



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

08 februarie 2025

Clasa a V-a

Subiectul 1.

a) Calculați suma cifrelor numărului $n = 2025 + 2025 \cdot 3 + 2025 \cdot 5 + \dots + 2025 \cdot 19$.

b) Determinați produsul numerelor a , b și c știind că

$$a \cdot b = 225, b \cdot c = 729 \text{ și } a \cdot (b + c) = 2250.$$

(***)

Subiectul 2.

Împărțind numărul natural x la numărul natural nenul y , obținem câtul 2 și restul 41.

a) Determinați numărul natural n cu proprietatea $10^n = 8(3x - 6y + 2)$.

b) Aflați numerele x și y , știind că $x + y \leq 167$.

(***)

Subiectul 3.

Un număr natural se numește *cub bipătratic* dacă este cub perfect și se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule diferite. Un număr natural se numește *pătrat bicubic* dacă este pătrat perfect și se poate scrie ca suma a două cuburi perfecte nenule diferite.

a) Arătați că numărul 125 este *cub bipătratic*, iar numărul 9 este *pătrat bicubic*.

b) Arătați că există o infinitate de *cuburi bipătratice* și o infinitate de *pătrate bicubice*.

(***)

Subiectul 4.

a) Arătați că $2^{75} < 3^{50}$.

b) Determinați cel mai mare număr natural n pentru care $3^{50} > 2^n$.

Supliment G.M. 11/2024

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 și 7.

Timp de lucru: 3 ore



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

8 februarie 2025

Clasa a VI-a

1. Se consideră numerele raționale x și y astfel încât $\frac{7x-5y}{4x-6y} = \frac{2}{3}$.
 - a) Aflați valoarea raportului $\frac{5x}{2y}$.
 - b) Aflați ce procent reprezintă $3x$ din $(2x + 3y)$.

2. Fie O mijlocul segmentului AB iar C un punct situat pe mediatoarea segmentului AB (punctul C diferit de punctul O). Punctele M și N sunt situate de aceeași parte cu C față de dreapta AB astfel încât unghiul $\angle MON$ este drept și punctul M este situat în interiorul $\angle AOC$. Punctul D se află în semiplanul opus determinat de dreapta AB și punctul C astfel încât:
 $\angle ABD \equiv \angle COM$.
 - a) Arătați că $\angle AOM \equiv \angle CON$.
 - b) Arătați că dreptele OM și BD sunt perpendiculare.

3. Determinați numerele naturale prime de forma \overline{ef} și numerele naturale nenule a și b care verifică egalitatea : $\overline{ef}^2 = 9 \cdot a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b]$, unde (x,y) și $[x,y]$ reprezintă cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y .

(Gazeta Matematică 6-7-8/2024)

4. Spunem despre o mulțime de numere naturale că are proprietatea “ $4d$ ” dacă orice element al său are patru divizori naturali.
 - a) Scrieți mulțimea cu proprietatea “ $4d$ ” formată din cele mai mici cinci numere naturale.
 - b) Fie M o mulțime cu proprietatea “ $4d$ ” astfel încât $8 \in M$. Arătați că, orice elemente ar avea mulțimea M , suma divizorilor acestor elemente nu poate fi 2024.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
8 februarie 2025

Clasa a VII-a

1.a) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b , unde

$$a = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}, b = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}.$$

b) Arătați că numărul

$$N = \left[(9 + 4\sqrt{5})^{2025} + \frac{1}{(9 - 4\sqrt{5})^{2027}} \right] \cdot (9 - 4\sqrt{5})^{2026} + |3 - 2\sqrt{3}| + (\sqrt{3} - 1)^2$$

este prim.

2. a) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $\sqrt{13} - 4$.

b) Calculați suma $S = [\sqrt{1 \cdot 2 + 1}] + [\sqrt{2 \cdot 3 + 1}] + \dots + [\sqrt{99 \cdot 100 + 1}]$,

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

3. Fie $ABCD$ un pătrat. Notăm cu M simetricul lui B față de C . Pe semidreapta $[CA$ se consideră punctul N astfel încât $\sphericalangle NMB = 30^\circ$. Dreapta MN intersectează AD și BD în punctele P , respectiv Q . Arătați că $BP=BQ$.

Adrian Bud, Gazeta Matematică nr. 10/2024

4. Fie triunghiul ABC în care $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ și $\sphericalangle ABC = 45^\circ$. Considerăm punctele $D \in (AC)$ și $E, F \in (AB)$ astfel încât $\sphericalangle BDC = 75^\circ$, $BE = DC = 2 \text{ cm}$, $\sphericalangle AFD = 105^\circ$.

a) Determinați lungimea segmentului DE .

b) Dacă $(EM$ este bisectoarea unghiului BED , $M \in BD$, $(EN$ este bisectoarea unghiului AED , $N \in AD$, iar $FD \cap EN = \{P\}$, arătați că patrulaterul $DMEP$ este dreptunghi.

Gabriel Tica

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa Locală- 2025

clasa a VIII-a

Subiectul 1

Se consideră expresia $E(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3) - (2x - 1)^2 - (3x + 1)(x + 1) + 12$, unde x este număr real.

- a) Arată că pentru orice număr natural par a , numărul $A = E(a) + 3$ este divizibil cu 4.
- b) Determină numerele întregi n pentru care numărul întreg $E(n)$ are valoare minimă.

Subiectul 2

Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $VA = AB = 12$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC , respectiv VO .

- a) Determină cosinusul unghiului dreptelor AC și MN .
- b) Demonstrează că dreapta MN este perpendiculară pe planul (VAD) .

Subiectul 3

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{4}}{1 + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{\sqrt{n+2}}{1 + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}} = \frac{17 + \sqrt{3}}{2}$$

Problema E16960, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2024

Subiectul 4

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Punctul M este proiecția punctului B pe dreapta $A'C$, punctul N este proiecția punctului A pe planul $(A'CD)$ și punctul P este simetricul punctului D față de punctul C .

- a) Arată că dreapta CM este perpendiculară pe planul $(C'BD)$.
- b) Demonstrează că punctele N , M și P sunt coliniare.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală

Clasa a IX-a

8 februarie 2025

Subiectul 1

Rezolvați ecuația $\left[x + \frac{1}{2}\right] = 2[x] - 3\{x\} + 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a și $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .

Gazeta Matematică nr. 9/2021

Subiectul 2

Determinați numerele reale strict pozitive a, b, c , știind că $a + b + c = 1$ și

$$ab + ac + bc = \sqrt{3abc}.$$

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2024

Subiectul 3

În triunghiul ABC , fie D, E și respectiv F punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB . Arătați că dacă $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DC}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Subiectul 4

Numerele reale strict pozitive a, b, c verifică relația $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = 27$. Arătați că $abc + a^2b + b^2c + c^2a \leq 6$.

Notă. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 8 februarie 2025
CLASA a X-a

Problema 1. a) Dacă a, b, c sunt trei numere reale pozitive pentru care $a^{\log_3 10} = 27$, $b^{\log_5 10} = 125$ și $c^{\log_{15} 5} = 225$, calculați

$$a^{(\log_3 10)^2} + b^{(\log_5 10)^2} + c^{(\log_{15} 5)^2}.$$

b) Fie a și n două numere reale strict pozitive astfel încât $\sqrt{\log_a n} = \log_a \sqrt{n}$ și $a \log_a n = \log_a an$. Să se arate că n este de forma $n = \frac{p}{q}$, unde p, q sunt numere naturale prime între ele și să se găsească valoarea expresiei $\sqrt{p} + \sqrt[4]{p^3} \cdot \sqrt{q}$.

Prof. Popescu Luminița

Problema 2. Fie $a, b, c, d \in (1, \infty)$ cu proprietatea că produsul oricăror trei dintre ele este mai mare decât al patrulea. Arătați că $\log_{\frac{bcd}{a}} a + \log_{\frac{acd}{b}} b + \log_{\frac{abd}{c}} c + \log_{\frac{abc}{d}} d \geq 2$

(***)

Problema 3. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe de modul 1 care verifică relația $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} =$

1. Determinați valoarea maximă a expresiei $E = \left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right|$.

(***)

Problema 4. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x - y) + f(y) \geq f(x^3 + y^3) + f(x), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Gazeta Matematică Nr.9/2024

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore



Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Locală

Clasa a XI-a

8 februarie 2025

Subiectul 1

Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Subiectul 2

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ și $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, $n \geq 1$.

- a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - x_n)$.

Subiectul 3

- a) Arătați că dacă M este o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M^n = O_2$, atunci $M^2 = O_2$.
- b) Arătați că există o infinitate de matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}^*)$ care au proprietățile $X^{2025} = Y^{2025} = O_2$ și $(X - Y)^{2026} = I_2$.

Subiectul 4.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\ln(n + x_n)}$, pentru $n \geq 1$. Aflați limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ și arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \cdot x_n = 1$.

Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2024

Notă. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

08.02.2025

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm $x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}$.

a) Arătați că funcția $(x, y) \rightarrow x * y$ definește o lege de compoziție pe M .

b) Demonstrați că legea de compoziție “*” este comutativă și asociativă, dar nu are element neutru.

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ și

$F(x) = x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x$. Arătați $\int f(x) dx = F(x) + C$.

3. a) Fie (G, \cdot) un grup comutativ cu elementul neutru e și $a \in G, a \neq e, a$ element de ordinul n al grupului G . Arătați că oricare ar fi o funcție $f: G \rightarrow G$, funcția $h: G \rightarrow G, h(x) = f(x) \cdot f(ax) \cdot \dots \cdot f(a^{n-1}x)$ nu este injectivă.

b) Să se determine toate automorfismele grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$ o funcție derivabilă, iar F este o primitivă a funcției care verifică relația: $F(x) = f^2(x) + 2025 \cdot f(x) + x, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

a) Să se studieze monotonia funcției f .

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x \cdot f'(x)}{x}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.