

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025
Clasa a XII-a

- Timp de lucru 180 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

Problema 1. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$, unde $i^2 = -1$. Arătați că $\mathbb{Z}[i]$ are o structură de monoid comutativ în raport cu înmulțirea numerelor complexe și determinați mulțimea elementelor simetrizabile ale acestui monoid.

SGM 9/2024

Problema 2. Arătați că, dacă (G, \cdot) este un grup cu proprietatea că există o funcție injectivă $f : G \rightarrow G$ și un număr natural nenul n astfel încât:

$$x \cdot f(x^n \cdot f(y)) = x^{n+2} \cdot f(xy), \forall x, y \in G,$$

atunci grupul G este abelian.

Problema 3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg(x)$.

(a) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $x - 1 + n \cdot f(x) = 0$ are o unică soluție $x_n \in (0, 1)$ și determinați $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(b) Calculați $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \int_0^n f(x) dx$.

Problema 4. Se notează cu \mathcal{F} mulțimea funcțiilor $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ derivabile, cu derivata strict crescătoare și pentru care $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$.

- (a) Arătați că $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
(b) Demonstrați că, pentru orice $f \in \mathcal{F}$, este adevărată inegalitatea:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+f(x)} dx \leq f(1).$$

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025
Bareme, Clasa a XII-a

Problema 1.

- pentru orice $x = a + bi, y = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ avem $x \cdot y \in \mathbb{Z}[i]$; înmulțirea este asociativă, comutativă pe $\mathbb{Z}[i]$ și are elementul neutru $e = 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$ (4p)
- Mulțimea elementelor inversabile ale monoidului este $U(\mathbb{Z}[i]) = \{-1, 1, -i, i\}$ (3p)

Problema 2.

- Pentru $x = e$ se obține $f(f(y)) = f(y), \forall y \in G$; cum f este injectivă se deduce că $f(y) = y, \forall y \in G$ (2p)

- Egalitatea din enunț devine $x^{n+1}y = x^{n+3}y$; de unde $x^2 = e, \forall x \in G$ (2p)

- Acum: $xy = yx, \forall x, y \in G$ (3p)

Problema 3.

(a) Funcția $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 1 + n \cdot \arctg(x)$ este continuă și $g(0) = 1, g(1) = \frac{n\pi}{4} > 0$ conduce la existența unui $x_n \in (0, 1)$ cu $g(x_n) = 0$ (2p)

Deoarece $g'(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$, deducem că g este strict crescătoare, deci x_n este unica soluție (1p)

Din $0 = g(x_n) = x_n - 1 + n \cdot \arctg(x_n)$ avem $0 < \arctg(x_n) = \frac{1 - x_n}{n} < \frac{1}{n}$ și imediat $L = \lim_{n \rightarrow \infty} = 0$ (1p)

(b) $\frac{1}{n} \cdot \int_0^n (\arctg(x) dx) = \frac{1}{n} \left(n \cdot \arctg(n) - \frac{1}{2} \ln(1 + n^2) \right) = \arctg(n) - \frac{\ln(1 + n^2)}{2n},$ (2p)

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + n^2)}{2n} = 0$, rezultă $M = \frac{\pi}{2}$. (1p)

Problema 4.

(a) Orice exemplu corect și justificat (de exemplu $f(x) = x^2 + x, x \in [0, 1]$) conduce la $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (3p)

(b) Cum $f'(0) = 1, \forall x \in [0, 1]$, deci f este strict crescătoare și astfel pentru $0 \leq x \leq 1$ avem $0 \leq f(x) \leq f(1)$, de unde $1 \leq 1 + f(x)$ sau $\frac{1}{1 + f(x)} \leq 1,$ (2p)

de unde $\int_0^1 \frac{1}{1 + f(x)} dx \leq \int_0^1 dx = 1$ (1p)

Se arată acum că $f(1) \geq 1$ și astfel se obține inegalitatea din enunț (1p)