

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”  
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 –

CLASA a XII-a  
SECȚIUNEA H1 – Filiera tehnologică – toate profilurile

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Fie funcțiile  $f, F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^3 + x - 1) \ln x$  și  $F(x) = x \left( \frac{x^3}{4} + ax - b \right) \ln x - x(cx^3 + dx - 1)$ .

4p a) Determinați  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F$  să fie o primitivă a lui  $f$  pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

3p b) Determinați  $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f$  astfel încât  $G(e) = \frac{e^4}{16}$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f$ , atunci $F$ este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $F'(x) = f(x), (\forall) x \in (0, +\infty)$	1p
$F'(x) = (x^3 + 2ax - b) \ln x + \left( \frac{1}{4} - 4c \right) x^3 + (a - 2d)x - b + 1, (\forall) x \in (0, +\infty)$	1p
Se obține că $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{16}, d = \frac{1}{4}$	2p
b) Fie $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - x \left( \frac{x^3}{16} + \frac{x}{4} - 1 \right) + k$ primitiva lui $f$ cu proprietatea că $G(e) = \frac{e^4}{16}$	1p
$G(e) = \frac{3e^4}{16} + \frac{e^2}{4} + k$ , deci $k = -\frac{e^2(e^2 + 2)}{8}$	1p
Primitiva căutată este	1p
$G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - x \left( \frac{x^3}{16} + \frac{x}{4} - 1 \right) - \frac{e^2(e^2 + 2)}{8}$	

Enunț subiect 2:

Se consideră funcția continuă  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 4}, & x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{3\sqrt{x}}, & x \in [1, 2] \end{cases}$ .

3p a) Calculați  $\int_0^2 f(x) dx$ .

4p b) Determinați  $k \in (0, \infty)$  astfel încât  $\int_0^{\frac{k}{k+1}} f(\sqrt{x}) dx = \ln \frac{7}{8}$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) <math>f</math> continuă <math>\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx =</math></p> $= \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx + \int_1^2 \left( -\frac{1}{3\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left  \frac{x-2}{x+2} \right _0^1 - \left( \frac{2\sqrt{x}}{3} \right) \Big _1^2 = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$	<p>1p</p> <p>2p</p>
<p>b) <math>k \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{k}{k+1} \in (0; 1); x \in \left( 0; \frac{k}{k+1} \right) \Rightarrow \sqrt{x} \in (0; 1) \Rightarrow f(\sqrt{x}) = \frac{1}{x-4}</math></p> $\int_0^{\frac{k}{k+1}} f(\sqrt{x}) dx = \int_0^{\frac{k}{k+1}} \frac{1}{x-4} dx = \ln  x-4  \Big _0^{\frac{k}{k+1}} = \ln \frac{3k+4}{4(k+1)}$ $\ln \frac{3k+4}{4(k+1)} = \ln \frac{7}{8} \Rightarrow k = 1$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

### Enunt subject 3:

Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ .

7p

Determinați cardinalul mulțimii  $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ simetrizabil în raport cu legea „o”}\}$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Determinarea elementului neutru $e = 3$	2p
Calculul lui $x' = \frac{2x-3}{x-2}$ pentru $x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}$	2p
Condiția ca $x' = \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{Z}$	1p
Determinarea mulțimii $S = \{1; 3\}$ și $\text{card}(S) = 2$	2p

### Enunt subiect 4:

Se consideră mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x-1| \leq 5\}$  și operația algebrică  $x * y = \max\{x, y\}$ ,  $(\forall) x, y \in M$ .

**2p**

**a)** Dacă  $a$  este cel mai mic element al mulțimii  $M$  și  $b$  este cel mai mare element al acesteia, calculați  $a * b$ .

**3p**

**b)** Determinați mulțimea  $M_1 \cap M_2$ , unde  $M_1 = \{x \in M \mid 2 * x = x\}$  și  $M_2 = \{x \in M \mid x * 2 = 2\}$ .

2p

c) Determinați perechile de numere  $(x, y)$ , cu  $x, y \in M$  care verifică sistemul 
$$\begin{cases} x * 0 = y \\ y * 0 = x \end{cases}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
<b>a)</b> $M = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ $a = -2$ , $b = 3$ și $a * b = \max(-2, 3) = 3$	<b>1p</b>  <b>1p</b>
<b>b)</b> $2 * x = x \Rightarrow x \in \{2; 3\} = M_1$ $x * 2 = 2 \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} = M_2$ $M_1 \cap M_2 = \{2\}$	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
<b>c)</b> Din cele două ecuații din sistem se obține $(x * 0) * 0 = x$ care este verificată de numerele $x \in \{0; 1; 2; 3\}$ , pentru care se obține $y \in \{0; 1; 2; 3\}$ Soluțiile sistemului sunt $\{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3)\}$	<b>2p</b>