

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025
Clasa a VIII-a

- Timp de lucru 180 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

Problema 1.

Fie numerele reale $x, y \in [0, 1]$. Demonstrați că $\frac{1}{x+y+1} - 1 \leq \frac{xy}{3} - \frac{x+y}{2}$.

Problema 2.

Fie numărul $A = (a^2 - 2a + 3)(a^2 - 2a - 33) + 324$, $a \in \mathbb{N}$.

- Arătați că numărul A este pătrat perfect pentru orice număr natural a .
- Demonstrați că pentru orice număr natural impar a , numărul A este divizibil cu 16.

Problema 3.

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Notăm cu M și P mijloacele muchiilor AB , respectiv DD' . Demonstrați că $MP \perp A'C$.

Problema 4.

Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V și O centrul bazei ABC . Fie M mijlocul muchiei AB și CP bisectoarea unghiului $\angle VCM$, unde $P \in VM$. Arătați că $OP = 2 \cdot OM$ dacă și numai dacă $VA = AB\sqrt{3}$.

Supliment GM, nr. 9-2024

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025
BAREME Clasa a VIII-a.

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

Problema 1.

$$x, y \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow 1 - y \geq 0 \end{cases}$$

Aducând relația la același numitor, obținem $\frac{1-x-y-1}{x+y+1} \leq \frac{2xy-3x-3y}{6}$, de unde

$$-6x - 6y \leq 2x^2y + 2xy^2 + 2xy - 3x^2 - 3xy - 3x - 3xy - 3y^2 - 3y. \quad (1p)$$

$$\text{Reducând termenii asemenea, avem } 2x^2y + 2xy^2 - 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 3x + 3y \geq 0 \quad (1p)$$

$$\text{Grupând convenabil termenii, obținem: } (2x^2y - 2x^2 - 2xy + 2x) + (2xy^2 - 2y^2 - 2xy + 2y) + x + y - x^2 - y^2 \geq 0 \quad (2p)$$

Descompunem în factori și obținem $2(1-x)(1-y)(x+y) + x(1-x) + y(1-y) \geq 0$, care este evident (2p)

Finalizare (1p)

Problema 2.

- Notăm $n = a^2 - 2a$. Atunci $A = (n+3)(n-33) + 324 = (n-15)^2$. (2p)
 $A = (a^2 - 2a - 15)^2$ (1p)

$$\text{b) } a^2 - 2a - 15 = (a - 5)(a + 3) \quad (1\text{p})$$

$$\text{pentru } a = 2k + 1, \text{ avem c\^a } (a - 5)(a + 3) = 4(k - 2)(k + 2) \quad (2\text{p})$$

$$\text{Deducem c\^a } A \text{ este divizibil cu } 16. \quad (1\text{p})$$

Problema 3.

Fie O mijlocul lui $A'C$ (1p)

Demonstr\^am c\^a $A'M = MC$ (1p)

Triunghiul $MA'C$ este isoscel, deci $A'C \perp MO$ (1p)

Analog, triunghiul $PA'C$ este isoscel, deci $A'C \perp PO$ (2p)

Avem $A'C \perp MO, A'C \perp PO, MO, PO \subset (MOP)$, de unde $A'C \perp (MOP)$ (1p)

$MP \subset (MOP)$, de unde $A'C \perp MP$ (1p)

Problema 4.

$$OM = \frac{AB\sqrt{3}}{6} \quad (1\text{p})$$

$$\text{Dac\^a } VA = AB\sqrt{3}, \text{ din teorema bisectoarei avem c\^a } \frac{VP}{PM} = \frac{VC}{CM} = \frac{VA}{CM} = \frac{AB\sqrt{3}}{\frac{AB\sqrt{3}}{2}} = 2 \quad (1\text{p})$$

$$\text{Dar, } \frac{CO}{OM} = 2, \text{ deducem } OP \parallel VC. \quad (1\text{p})$$

$$\text{Deci } OP = \frac{VC}{3} = \frac{VA}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = 2OM \quad (1\text{p})$$

Reciproc, dac\^a $OP = 2OM$, de unde $OP = CO$, deci triunghiul OPC este isoscel. (1p)

Cum CP este bisectoarea $\angle VCM$, deducem $OP \parallel VC$. (1p)

$$\text{Rezult\^a c\^a } 3OP = VC = VA, \text{ deci } 6OM = VA, \text{ de unde } 6\frac{AB\sqrt{3}}{6} = VA. \text{ Ob\^tinem c\^a } VA = AB\sqrt{3}. \quad (1\text{p})$$