



Barem de notare și evaluare- Clasa a V-a
Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 08 februarie 2025

Subiectul 1

a) $n = 2025(1 + 3 + 5 + \dots + 19)$ $n = 2025 \cdot 100$ $n = 202\,500$, deci suma cifrelor lui n este 9.	1p 1p 1p
b) $a \cdot (b + c) = 2250$, $a \cdot b = 225$ rezultă $a \cdot c = 2025$ $a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot a \cdot c = 225 \cdot 729 \cdot 2025 \Leftrightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = (15 \cdot 27 \cdot 45)^2$ $a \cdot b \cdot c = 15 \cdot 27 \cdot 45 = 18\,225$	1p 2p 1p
TOTAL	7p

Subiectul 2

a) $x = 2y + 41$, $y > 41$ $3x - 6y + 2 = 125$ $10^n = 8 \cdot 125 \Leftrightarrow 10^n = 1000 \Leftrightarrow n = 3$	1p 1p 1p
b) $x + y \leq 167$, $x = 2y + 41 \Rightarrow 3y + 41 \leq 167$ $y \leq 42$, $y > 41$ și y număr natural, rezultă $y = 42$ și $x = 125$.	2p 2p
TOTAL	7p

Subiectul 3

a) $125 = 5^3 = 5^2 + 10^2$, deci numărul 125 este <i>cub bipătratic</i> $9 = 3^2 = 1^3 + 2^3$, deci numărul 9 este <i>pătrat bicubic</i> .	2p 2p
b) $5^3 \cdot k^6 = 5^2 \cdot k^6 + 10^2 \cdot k^6 \Leftrightarrow (5k^2)^3 = (5k^3)^2 + (10k^3)^2$, $k \neq 0$ $3^2 \cdot p^6 = 1^3 \cdot p^6 + 2^3 \cdot p^6 \Leftrightarrow (3p^3)^2 = (p^2)^3 + (2p^2)^3$, $p \neq 0$ Cum k și p sunt numere naturale nenule, rezultă că există o infinitate de <i>cuburi bipătratice</i> și o infinitate de <i>pătrate bicubice</i> .	1p 1p 1p
TOTAL	7p

Subiectul 4

a) $2^{75} = (2^3)^{25} = 8^{25} < 9^{25} = (3^2)^{25} = 3^{50}$	2p
b) $3^{50} = (3^5)^{10} = 243^{10} < 256^{10} = (2^8)^{10} = 2^{80}$ $2^{79} = 2^3 \cdot 2^{76} = 8 \cdot (2^{19})^4 < 9 \cdot (3^{12})^4 = 3^2 \cdot 3^{48} = 3^{50}$ $2^{79} < 3^{50} < 2^{80}$, deci cel mai mare număr natural n pentru care $3^{50} > 2^n$ este 79.	2p 2p 1p
TOTAL	7p



Soluții și bareme orientative

Clasa a VI-a

- 1) a) $\frac{7x-5y}{4x-6y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(7x-5y) = 2(4x-6y) \Rightarrow 21x-15y = 8x-12y \dots\dots\dots 1p$
 $21x-8x = 15y-12y \Rightarrow 13x = 3y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{13} \dots\dots\dots 1p$
 $\frac{5x}{2y} = \frac{15}{26} \dots\dots\dots 1p$
- b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{13} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{13} = k \Rightarrow x = 3k$ și $y = 13k$, unde k este un număr rațional $\dots\dots\dots 1p$
 $3x$ reprezintă $p\%$ din $(2x+3y) \Rightarrow 3x = \frac{p}{100}(2x+3y) \dots\dots\dots 1p$
 $9k = \frac{p}{100}(6k+39k) \Rightarrow 9k = \frac{p}{100}45k \dots\dots\dots 1p$
 $1 = \frac{5p}{100} \Rightarrow 5p = 100 \Rightarrow p = 20 \dots\dots\dots 1p$
- 2)a) Realizarea desenului corespunzător $\dots\dots\dots 2p$
Punctul C se găsește pe mediatoarea segmentului AB , deci $\angle AOC = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$
 $\angle AOM = \angle AOC - \angle MOC = 90^\circ - \angle MOC$, iar $\angle CON = \angle MON - \angle MOC = 90^\circ - \angle MOC$
De unde concluzia : $\angle AOM \equiv \angle CON \dots\dots\dots 1p$
- b) Deoarece $\angle MOC \equiv \angle BON \equiv \angle ABD$ dreptele ON și BD sunt paralele $\dots\dots\dots 2p$
Dar $OM \perp ON$ și $ON \parallel BD$, atunci $OM \perp BD \dots\dots\dots 1p$
- 3) Notăm $(a,b) = d$, există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = d \cdot x$, $b = d \cdot y$ și $(x,y) = 1$
iar $[a,b] = d \cdot x \cdot y \dots\dots\dots 1p$
Relația din enunț devine echivalentă cu $\overline{ef}^2 = x \cdot d^2 \cdot (9 + y^2) \dots\dots\dots 1p$
Deci, $x \cdot (9 + y^2) = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ atunci $\overline{ef} = d \cdot k$ și cum \overline{ef} este număr prim iar $k \in \mathbb{N}$,
 $k \geq 3 \Rightarrow d = 1 \dots\dots\dots 1p$
Așadar $\overline{ef}^2 = x \cdot (9 + y^2) \Rightarrow x = 1$ și $9 + y^2 = \overline{ef}^2$ sau $x = \overline{ef}$ și $9 + y^2 = \overline{ef} \dots\dots\dots 1p$
Dacă $9 + y^2 = \overline{ef}^2 \Rightarrow y \geq 10$ și $\overline{ef} > y \Rightarrow \overline{ef} \geq y + 1 \Rightarrow \overline{ef}^2 \geq (y + 1)^2 \Rightarrow 9 + y^2 \geq (y + 1) \cdot (y + 1)$
 $\Rightarrow 9 + y^2 \geq y \cdot (y + 1) + 1 \cdot (y + 1) \Rightarrow 9 + y^2 \geq y^2 + y + y + 1 \Rightarrow 2y \leq 8 \Rightarrow y \leq 4$, contradicție..... $1p$
Deci $x = \overline{ef}$ și $9 + y^2 = \overline{ef}$
Pentru $y = 2 \Rightarrow \overline{ef} = 13$, $a=13$, $b=2$ iar pentru $y = 8 \Rightarrow \overline{ef} = 73$ $a=73$, $b=8$. $\dots\dots\dots 2p$



4)a) Un număr natural cu 4 divizori are una din formele p^3 cu p nr prim sau $p \cdot q$ cu p și q numere prime distincte.....1p

Exemplul cerut : {6,8,10,14,15}.....2p

b) Dacă $x \in M$ și $x = p \cdot q$, suma divizorilor lui x este $1 + p + q + pq$ adică număr par....1p

Dacă $x \in M$ și $x = p^3$ suma divizorilor lui p este $1 + p + p^2 + p^3$,

adică număr par pt $p \neq 2$ 1p

Dar $8 \in M$ este singurul element dintr – o mulțime " $4d$ " care are suma divizorilor

număr impar 1p

Deci, suma divizorilor acestor elemente nu poate fi 2024, care este număr par.....1p

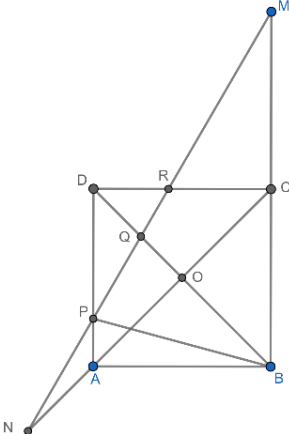


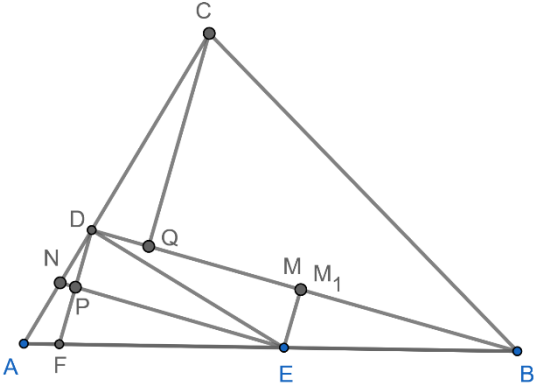
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etaa locală - 8 februarie 2025

BAREM DE CORECTARE

Clasa a VII-a

Problema 1	
a) $a = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9+1}{2}} + \sqrt{\frac{9-1}{2}} = \sqrt{5} + 2$	1p
$b = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9+1}{2}} - \sqrt{\frac{9-1}{2}} = \sqrt{5} - 2$	1p
$M_a = \frac{a+b}{2} = \sqrt{5}$ și $M_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{5 - 4} = 1$	1p
b) $N = (9 + 4\sqrt{5})^{2025} \cdot (9 - 4\sqrt{5})^{2025} \cdot (9 - 4\sqrt{5}) + \frac{1}{(9-4\sqrt{5})} + 2\sqrt{3} - 3 + 4 - 2\sqrt{3}$	2p
$N = (81 - 80)^{2025} \cdot (9 - 4\sqrt{5}) + \frac{9+4\sqrt{5}}{81-80} + 1$	1p
$N = 9 - 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} + 1 = 19$ număr prim	1p
TOTAL	7p
Problema 2	
a) $-1 < \sqrt{13} - 4 < 0 \Leftrightarrow 3 < \sqrt{13} < 4 \Leftrightarrow 9 < 13 < 16$ adevărat	1p
$[\sqrt{13} - 4] = -1$	1p
$\{\sqrt{13} - 4\} = \sqrt{13} - 4 - [\sqrt{13} - 4] = \sqrt{13} - 4 - (-1) = \sqrt{13} - 3$	1p
b) Deoarece $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1$	1p
Rezultă $[\sqrt{n^2 + n + 1}] = n, \forall n \geq 1$	1p
Atunci $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99$	1p
Obținem $S = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$	1p
TOTAL	7p
Problema 3	
	

<p>Fie $MN \cap CD = \{R\}$ și $AC \cap BD = \{O\}$.</p> <p>ΔMCR dreptunghic cu $m(\widehat{C}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{CMR}) = 30^\circ \Rightarrow MR = 2 \cdot RC$</p> <p>$\Delta PDR$ dreptunghic cu $m(\widehat{D}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{DPR}) = 30^\circ \Rightarrow PR = 2 \cdot DR$</p> <p>Prin adunarea celor 2 relații avem: $MR + PR = 2(RC + DR) \Rightarrow$</p> <p>$MP = 2 \cdot DC = 2 \cdot BC = MB$</p> <p>$\Delta MPB$ isoscel și $m(\widehat{PMB}) = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{MPB}) = 75^\circ$ (1)</p> <p>În patrulaterul $CRQO$, $m(\widehat{CRQ}) = 120^\circ$, $m(\widehat{RCO}) = 45^\circ$, $m(\widehat{O}) = 90^\circ$</p> <p>$\Rightarrow m(\widehat{RQO}) = 105^\circ \Rightarrow m(\widehat{BQP}) = 75^\circ$ (2)</p> <p>Din (1) și (2) $\Rightarrow \widehat{BQP} \equiv \widehat{BPQ} \Rightarrow \Delta BPQ$ isoscel $\Rightarrow BP \equiv BQ$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>TOTAL</p>	<p>7p</p>
<p>Problema 4</p> 	
<p>a) $m(\widehat{ACB}) = 75^\circ$, deci triunghiul BCD este isoscel și $m(\widehat{CBD}) = 30^\circ$.</p> <p>Construim $EM_1 \perp BD$, $M_1 \in BD$ și $CQ \perp BD$, $Q \in BD$.</p> <p>Atunci $\Delta BEM_1 \equiv \Delta CDQ$ (I.U.), de unde rezultă $CQ = BM_1$</p> <p>Cum CQ este cateta opusă unghiului de 30° în triunghiul dreptunghic CQB, obținem că $BD = BC = 2CQ = 2BM_1$, prin urmare EM_1 este înălțime și mediană în triunghiul EBD, acesta fiind astfel isoscel, deci $DE = 2cm$, iar $M = M_1$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, deci $m(\widehat{BED}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.</p> <p>Atunci $m(\widehat{AED}) = 30^\circ$ și $m(\widehat{NED}) = 15^\circ \Rightarrow$</p> <p>$m(\widehat{NEM}) = m(\widehat{NED}) + m(\widehat{DEM}) = 90^\circ$.</p> <p>$m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{DCQ}) = 15^\circ \Rightarrow CQ \parallel FD$ și $FD \perp BD$.</p> <p>Astfel, $m(\widehat{NEM}) = m(\widehat{EMD}) = m(\widehat{MDP}) = 90^\circ$ de unde</p> <p>$m(\widehat{DPE}) = 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$ patrulaterul $DMEP$ este dreptunghi.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>TOTAL</p>	<p>7p</p>



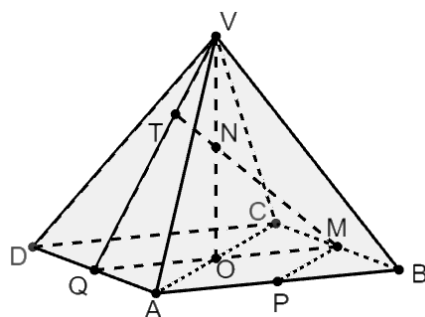
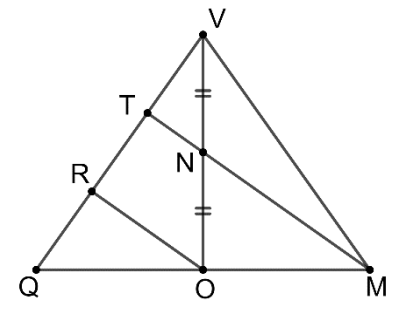
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

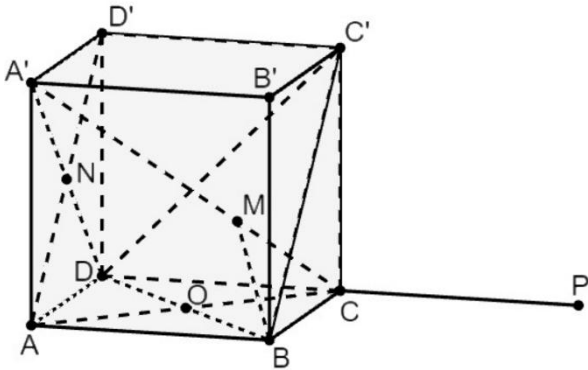
Etapa Locală- 2025

clasa a VIII-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1.a) 3p	$E(x) = x^4 - 7x^2 + 1$, pentru orice număr real x	1p	
	a este număr par, așadar $a = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow A = 16k^4 - 7 \cdot 4k^2 + 4$	1p	
	$A = 4(4k^4 - 7k^2 + 1) : 4$	1p	
1.b) 4p	$E(n) = n^4 - 7n^2 + 1 = \left(n^2 - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{45}{4} = \frac{(2n^2 - 7)^2 - 45}{4} \geq -11$, pentru orice număr întreg n	1p	
	Cum $(2n^2 - 7)^2 \in \mathbb{N}$, dacă $(2n^2 - 7)^2 = 1$, atunci $E(n)$ are valoare minimă egală cu -11	1p	
	$2n^2 - 7 \in \{-1, 1\} \Rightarrow n^2 \in \{3, 4\}$	1p	
	$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{-2, 2\}$	1p	
2.a) 3p	 		
	Dacă este P mijlocul segmentului AB , atunci $MP \parallel AC$ și $\sphericalangle(MN, AC) = \sphericalangle NMP$	1p	
	$VO = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow NO = 3\sqrt{2}$ cm și $MN = \sqrt{NO^2 + OM^2} = 3\sqrt{6}$ cm	1p	
	$\Delta NOP \equiv \Delta NOM \Rightarrow NP = NM = 3\sqrt{6}$ cm, de unde ΔMNP isoscel Fie $NE \perp MP \Rightarrow E$ mijlocul segmentului MP și astfel $\cos(\sphericalangle NMP) = \frac{ME}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1p	
2.b) 4p	$MO \cap AD = \{Q\} \Rightarrow Q$ mijlocul segmentului AD $MN \cap VQ = \{T\}$. Fie $OR \parallel MT$ TN linie mijlocie în triunghiul VOR , rezultă $VT = TR$ OR linie mijlocie în triunghiul MTQ , rezultă $QR = RT$		1p

	Se obține $VT = TR = RQ = \frac{VQ}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$	
	$\frac{OQ}{RQ} = \sqrt{3} = \frac{VQ}{OQ}$, $\angle VQO = \angle RQO \Rightarrow \Delta VOQ \sim \Delta ORQ \Rightarrow \angle ORQ = 90^\circ$, deci $MT \perp VQ$	1p
	$AD \perp MQ$, $AD \perp VQ$, $MQ, VQ \subset (VMQ) \Rightarrow AD \perp (VMQ)$ Cum $MN \subset (VMQ) \Rightarrow AD \perp MN$	1p
	$MN \perp VQ$, $MN \perp AD$, $VQ, AD \subset (VAD) \Rightarrow MN \perp (VAD)$	1p
3. 7p	$\frac{\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}((1+\sqrt{k})-\sqrt{k+1})}{(1+\sqrt{k})^2 - (k+1)} = \frac{1+\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{2}$, $k \in \mathbb{N}^*$	1p
	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{4}}{2} + \frac{1+\sqrt{4}-\sqrt{5}}{2} + \dots + \frac{1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}}{2}$	1p
	Deducem că $\frac{n+\sqrt{3}-\sqrt{n+3}}{2} = \frac{17+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$	1p
	$17 = n - \sqrt{n+3} \Leftrightarrow \sqrt{n+3} = n - 17 \Rightarrow n + 3 = (n - 17)^2 \Leftrightarrow$	1p
	$n^2 - 35n + 286 = 0 \Leftrightarrow (n - 22)(n - 13) = 0$	1p
	De unde $n = 13$ sau $n = 22$	1p
	Prin verificare obținem $n = 22$	1p
4.a) 4p		
	În triunghiul dreptunghic $A'BC$, $BC^2 = CM \cdot A'C \Rightarrow CM = \frac{1}{3} A'C$	1p
	$ACC'A'$ paralelogram, $AC' \cap A'C = \{Q\} \Rightarrow Q$ este mijlocul segmentului $A'C \Rightarrow CM = \frac{2}{3} CQ$, deducem că punctul M este centrul de greutate al triunghiului ACC'	1p
	Dacă $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow O$ este mijlocul segmentului $AC \Rightarrow C'O$ mediană în $\Delta ACC' \Rightarrow M \in C'O$, astfel încât $\frac{C'M}{C'O} = \frac{2}{3}$	1p
	Triunghiul $C'BD$ este echilateral și $CC' = CB = CD \Rightarrow CC'BD$ este piramidă triunghiulară regulată și cum punctul M este centrul triunghiului $C'BD \Rightarrow CM \perp (C'BD)$	1p



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



4.b) 3p	$CD \perp (ADD') \Rightarrow CD \perp AD'$ și $AD' \perp A'D$, $A'D, CD \subset (A'DC) \Rightarrow AD' \perp (A'DC)$ de unde deducem că $\{N\} = AD' \cap A'D \Rightarrow N$ este mijlocul segmentului $A'D$	1p
	Considerăm punctul R simetricul punctului M față de punctul $C \Rightarrow MN$ este linie mijlocie în triunghiul $A'DR \Rightarrow MN \parallel DR$ (1)	1p
	Punctul C este mijlocul segmentelor DP , respectiv $MR \Rightarrow DMPR$ paralelogram, de unde $DR \parallel MP$ (2). Din relațiile (1) și (2) deducem că punctele N, M și P sunt coliniare.	1p



Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, 8 februarie 2025
Clasa a IX-a

Subiectul 1	
Ecuția devine $3\{x\} = 2[x] + 1 - \left[x + \frac{1}{2}\right] \in \mathbb{Z}$	
Cum $3\{x\} \in [0,3)$, deducem că $3\{x\} \in \{0,1,2\}$, deci $\{x\} \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.	1p
Pentru $\{x\} = 0$, $x \in \mathbb{Z}$ și atunci $\left[x + \frac{1}{2}\right] = x$, $[x] = x$.	1p
Astfel, ecuația devine $x = 2x + 1$, deci $x = -1$.	1p
Pentru $\{x\} = \frac{1}{3}$, avem $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[x] + \frac{5}{6} = [x]$, ecuația devine	1p
$[x] = 2[x] - 1 + 1$, $[x] = 0$ și $x = \frac{1}{3}$.	1p
Pentru $\{x\} = \frac{2}{3}$, avem $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[x] + \frac{7}{6} = [x] + 1$, ecuația devine	1p
$[x] + 1 = 2[x] - 2 + 1$, $[x] = 2$ și $x = \frac{8}{3}$.	1p
TOTAL	7p
Subiectul 2	
Din $ab + ac + bc = \sqrt{3abc} \Rightarrow (ab + ac + bc)^2 = 3abc$.	1p
Cum $a + b + c = 1$, putem scrie $(ab + ac + bc)^2 = 3abc(a + b + c)$.	2p
Atunci $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = a^2bc + ab^2c + abc^2$.	1p
Relația de mai sus devine	
$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 = 0$ și astfel avem	
$(ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ac - ab)^2 = 0$, de unde	1p
$ab = ac = bc$.	1p
Rezultă $\frac{abc}{ab} = \frac{abc}{bc} = \frac{abc}{ac}$, astfel vom obține $a = b = c = \frac{1}{3}$.	1p
TOTAL	7p

Subiectul 3	
$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EA}.$ <p>Prin urmare, $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$</p> <p>Cum $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DC}$, vom obține că $2(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}) = \vec{0}.$</p> <p>Notăm $AF = x, BD = y, CE = z.$</p> <p>Astfel, avem $\overrightarrow{AF} = \frac{x}{x+y} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = \frac{y}{z+y} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE} = \frac{z}{x+z} \overrightarrow{CA}.$</p> $\begin{aligned} \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} &= \frac{x}{x+y} \overrightarrow{AB} + \frac{y}{z+y} \overrightarrow{BC} + \frac{z}{x+z} \overrightarrow{CA} \\ &= \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{z+y} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{y}{z+y} - \frac{z}{x+z} \right) \overrightarrow{AC} = \vec{0}, \end{aligned}$ <p>$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt vectori necoliniari, deci $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{z+y} = 0$ și $\frac{y}{z+y} - \frac{z}{x+z} = 0.$</p> <p>Prin urmare, $y^2 = xz, z^2 = yx$ și apoi $x^2 = yz.$</p> <p>Astfel, $x^2 + y^2 + z^2 = xz + yx + yz$</p> $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yx - 2yz = 0$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ echilateral.}$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
TOTAL	7p
Subiectul 4	
<p>Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obținem</p> $\begin{aligned} (abc + a^2b + bcb + cac)^2 &\leq \\ &\leq (a^2b^2 + a^4 + b^2c^2 + c^2a^2)(c^2 + b^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2). \end{aligned}$ <p>Astfel, $abc + a^2b + b^2c + c^2a \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}. (1)$</p> <p>Din nou cu inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem,</p> $\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 &= (\sqrt{a} \cdot a\sqrt{a} + \sqrt{b} \cdot b\sqrt{b})^2 \leq \\ &\leq (\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2) \left((a\sqrt{a})^2 + (b\sqrt{b})^2 \right) = (a + b)(a^3 + b^3). \end{aligned}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>



<p>Întrucât $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, se obține</p> $(a^2+b^2)^4 \leq (a+b)^2(a^3+b^3)^2 \leq 2(a^2+b^2)(a^3+b^3)^2 \Rightarrow$ $(a^2+b^2)^3 \leq 2(a^3+b^3)^2.$ <p>Analog, $(a^2+c^2)^3 \leq 2(a^3+c^3)^2, (c^2+b^2)^3 \leq 2(c^3+b^3)^2.$</p> <p>Prin urmare,</p> $(a^2+b^2)^3(a^2+c^2)^3(c^2+b^2)^3 \leq 8(a^3+b^3)^2(a^3+c^3)^2(c^3+b^3)^2 = 18^3$ $\Rightarrow (a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2) \leq 18 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} abc + a^2b + b^2c + c^2a \leq 6.$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
TOTAL	7p



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 08 februarie 2025
CLASA a X-a - Soluții și bareme

Problema 1.	
a) $a^{(\log_3 10)^2} + b^{(\log_5 10)^2} + c^{(\log_{15} 5)^2} = 27^{\log_3 10} + 125^{\log_5 10} + 225^{\log_{15} 5} =$	1p
$10^3 + 10^3 + 5^2 = 2025$	1p
b) Notând $\log_a n = x$ avem $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ (1) și $ax = 1 + x$ (2).	1p
Ecuția (1) are soluțiile $x = 0$ și $x = 4$.	1p
Dacă $x = 0$, atunci (2) devine $0 = 1$ ceea ce este imposibil.	1p
Dacă $x = 4$, atunci din (2) găsim $a = \frac{5}{4}$ și $n = \frac{625}{256}$	1p
deci $p = 625$ și $q = 256$, iar $\sqrt{p} + \sqrt[4]{p^3} \cdot \sqrt{q} = 25 + 125 \cdot 16 = 2025$	1p
Problema 2.	
Notând $x = \lg a$, $y = \lg b$, $z = \lg c$, $t = \lg d$ inegalitatea devine $\frac{x}{y+z+t-x} + \frac{y}{x+z+t-y} + \frac{z}{x+y+t-z} + \frac{t}{x+y+z-t} \geq 2$, iar $x, y, z, t > 0$.	2p
Dacă înmulțim relația cu 2 și adunăm 4 aceasta devine echivalentă cu	
$(x + y + z + t) \left(\frac{1}{y + z + t - x} + \frac{1}{x + z + t - y} + \frac{1}{x + y + t - z} + \frac{1}{x + y + z - t} \right) \geq 8 (*)$	3p
Deoarece produsul a oricăror trei dintre numerele a, b, c, d este mai mare decât al patrulea atunci numerele $y + z + t - x, x + z + t - y, x + y + t - z, x + y + z - t$ sunt pozitive.	1p
Aplicând inegalitatea mediilor $m_a \geq m_h$ pentru aceste patru numere se obține	
$2(x + y + z + t) \left(\frac{1}{y + z + t - x} + \frac{1}{x + z + t - y} + \frac{1}{x + y + t - z} + \frac{1}{x + y + z - t} \right) \geq 16$	1p
deci (*) este adevărată.	
Problema 3.	
Deoarece $ z_1 = z_2 = z_3 = 1$ atunci $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$.	1p
Conjugând relația $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, obținem $\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1$, deci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3}$. Eliminând numitorii obținem egalitatea $z_1^2 \cdot z_3 + z_2^2 \cdot z_1 + z_3^2 \cdot z_2 = z_1^2 \cdot z_2 + z_2^2 \cdot z_3 + z_3^2 \cdot z_1$, care este echivalentă cu $(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0$	3p
Dacă $z_1 = z_2$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, adică $z_3^2 = -z_1^2$. Obținem că $z_3 \in \{iz_1, -iz_1\}$, de	

unde $E = \left \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right \in \{ 1 - 2i + 3i , 1 + 2i - 3i \}$, deci $E = \sqrt{2}$.	1p
Dacă $z_1 = z_3$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, adică $z_2^2 = -z_1^2$. Obținem că $z_2 \in \{iz_1, -iz_1\}$, de unde $E = \left \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right \in \{ -i + 2i + 3 , i - 2i + 3 \}$, deci $E = \sqrt{10}$.	1p
Dacă $z_2 = z_3$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, adică $z_1^2 = -z_2^2$. Obținem că $z_1 \in \{iz_2, -iz_2\}$, de unde $E = \left \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right \in \{ i + 2 - 3i , -i + 2 + 3i \}$, deci $E = \sqrt{8}$. Astfel, valoarea maximă a lui E este $\sqrt{10}$.	1p
Problema 4.	
Pentru $y = 0$ se obține că $f(0) \geq f(x^3)$ oricare ar fi x număr real. Pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = x^3$ și din (1) avem că $f(0) \geq f(y)$ (1).	2p
Dacă $y = -x$ se obține $f(2x) + f(-x) \geq f(0) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2). Dacă înlocuim în (2) pe x cu $-x$ se obține $f(-2x) + f(x) \geq f(0) + f(-x)$ (3) și adunând relațiile (2) și (3) găsim	2p
$f(2x) + f(-2x) \geq 2f(0)$ (4).	1p
Dacă înlocuim în (4) pe x cu $\frac{x}{2}$ și folosim (1) se obține $f(x) + f(-x) = 2f(0)$.	
Dacă există a pentru care $f(a) < f(0)$ atunci $f(-a) > f(0)$ ceea ce contrazice (1). Deci $f(x)$ este constantă.	2p



Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, 8 februarie 2025
Clasa a XI-a

Subiectul 1	
Din $(\det(X))^2 = \det(X^2) = 25$ se obține $\det(X) = \pm 5$.	1p
Dacă $\det(X) = 5$, cu relația Cayley-Hamilton: $X^2 - \operatorname{tr}(X) \cdot X + \det(X) \cdot I_2 = O_2$, rezultă $\operatorname{tr}(X) \cdot X = X^2 + 5I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.	1p
Avem $\operatorname{tr}(\operatorname{tr}(X) \cdot X) = 4$, deci $(\operatorname{tr}(X))^2 = 4$, adică $\operatorname{tr}(X) = \pm 2$.	1p
În acest caz obținem soluțiile: $X_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $X_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.	1p
Dacă $\det(X) = -5$, în mod analog avem $\operatorname{tr}(X) \cdot X = X^2 - 5I_2 = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$.	1p
Apoi, $\operatorname{tr}(\operatorname{tr}(X) \cdot X) = -16$, deci $(\operatorname{tr}(X))^2 = -16$, de unde $\operatorname{tr}(X) = \pm 4i$.	1p
În acest caz obținem soluțiile: $X_3 = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & 3i \end{pmatrix}$ și $X_4 = \begin{pmatrix} -i & -2i \\ i & -3i \end{pmatrix}$.	1p
TOTAL	7p
soluție alternativă	
Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ și $X^2 = A$, atunci $X^3 = AX = XA$.	1p
Rezultă $\begin{pmatrix} a+4b & -8a-7b \\ c+4d & -8c-7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-8c & b-8d \\ 4a-7c & 4b-7d \end{pmatrix}$, apoi $X = \begin{pmatrix} 2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$	1p
și $X^2 = \begin{pmatrix} 2c^2+4cd+d^2 & -4c^2-4cd \\ 2c^2+2cd & -2c^2+d^2 \end{pmatrix}$.	1p
$X^2 = A$ implică $\begin{cases} c^2+cd=2 \\ -2c^2+d^2=-7 \end{cases}$.	1p
Avem $7(c^2+cd)+2(-2c^2+d^2)=0 \Rightarrow 3c^2+7cd+2d^2=0 \Rightarrow 3\left(\frac{c}{d}\right)^2+7\cdot\frac{c}{d}+2=0$,	1p
de unde $\frac{c}{d} \in \left\{-\frac{1}{3}, -2\right\}$.	
Dacă $c = -2d$, obținem $c = \pm 2$ și $d = \mp 1$ și avem $X_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $X_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.	1p
Dacă $d = -3c$, obținem $c = \pm i$ și $d = \mp 3i$ și avem $X_3 = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & 3i \end{pmatrix}$ și $X_4 = \begin{pmatrix} -i & -2i \\ i & -3i \end{pmatrix}$.	1p
TOTAL	7p

Subiectul 2	
a) Prin inducție matematică avem că $x_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \geq 1$. Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = 1$.	3p 1p
soluție alternativă	
Inductiv, se arată că $x_n \in (0,1), \forall n \geq 1$.	1p
Din inegalitatea mediilor rezultă $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \geq \sqrt[4]{x_n} \geq x_n, \forall n \geq 1$.	1p
Deci $(x_n)_{n \geq 1}$ crescător și mărginit, de unde rezultă $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent.	1p
Prin trecere la limită în relația de recurență obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.	1p
b) Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2} \cdot \frac{\pi^2}{2^{2n+2}}$ Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - x_n) = \frac{\pi^2}{8}$.	2p 1p
TOTAL	7p

Subiectul 3	
a) Avem $0 = \det(M^n) = (\det(M))^n$, deci $\det(M) = 0$. Din egalitatea Cayley-Hamilton se obține $M^2 = \text{tr}(M) \cdot M$ și, în mod inductiv, $M^n = (\text{tr}(M))^{n-1} \cdot M$. Așadar $(\text{tr}(M))^{n-1} \cdot M = O_2$, ceea ce implică $\text{tr}(M) = 0$ sau $M = O_2$, ambele situații conducând la $M^2 = O_2$.	1p 1p 1p
b) Conform subpunctului a), $X^2 = Y^2 = O_2$. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{Z}^*$ și $A^2 = O_2$. Rezultă $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$	1p
Întrucât $b \neq 0$, avem $a+d=0$, deci $d=-a$ și $c = -\frac{a^2}{b}$. Prin urmare, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \text{ cu } b a^2.$	1p

<p>Dacă alegem $X = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -m^2 & -m \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} n & 1 \\ -n^2 & -n \end{pmatrix}$, cu $m, n \in \mathbf{Z}^*$, rezultă</p> $X - Y = \begin{pmatrix} m-n & 0 \\ n^2-m^2 & n-m \end{pmatrix} \text{ și } (X-Y)^2 = \begin{pmatrix} (m-n)^2 & 0 \\ 0 & (m-n)^2 \end{pmatrix}.$ <p>Pentru $n = 1+m$ avem $(X-Y)^2 = I_2$, deci $(X-Y)^{2006} = I_2$. Așadar, matricele</p> $X = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -m^2 & -m \end{pmatrix} \text{ și } Y = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ -(1+m)^2 & -(1+m) \end{pmatrix} \text{ cu } m \in \mathbf{Z} \setminus \{0, -1\} \text{ verifică cerințele.}$	<p>1p</p> <p>1p</p>
TOTAL	7p

Subiectul 4	
<p>Dacă $x_1 > 0$, atunci $\ln(1+x_1) > \ln 1 = 0$, deci $x_2 = x_1 + \frac{1}{\ln(1+x_1)} > 0$. Procedând inductiv obținem: $x_n > 0, \forall n \geq 1$.</p> <p>Rezultă $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\ln(n+x_n)} > 0, \forall n \geq 1$, ceea ce arată că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.</p> <p>Presupunând prin absurd că $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, rezultă că $\exists M > 0$ astfel încât $x_n \leq M, \forall n \geq 1$.</p> <p>Avem $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\ln(n+x_k)} \geq \frac{1}{\ln(n+M)}, \forall k \geq 1$ și $\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\ln(n+M)},$</p> <p>de unde obținem $x_n - x_1 \geq \frac{n-1}{\ln(n+M)}$. Prin trecere la limită, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Fals!</p> <p>Prin urmare, $(x_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit și, întrucât $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.</p> <p>Cu teorema Stolz-Cesaro avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+x_n)} = 0$.</p> <p>Apoi, din nou cu teorema Stolz-Cesaro, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \cdot x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n}}$</p> $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(n+x_n)} \cdot \frac{\ln n \cdot \ln(n+1)}{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)} \right)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(n+x_n)} \cdot \frac{\ln n \cdot \ln(n+1)}{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \ln n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \ln n} \right) = 1.$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
TOTAL	7p



Soluții și bareme de corectare orientative
Clasa a XII-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Funcția $(x, y) \rightarrow x * y$ definește o lege de compoziție pe M dacă
(\forall) $x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$.

Fie $x, y \in (-\infty, 1)$, condiția $x * y \in (-\infty, 1)$ se scrie $\frac{2024-xy}{2025-x-y} < 1$. Deoarece
 $x + y < 2 < 2025, (\forall) x, y \in (-\infty, 1) \Rightarrow 2025 - x - y > 0$, (2p)

$$\frac{2024 - xy}{2025 - x - y} < 1 \Leftrightarrow 2024 - xy < 2025 - x - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x - y + xy = (x - 1)(y - 1) > 0, (\forall) x, y \in (-\infty, 1). \quad (1p)$$

b) Legea de compoziție “*” este comutativă, dacă: $(\forall) x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x$.
 $x * y = \frac{2024-xy}{2025-x-y} = \frac{2024-yx}{2025-y-x} = y * x, (\forall) x, y \in (-\infty, 1).$ (1p)

Legea de compoziție “*” este asociativă, dacă:

$$(\forall) x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) = \frac{2024 \cdot 2025 - 2024 \cdot (x+y+z) + xyz}{2025^2 - 2024 - 2025 \cdot (x+y+z) + xy + yz + zx}. \quad (1p)$$

Legea de compoziție “*” are element neutru, dacă:

$$(\exists) e \in M \text{ astfel încât } e * x = x * e = x, (\forall) x \in M.$$

Legea de compoziție “*” este comutativă, deci este suficient să stabilim dacă
 $(\exists) e \in M$ astfel încât $x * e = x, (\forall) x \in M$. Presupunem că există $e \in (-\infty, 1)$ astfel încât
 $x * e = x, (\forall) x \in (-\infty, 1)$. Din $x * e = x \Rightarrow \frac{2024-xe}{2025-x-e} = x \Leftrightarrow x^2 - 2025 \cdot x + 2024 = 0$,
dar $x^2 - 2025 \cdot x + 2024 \neq 0, (\forall) x \in (-\infty, 1) \Rightarrow$ legea de compoziție “*” nu are
element neutru. (2p)

2. Presupunem că $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow (\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = (F(x) + C)' \Leftrightarrow \frac{\sin 7x}{\sin x} = \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x + C \right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x \Leftrightarrow \quad (3p)$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 4x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin x + (\sin 3x - \sin x) + (\sin 5x - \sin 3x) + (\sin 7x - \sin 5x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin 7x.$$

$$\text{În concluzie } \int f(x)dx = F(x) + C. \quad (4p)$$

3. a) $\text{ord}(a) = n \Rightarrow a^n = e.$ (1p)

$$h(a) = f(a) \cdot f(a^2) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}) \cdot f(a^n) = f(a) \cdot f(a^2) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}) \cdot f(e).$$

$$h(e) = f(e) \cdot f(a) \cdot f(a^2) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}) \Rightarrow h(e) = h(a), \text{ dar } a \neq e \Rightarrow \text{nu este injectivă.}$$

(2 p)



- b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x+y) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{Z}, f$ bijectivă.
Pentru $x = y = 0$ se obține $f(0) = 0$. Pentru $y = -x$ se obține
 $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in \mathbb{Z}$. **(1p)**
Prin inducție se arată că $f(n) = nf(1), (\forall) n \in \mathbb{N}$ și cu **(1)** se deduce
 $f(n) = nf(1), (\forall) n \in \mathbb{Z}$. **(2p)**
Din f bijectivă $\Rightarrow (\exists) a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = f(a) = af(1) \Rightarrow f(1) \in \{\pm 1\} \Rightarrow f(n) = n$
și $f(n) = -n$. Ambele funcții satisfac ipotezele problemei. **(1p)**

4. a) Derivând relația din enunț se obține:
 $f(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) + 2025 \cdot f'(x) + 1, (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ **(1 p)**
 $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)-1}{2 \cdot f(x)+2025} > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}, (*)$ deoarece $f(x) > 1, (\forall) x \in \mathbb{R}$. **(1 p)**
Cum $f'(x) > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe \mathbb{R} . **(1 p)**

- b) Din relația $(*)$ deducem că f' este derivabilă pe \mathbb{R} . Derivând în această relație:
 $f''(x) = \frac{f'(x) \cdot (2 \cdot f(x) + 2025) - 2 \cdot f'(x) \cdot (f(x) - 1)}{(2 \cdot f(x) + 2025)^2} =$
 $= 2027 \cdot \frac{f'(x)}{(2 \cdot f(x) + 2025)^2} > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, adică f este convexă. **(1 p)**

- Arătăm că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
Fie $a \in \mathbb{R}$. Din f convexă deducem: $f(x) \geq f(a) + (x-a) \cdot f'(a), (\forall) x \geq a$ (**).
Cum $f'(a) > 0$ obținem trecând la limită în relația (**):
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (f(a) + (x-a) \cdot f'(a)) = \infty$. **(1 p)**

Pentru calculul limitei din enunț vom folosi regula lui **L'Hospital** pentru cazul de nedeterminare $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x \cdot f'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-1}{2 \cdot f(x)+2025} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{f(x)}}{2 + 2025 \cdot \frac{1}{f(x)}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \quad \textbf{(2 p)}$$