

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**Clasa a XI-a**

- Timp de lucru 180 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

**Problema 1.** Se consideră mulțimea  $H$  a matricelor de forma

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & 10x \\ -2x & 1-4x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

unde  $x \neq -1$ .

- (a) Arătați că, pentru orice  $A, B \in H$ , avem:  $A \cdot B \in H$ .
- (b) Determinați cel mai mic număr natural nenul  $n$  pentru care  $(A(1))^n = A(t)$ ,  
cu  $t > 2025$ .

**Problema 2.** Se spune că o matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  este *involutivă* dacă  $A^2 = I_2$  și că este *idempotentă* dacă  $A^2 = A$

- (1) Dați un exemplu de matrice  $X$  *idempotentă*,  $X \neq O_2$ ,  $X \neq I_2$ ,
- (2) Arătați că, dacă  $A$  este *involutivă*, atunci matricea  $B = \frac{1}{2}(A + I_2)$  este *idempotentă*,  
iar dacă  $A$  este *idempotentă*, atunci matricea  $C = 2A - I_2$  este *involutivă*,
- (3) Demonstrați că există o infinitate de matrice *involutive* cu toate elementele numere  
întregi.

SGM 9/2024

**Problema 3.** Arătați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , definit prin  $a_1 = 1$  și  $a_{n+1} = 3 + \frac{a_n}{2}$ ,  $\forall n \geq 1$ , este  
convergent și determinați limita sa.

**Problema 4.** Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 = 0$  și  $x_{n+1} = \sqrt{1 + n \cdot x_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- (1) Demonstrați că  $n - 2 \leq x_n \leq n - 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;
- (2) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - x_n) = 2$  și determinați numărul real  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n}\right)^n$ .

GM 12/2023

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**Bareme, Clasa a XI-a**

**Problema 1.**

- (a) Considerăm  $A(x) = I_2 + x \cdot M$ , unde  $M = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ;  
cum  $M^2 = M$ , deducem  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy)$  (3p)  
În plus, pentru  $x \neq -1, y \neq -1$ , avem și  $x + y + xy \neq -1$ , deci  $A(x) \cdot A(y) \in H$ . (1p)
- (b)  $(A(1))^2 = A(3)$ ,  $(A(1))^3 = A(7)$  și se demonstrează inductiv că  
 $(A(1))^n = A(2^n - 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  (2p)  
Din  $t = 2^n - 1 > 2025$ , obținem  $n_{\min} = 11 \in \mathbb{N}$  (1p)

**Problema 2.**

(1) Orice exemplu corect și justificat... (3p)

(2) Calcule imediate:  $B^2 = B, C^2 = I_2$  (2p)

(3) De exemplu:  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{Z}$ , sunt involutive... (2p)

**Problema 3.**

• Se demonstrează inductiv că  $a_n < 6, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , (3p)

• apoi  $a_{n+1} - a_n = \frac{6 - a_n}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  (2p)

• Șirul este deci strict crescător și mărginit, cu limita finită  $L$ . Imediat se obține  $L = 6$ , (2p)

**Problema 4.**

(1)  $x_1 = 0, x_2 = 1$  și dacă  $k - 2 \leq x_k \leq k - 1, k \geq 1$ , obținem  $k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 \leq 1 + kx_k \leq k^2 - k + 1 \leq k^2$ , de unde  $k - 1 \leq x_{k+1} \leq k$ , așadar am demonstrat inductiv inegalitățile propuse. (3p)

(2) Cu criteriul cleștelui, din inegalitățile (a) avem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$

Considerăm șirul  $y_n = n - x_n$  și  $n - 2 \leq x_n \leq n - 1$  conduce la  $y_n \in (1, 2)$  și

$$|y_{n+1} - 2| = \frac{|y_n - 2|}{1 - \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{y_n}{n}}}, \forall n \geq 1,$$

Deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|y_{n+1} - 2|}{y_n - 2} = \frac{1}{2}$ ; cu criteriul raportului avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - 2| = 0$  și astfel  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$  (2p)

În final:  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-y_n}{n}\right)^{\frac{n}{-y_n} \cdot (-y_n)} = e^{-2}$ . (2p)