0$$

1p

Se obțin soluțiile $a = b = 1$ sau $a = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ și $b = \sqrt{6} + \sqrt{5}$.

1p

Problema 4. Fie o piramidă triunghiulară oarecare $[ABCD]$. Notăm cu E, respectiv cu F proiecțiile vârfului A pe bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ și respectiv $\angle ABD$.

- Dacă M este mijlocul laturii AB, să se demonstreze că $ME \parallel (BCD)$;
- Să se arate că $EF \parallel (BCD)$;
- Dacă notăm cu P punctul de intersecție al bisectoarei $\angle ABC$ cu AC, Q punctul de intersecție al bisectoarei $\angle ABD$ cu AD, stabiliți natura triunghiului BCD astfel încât PQ este paralelă cu planul (BCD).

Soluție și barem:

- a) Triunghiul AEB dreptunghic și M - mijlocul lui AB rezultă triunghiul EMB isoscel 2p

$\angle MEB \equiv \angle EBC$ (alterne interne);
 $ME \parallel BC$ și $BC \subset (BCD)$ rezultă $ME \parallel (BCD)$; 1p

- b) Deoarece $MF \parallel (BCD)$ și conform subpunctului a), rezultă $EF \parallel (BCD)$ 1p

- c) Din teorema bisectoarei în triunghiurile ABF și ABD se obține $\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC}$ și $\frac{AQ}{QD} = \frac{AB}{BD}$; 2p

Din teorema lui Thales ($PQ \parallel BC$), obținem $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BD}$, deci triunghiul BCD este isoscel. 1p

