

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa Locală

Maramureș – 8 februarie 2025

Clasa a XII - a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

1. a) Se obține $(x-3) \cdot (e-4) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow e = 4$ elementul neutru 1p
Se obține $x' = \frac{3x-8}{x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{2,4\}$ 2p
b) $x * y = (x-3) \cdot (y-3) + 3$.
Se demonstrează prin inducție că
 $x * x * \dots * x = (x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde x intră în compunere de n ori
 $x * x * \dots * x = (x-3)^{2025} + 3$, x intră în compunere de 2025 ori 2p
Deci $(x-3)^{2025} + 3 = x \Leftrightarrow (x-3) \cdot [(x-3)^{2024} - 1] = 0$
 $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$
sau
 $(x-3)^{2024} = 1 \Rightarrow x = 2$ și $x = 4$.
Deci $x \in \{2,3,4\}$ 2p
2. a) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1+2 \cdot (x+y) & 4 \cdot (x+y) \\ -(x+y) & 1-2 \cdot (x+y) \end{pmatrix} = A(x+y)$ 1p
b) $\forall A(x), A(y) \in G \Rightarrow A(x) \cdot A(y) \in G$.
Cum $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ și $x+y \in \mathbb{Z} \forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow A(x) \cdot A(y) \in G$
 $\forall A(x), A(y) \in G \Rightarrow A(x) \cdot A(y) = A(x+y) = A(y+x) = A(y) \cdot A(x)$.
Înmulțirea matricelor este asociativă pe $M_2(\mathbb{R})$.
 $\exists A(e) \in G$ astfel încât $A(x) \cdot A(e) = A(e) \cdot A(x) = A(x), \forall A(x) \in G$
Din $A(x+e) = A(x) \Rightarrow x+e = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow e = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
 $A(e) = A(0) \in G$ este elementul neutru pe G
 $\forall A(x) \in G, \exists A'(x) = A(x') \in G$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0)$.
Din $A(x+x') = A(0) \Rightarrow x+x' = 0 \Rightarrow x' = -x \in \mathbb{Z}$.
Deci $A'(x) = A(-x) \in G$.
Finalizare 4p
c) Cum $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A(1)$, Se demonstrează prin inducție că
 $B = (A(1))^n = A(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $B = \begin{pmatrix} 1+2n & 4n \\ -n & 1-2n \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}^*, \dots\dots\dots 2p$
3. a) Deoarece, funcția G este o compunere de funcții elementare, este o funcție derivabilă
și $G(x)' = \frac{1}{x(a+\ln x)} = g(x), x \geq 1$. Deci G este o primitivă a funcției g 2p
b) Putem scrie $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x(3+\ln x)} - \frac{1}{x(5+\ln x)} \right)$, 2p
decu $F(x) \in \left\{ \frac{1}{2} [\ln(3+\ln x) - \ln(5+\ln x)] + \wp \right\}$ 1p
 $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{3+\ln x}{5+\ln x} + c$ 1p
Avem $F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7} + c = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7} \Rightarrow c = 0$. Deci $F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{3+\ln x}{5+\ln x}$ 1p

4. a) f este continuă pe $[0,3] \setminus \{1\}$ deoarece, fiecare ramură este o compunere de funcții elementare. **1p**

$$l_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cos \frac{\pi(x-1)}{3} = 1 = f(1), \quad l_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{x^2 - 4x + 7} = \frac{a}{4} \quad \dots \quad \mathbf{1p}$$

Dacă $\frac{a}{4} \neq 1 \Leftrightarrow a \neq 4 \Rightarrow x = 1$ este punct de discontinuitate de speța I pentru $f \Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow f$ nu admite primitive. **1p**

Dacă $\frac{a}{4} = 1 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow f$ este continuă în $x = 1$. Cum f este continuă pe $[0,3] \setminus \{1\} \Rightarrow f$ continuă pe $[0,3] \Rightarrow f$ admite primitive pe $[0,3]$. Deci $a = 4$ **1p**

b)

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 x \cos \frac{\pi(x-1)}{3} dx + \int_1^3 \frac{4}{x^2 - 4x + 7} dx = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{\pi(x-1)}{3} \Big|_0^1 \\ &\quad + 4 \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} \Big|_1^3 \\ &= \frac{9}{2\pi^2} + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \dots \quad \mathbf{3p} \end{aligned}$$