

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A V-A

Subiectul 1. Calculați numărul: $A = 2024 - 2023 + 2022 - 2021 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1$.

Subiectul 2. Aflați suma cifrelor numărului: $N = (2^{2024} + 2^{2025})(5^{2025} + 5^{2026})$.

Subiectul 3. Demonstrați că numărul $a = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{20}$ se împarte exact la 78.

Subiectul 4. Aflați numerele naturale a, b, c, d pentru care: $a^{20} + b^{25} + 20^c + 25^d = 8627$.

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A VI-A

Subiectul 1. Un unghi are măsura egală cu o cincime din măsura suplementului său.

Determinați măsura complementului acestui unghi.

Subiectul 2. Determinați $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$, astfel încât: $[a, b] \cdot (a, b) + [a, b] + (a, b) = 9$.

Subiectul 3. Demonstrați că mulțimea $A = \{1, 11, 111, \dots, \underbrace{111 \dots 11}_{97 \text{ cifre}}\}$ conține un element

care se divide cu 97.

Subiectul 4. Fie $A = \{n \in M \mid n \text{ se divide cu } 3\}$ și $B = \{n \in M \mid n \text{ se divide cu } 5\}$,

unde $M = \{0, 1, 2, 3, \dots, 2025\}$.

a) Câte elemente are mulțimea $A \cup B$?

b) Aflați suma elementelor mulțimii $A \cup B$.

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotelat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri consecutive ale unui paralelogram.

Subiectul 2. În triunghiul ascuțitunghic ABC ducem înălțimea AD , $D \in BC$.

Notăm cu E și F proiecțiile punctului D pe AB , respectiv AC .

Demonstrați că patrulaterul $BEFC$ este inscriptibil.

Subiectul 3. Calculați suma:

$$S = \left[\frac{1^2 + 0}{1} \right] + \left[\frac{2^2 + 1}{2} \right] + \left[\frac{3^2 + 2}{3} \right] + \left[\frac{4^2 + 3}{4} \right] + \dots + \left[\frac{2025^2 + 2024}{2025} \right].$$

Subiectul 4. Aflați $a, b \in \mathbb{Q}$, știind că:

$$(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^3 = 34\sqrt{2} + 27\sqrt{3} \quad \text{și} \quad (a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^4 = 88\sqrt{6} + 217.$$

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Fie $ABCD$ un tetraedru. Demonstrați că dreapta care unește centrele de greutate ale triunghiurilor ABD și ACD este paralelă cu două fețe ale tetraedrului $ABCD$.

Subiectul 2. Calculați:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2025}}.$$

Subiectul 3. Fie $x = (3 + \sqrt{5})/2$. Demonstrați că:

$$x + x^2 + x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \in \mathbb{Q}.$$

Subiectul 4. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y^2 \leq 2(x - y + 1)$. Demonstrați că $x - y < 6$.

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Faza locală – Dâmbovița
8 februarie 2025

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\sum_{k=1}^n \left[\sqrt{k^2 - k + 1} \right] = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

Subiectul 2. Fie ABC un triunghi și punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ astfel încât:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

Demonstrați că segmentele AA_1 , BB_1 , CC_1 pot fi laturile unui triunghi.

Subiectul 3. Fie P punctul de intersecție a coardelor perpendiculare AB și CD duse într-un cerc de centru O . Demonstrați că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Subiectul 4. Determinați pătratele perfecte de forma:

$$(n^2 + 9)(n^2 + 16)(n^2 + 25),$$

unde $n \in \mathbb{N}$.

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât: $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Demonstrați că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Subiectul 2. Calculați numărul: $A = [\lg 1] + [\lg 2] + \dots + [\lg 99]$.

Subiectul 3. Rezolvați în $(0, \infty)$ ecuația:

$$\sqrt[4]{x \sqrt{x}} - \frac{\sqrt[7]{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}{\sqrt[12]{x \sqrt{x}}} = 6.$$

Subiectul 4. Studiați injectivitatea și surjectivitatea funcției $f : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 2)$,

definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, prin formula: $f(n) = \{\log_2 n\} + \{\log_4 n\}$.

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați A^{2025} .

Subiectul 2. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n)!} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^3]{(2n)!}.$$

Subiectul 3. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există limita: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

și pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem: $f(2x) \leq f(x) \leq f(3x)$.

Subiectul 4. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definit, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, prin formula:

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{6 + a_{n-1}} & , \quad n \text{ par} \\ \sqrt[3]{24 + a_{n-1}} & , \quad n \text{ impar} \end{cases},$$

cu $a_0 = 0$, este convergent și calculați limita lui.

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotelat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie G un grup cu proprietatea că $xy^5 = y^5x$ și $xy^7 = y^7x$, oricare ar fi $x, y \in G$.
Demonstrați că grupul G este abelian.

Subiectul 2. Determinați grupul (G, \circ) , știind că funcția $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow G$, $f(x) = 2x + 1$ este izomorfism de grupuri de la (\mathbb{R}_+^*, \cdot) la (G, \circ) .

Subiectul 3. Calculați:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \cos^2 x}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

Subiectul 4. Demonstrați că:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \cdot \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 1} dx < \frac{1}{2}.$$

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.