

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapă locală – Constanța, 08.02.2025
Clasa a X-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Fie $a \in (-1, 1)$ și $z \in \mathbb{C}$. Arătați că $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z - a| \leq \frac{1-a}{2} \cdot |z+1| + \frac{1+a}{2} \cdot |z-1|$.

Gazeta Matematică, nr. 10/2024

Soluție

$$|z - a| = |\operatorname{Re}(z) - a + i \cdot \operatorname{Im}(z)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z) - a)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \geq |\operatorname{Im}(z)| \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{1-a}{2} \cdot |z+1| + \frac{1+a}{2} \cdot |z-1| = \left| \frac{1-a}{2} \cdot (z+1) \right| + \left| \frac{1+a}{2} \cdot (z-1) \right| \geq \left| \frac{1-a}{2} \cdot (z+1) + \frac{1+a}{2} \cdot (z-1) \right| = |z - a| \dots\dots\dots 4p$$

SUBIECTUL 2

Fie $a = \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$.

a) Să se arate că $a^3 - 3a \in \mathbb{N}$.

b) Calculați $\log_a(3a+10) + \log_{3a+10} a + \log_a \left(a - \frac{3}{a}\right) + \log_{\frac{1}{a}}(a^2 - 3)$

Gheorghe Andrei

Soluție

a) $a^3 = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[3]{25-24} \cdot a = 10 + 3a$
 $a^3 - 3a = 10 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 3p$

b) $\log_a a^3 + \log_{a^3} a + \log_a \frac{a^2-3}{a} + \log_{\frac{1}{a}}(a^2-3) =$
 $3 + \frac{1}{3} + \log_a(a^2-3) - 1 - \log_a(a^2-3) = \frac{7}{3} \dots\dots\dots 4p$

SUBIECTUL 3

Fie $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x)f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}\}$ și $H(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$.

a) Arătați că există $g \in F$ și aflați $H(g)$.

b) Arătați că dacă $f \in F$ atunci f nu este surjectivă.

c) Fie $f \in F$. Arătați că f este injectivă dacă și numai dacă $H(f) = \{0\}$.

Soluție

a) Un exemplu: $g(x) = 2^x$, $H(g) = \{0\} \dots\dots\dots 1p$

b) $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ nu este surjectivă $\dots\dots\dots 2p$

c) $x = y = 0 \Rightarrow f^2(0) = f(0) \Rightarrow f(0) \in \{0, 1\}$

“ \Rightarrow ” f injectivă $\Rightarrow f(0) = 1$ ($f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ soluție unică $\Rightarrow H(f) = \{0\}$...2p

“ \Leftarrow ” $H(f) = \{0\} \Rightarrow f(0) = 1$ soluție unică

$$f(x) \cdot f(-x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}, (\forall) x \in \mathbb{R}$$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{f(a)}{f(b)} = 1 \quad (f(b) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ contradicție})$$

$$\Rightarrow f(a) \cdot f(b) = 1 \Rightarrow f(a-b) = 1 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b, \text{ deci } f \text{ injectivă.....2p}$$

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O și rază 1 și G centrul său de greutate. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor GA, GB respectiv GC . Să se arate că dacă $OM^2 + ON^2 + OP^2 = \frac{3}{4}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

Cătălin Zîrnă

Soluție

În sistemul xOy , $OA = 1$, considerăm $a, b, c \in \mathbb{C}$ afixele vârfurilor $A, B, C \Rightarrow |a| = |b| = |c| = 1$

Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , $g = \frac{a+b+c}{3}$

$$M\left(\frac{a+g}{2}\right), N\left(\frac{b+g}{2}\right), P\left(\frac{c+g}{2}\right) \dots\dots\dots 3p$$

$$OM^2 + ON^2 + OP^2 = \left|\frac{a+g}{2}\right|^2 + \left|\frac{b+g}{2}\right|^2 + \left|\frac{c+g}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}((a+g)(\bar{a}+\bar{g}) + (b+g)(\bar{b}+\bar{g}) + (c+g)(\bar{c}+\bar{g}))$$

$$= \frac{1}{4}(3+3|g|^2 + (a+b+c)\bar{g} + \overline{(a+b+c)}g) = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}|g|^2$$

$$\Rightarrow g = 0 \Rightarrow O = G \Rightarrow \Delta ABC \text{ echilateral.....4p}$$

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .