



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 –

CLASA a XII-a

SECȚIUNEA H2 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Fie mulțimea $G = \left[\frac{k^2 + 1}{k}, +\infty \right)$, cu $k \in (1, +\infty)$ și operația asociativă $x * y = kxy - k^2(x + y) + k^3 + k$,
 $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

3p a) Arătați că mulțimea G este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} în raport cu operația dată.

4p b) Determinați numerele $x, k \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$ și $k \geq 2$, știind că $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2025} = \frac{13^{2025}}{k} + k$.

Subiectul 2

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$.

4p a) Demonstrați că (G, \cdot) este grup.

3p b) Știind că $\left(\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \circ \right)$ este un grup, unde $x \circ y = 2xy - x - y + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$,
arătați că acesta este izomorf cu grupul (G, \cdot) .

Subiectul 3

Se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{2x} + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

3p a) Determinați primitiva funcției f_0 al cărei grafic conține punctul $A\left(0, \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2p b) Calculați $\int f_3(x) dx$.

2p c) Arătați că orice primitivă a funcției f_1 are un singur punct de inflexiune.

Subiectul 4

7p Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_1^x \left(x + \frac{4}{x} - 5 \right) dx$. Determinați valoarea minimă a funcției f .