
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 08.02.2025

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\det(A + x \cdot I_3) = 0$.
- b) Demonstrați că $\det(A + I_3) \cdot \det(A + 2I_3) \cdot \det(A + 3I_3) \cdot \dots \cdot \det(A + 2024I_3)$ este divizibil cu $2025!$ (s-a notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

* * *

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care $A(A + B)B = B(A + B)A$.

- a) Dacă $\text{Tr}(A + B) \neq 0$, arătați că $AB = BA$.
- b) Rămâne valabilă concluzia de la a) dacă $\text{Tr}(A + B) = 0$?

Gazeta Matematică, nr. 10/2024

SUBIECTUL 3

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x_n \leq x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

- a) dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior, atunci $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent;
- b) dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este mărginit superior, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit astfel: $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \frac{1 + n \cdot a_n^2}{n \cdot a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$.
- b) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} = \frac{1}{2}$.

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.