



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**Clasa a VI-a**

- Timp de lucru 120 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

**Problema 1.** Aflați numerele naturale  $\overline{abc}$ , scrise în baza zece, știind că  $\overline{abc} = 18 \cdot a \cdot b \cdot c$ .  
(Monica Sas)

**Problema 2.** Considerăm mulțimile:

$$A = \{x^y + y^z \mid x, y, z \in \{2, 3, \dots, 10\}\} \text{ și } B = \{a^b + b^a \mid a \text{ și } b \text{ sunt numere prime}\}$$

- a) Dați exemplu de un element care aparține mulțimii  $B$ .
- b) Verificați dacă  $\{2024, 2025\} \subset A$ ;
- c) Stabiliți dacă  $2027 \in B$ .

(SGM 9/2024, enunț ușor modificat)

**Problema 3.** Aflați numerele naturale  $a, b, c$  a căror sumă este egală cu 90 și sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive nedivizibile cu 4.

(S.G.M. 11/2010)

**Problema 4.** În interiorul unghiului  $\angle AOB$  se construiesc semidreptele  $[OC$  și  $[OD$  astfel încât  $OC \perp OA$ ,  $\angle COD = 20^\circ$ . Fie  $[OE$  bisectoarea  $\angle AOD$  și  $[OF$  bisectoarea  $\angle BOC$ . Știind că  $\angle EOF = 70^\circ$ , determinați măsura unghiului format de semidreapta  $[OC$  cu bisectoarea unghiului  $\angle AOB$ .

(S.G.M. 5/2024)

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**BAREME Clasa a VI-a.**

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

**Problema 1.**

$\overline{abc}:18$  implică  $\overline{abc}:2$  și  $\overline{abc}:9$ , cu  $a, b, c \neq 0$ . Deci  $c \in \{2, 4, 6, 8\}$  și  $a + b + c \in \{9, 18, 27\}$  (2p)  
Cazul I  $a + b + c = 9$

- 1)  $c = 2$  implică  $a + b = 7$  și din  $100a + 10b + 2 = 18 \cdot a \cdot b \cdot 2$  rezultă  $4 = a(2b - 5)$ , de unde  $2b - 5 = 1$  și  $b = 3$ , iar  $a = 4$ . obținem  $\overline{abc} = 432$ .
- 2)  $c = 4$  implică  $a + b = 5$  și din  $100a + 10b + 4 = 18 \cdot a \cdot b \cdot 4$  rezultă  $3 = a(4b - 5)$ , de unde  $4b - 5 = 3$  și  $b = 2$ , iar  $a = 1$ . (Fals).
- 3)  $c = 6$  implică  $a + b = 3$  și din  $100a + 10b + 6 = 18 \cdot a \cdot b \cdot 6$  rezultă  $2 = a(6b - 5)$ , de unde  $6b - 5 = 1$  și  $b = 1$ , iar  $a = 2$ . obținem  $\overline{abc} = 216$ .
- 4)  $c = 8$  implică  $a + b = 1$  (Fals).

(2p)

Cazul II  $a + b + c = 18$

- 1)  $c = 2$  implică  $a + b = 16$  și  $9 = a(2b - 5)$ , de unde  $2b - 5 \in \{1, 3, 9\}$ , adică  $b \in \{3, 4, 7\}$  și  $a \in \{9, 3, 1\}$  (Fals);
- 2)  $c = 4$  implică  $a + b = 14$  și  $8 = a(4b - 5)$ , (Fals);
- 3)  $c = 6$  implică  $a + b = 12$  și  $7 = a(6b - 5)$ , de unde  $6b - 5 = 1$ , și  $b = 1$  iar  $a = 7$  (Fals);

4)  $c = 8$  implică  $a + b = 10$  și  $6 = a(8b - 5)$ , de unde  $8b - 5 = 3$ , și  $b = 1$  iar  $a = 2$  (Fals);

(2p)

Cazul III  $a + b + c = 27$  implică  $a = b = c = 9$  (Fals) (2p).

(1p)

### Problema 2.

a) Un exemplu.

(1p)

b) Dacă  $x = 2, y = 10$  și  $z = 3$  obținem  $2^{10} + 10^3 = 2024 \Rightarrow 2024 \in A$

Dacă  $x = 3, y = 6$  și  $z = 4$  obținem  $3^6 + 6^4 = 2025 \Rightarrow 2025 \in A$

Deci,  $\{2024, 2025\} \subset A$ .

(2p)

c) Presupun că  $2027 \in B$ , ceea ce implică  $a^b + b^a = 2027$ , de unde rezultă că  $a$  și  $b$  au parități diferite.

Întrucât  $a$  și  $b$  sunt numere prime, deducem că unul dintre ele este 2, iar celălalt impar.

(1p)

Fie  $a = 2$  și  $b = \text{impar}$ . Se obține  $2^b + b^2 = 2027$ , de unde deducem că  $b \in \{3, 5, 7\}$ . Analizând cele trei cazuri se constată că sunt false.

Cazul  $b = 2$  și  $a = \text{impar}$  este analog, de unde deducem că  $2027 \notin B$ .

(3p).

### Problema 3.

Fie cele trei numere consecutive  $4k + 1, 4k + 3$ , respectiv  $4k + 3$ .

Din  $\frac{a}{4k+1} = \frac{b}{4k+2} = \frac{c}{4k+3} = \frac{90}{12k+6} = \frac{30}{4k+2}$ , obținem  $b = 30$

(2p)

Cum  $a = \frac{30(4k+1)}{4k+2}$  și  $a \in \mathbb{N}$  deducem că  $(4k+2) \mid 30(4k+1)$

(2p)

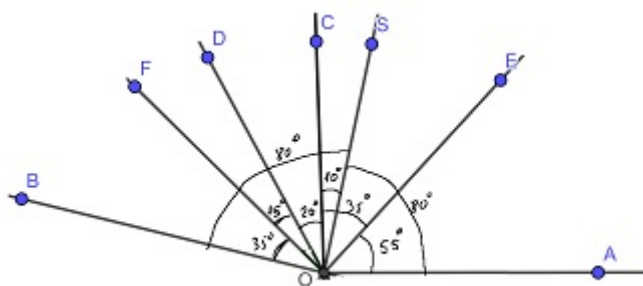
Întrucât  $4k+1$  și  $4k+2$  sunt numere prime între ele,  $(4k+2) \mid 30 \Rightarrow (4k+2) \in \{2, 6, 10, 30\} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 7\}$

(2p)

Deci,  $(a, b, c) \in \{(15, 30, 45), (25, 30, 35), (27, 30, 33), (29, 30, 31)\}$

(1p)

### Problema 4.



Cazul I (4p)

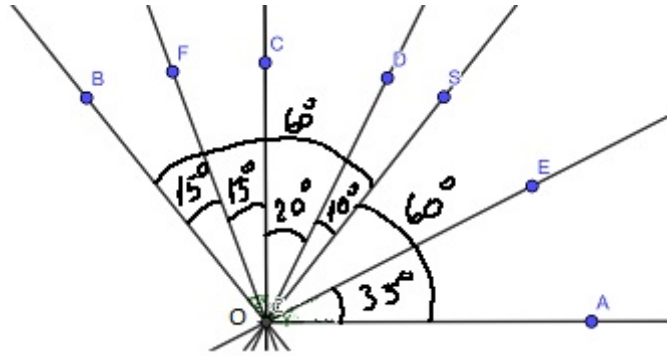
$[OD \subset \text{Int}(\angle BOC), \angle AOD = \angle AOC + \angle COD = 110^\circ, [OE = \text{bis}(\angle AOD)$  implică  $\angle AOE \equiv \angle EOD = \frac{\angle AOD}{2} = 55^\circ$ .  $\angle COE = \angle DOE - \angle DOC = 35^\circ; \angle EOD = \angle EOC + \angle COD = 55^\circ; \angle FOD = \angle EOF - \angle EOD = 15^\circ$

$[OF = \text{bis} \angle BOC \Rightarrow \angle BOF \equiv \angle FOC = \frac{\angle BOC}{2} = 35^\circ \Rightarrow \angle BOC = 70^\circ$ .  $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 160^\circ$ .

Fie  $[OS = \text{bis} \angle AOB \Rightarrow \angle AOS \equiv \angle SOB = \frac{\angle AOB}{2} = 80^\circ$ .  $\angle COS = \angle AOC - \angle AOS = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$ .

Cazul II (3p)

(3p)



$$[OD \subset \text{Int}(\angle AOC), \angle AOD = \angle AOC - \angle COD = 70^\circ$$

$$[OE = \text{bis}\angle AOD \Rightarrow \angle AOE \equiv \angle EOC = \frac{\angle AOD}{2} = 35^\circ. \angle COF = \angle EOF - (\angle EOD + \angle COD) = 15^\circ$$

$$[OF = \text{bis}\angle BOC \Rightarrow \angle BOF \equiv \angle COF = \frac{\angle BOC}{2} = 15^\circ. \Rightarrow \angle BOC = 30^\circ.$$

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

$$[OS = \text{bis}\angle AOB \Rightarrow \angle AOS \equiv \angle SOB = \frac{\angle AOB}{2} = 60^\circ.$$

$$\angle DOS = \angle AOD - \angle AOS = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ.$$

$$\angle COS = \angle COD + \angle DOS = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ.$$