

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**Clasa a IX-a**

- Timp de lucru 180 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

**Problema 1.** Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot x + 1$

- (a) Rezolvați ecuația:  $\left[\frac{f(x)}{x}\right] = 3$ , unde  $[t]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $t$   
(b) Arătați că, dacă  $a, b, c \in \mathbb{N}$  și

$$f(a\sqrt{2}) + f(b\sqrt{3}) + f(c\sqrt{5}) = 3,$$

atunci  $a = b = c$

SGM 9/2024

**Problema 2.** Se consideră expresia  $E(x, y) = x^2 + xy + y^2$ , unde  $x, y \in (0, \infty)$

- (a) Arătați că, dacă  $xy = 3$  și  $x + y \geq 2$ , atunci  $E(x, y) \geq 1$ ,  
(b) Determinați numerele prime  $p$  și  $q$  pentru care  $E(p, q) = 2p + 7q$

GM 6-7-8/2024

**Problema 3.** Determinați numerele întregi  $n$  pentru care

$$2^n = n^2.$$

**Problema 4.** Se consideră un triunghi ascuțitunghic  $ABC$  înscris în cercul de centru  $O$  și rază  $R$ , având ortocentrul  $H$  și centrul de greutate  $G$ .

- (a) Arătați că, dacă  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OG}$ , atunci triunghiul  $ABC$  este echilateral.  
(b) Demonstrați că  $HL + LO \geq R$ , pentru orice punct  $L \in (BC)$ .

SGM 3/2024

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**BAREME Clasa a IX-a**

**Problema 1.**

- (a)  $\left[\frac{f(x)}{x}\right] = 2 + \left[\frac{1}{x}\right] = 3 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 1$ ; cum  $x > 0$ , se obține  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$  (4p)  
(b) se ajunge imediat la  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = -c\sqrt{5}$ , de unde  $2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = 5c^2$  și astfel  $2ab\sqrt{6} = p \in \mathbb{Q}$ . Dacă  $ab \neq 0$ , atunci  $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ , fals, așadar  $ab = 0$  și, continuând,  $a = b = c = 0$ . (3p)

**Problema 2.**

- (a)  $E(x, y) = (x + y)^2 - xy \geq 4 - 3 = 1$ , (3p)  
(b) \* Dacă  $p = 2$ , se obține  $q = 5$

\* Dacă  $q = 2$ , se obține  $p^2 = 10$ , absurd

\* Dacă  $p = 3$  sau  $q = 3$  se obține  $q = 3$ , respectiv  $p = 3$  (2p)

\* Înmulțind cu 2 egalitatea din enunț se ajunge la  $(p + q)^2 + (p - 2)^2 + (q - 7)^2 = 53$ , care nu are soluții pentru  $p \geq 5$  și  $q \geq 5$

\* Așadar  $p = 2, q = 5$  sau  $p = q = 3$  (2p)

**Problema 3.**

\* Pentru orice  $n \in \mathbb{Z}, n \leq -1$ , avem  $2^n < 1$  și  $n^2 \geq 1$ , iar pentru  $n = 0$  egalitatea  $2^0 = 0$  este falsă, așadar niciun număr întreg  $n \leq 0$  nu verifică egalitatea (1p)

\* Numerele naturale  $n = 1, n = 3$  nu verifică egalitatea, numerele naturale  $n = 2$  și  $n = 4$  verifică egalitatea. (3p)

\* Se demonstrează inductiv că  $2^n > n^2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ . Așadar  $n = 2$  sau  $n = 4$ . (3p)

**Problema 4.**

(a) Evident că orice soluție corectă și completă primește punctajul maxim (4p)

(b) Notăm cu  $T$  punctul de intersecție dintre  $AH$  și cercul circumscris triunghiului  $ABC$ . Deoarece  $\sphericalangle TBC = \sphericalangle TAC = \sphericalangle HBC$ , deducem că triunghiul  $BHT$  este isoscel. Așadar  $T$  este simetricul lui  $H$  față de  $BC$ , deci  $HL + LO = TL + LO \geq TO = R$  (3p)