

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”  
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 –

CLASA a XII-a  
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Fie mulțimea  $G = \left[ \frac{k^2 + 1}{k}, +\infty \right)$ , cu  $k \in (1, +\infty)$  și operația asociativă  $x * y = kxy - k^2(x + y) + k^3 + k$ ,  
 $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$ .

3p a) Arătați că mulțimea  $G$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbb{R}$  în raport cu operația dată.

4p b) Determinați numerele  $x, k \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq 2$  și  $k \geq 2$ , știind că  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2025} = \frac{13^{2025}}{k} + k$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $x, y \in G \Rightarrow x, y \in \left[ \frac{k^2 + 1}{k}, +\infty \right) \Rightarrow x - k \geq \frac{1}{k} > 0$ și $y - k \geq \frac{1}{k} > 0$ deci $(x - k)(y - k) \geq \frac{1}{k^2} \Rightarrow k(x - k)(y - k) \geq \frac{1}{k}$ și deducem că $x * y \geq \frac{k^2 + 1}{k}$ deci $x * y \in G$	2p 1p
b) Cum legea e asociativă, demonstrăm prin inducție că $\underbrace{x * x * \dots * x}_n = k^{n-1}(x - k)^n + k$ , pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ Ecuția dată devine $[k(x - k)]^{2025} = 13^{2025}$ deci $k(x - k) = 13$ . Cum $x, k \in \mathbb{N}, x \geq 2$ și $k \geq 2$ , deducem că $k = 13$ și $x = 14$	2p 2p

Enunț subiect 2:

Se consideră mulțimea  $G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$ .

4p a) Demonstrați că  $(G, \cdot)$  este grup.

3p b) Știind că  $\left( \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \circ \right)$  este un grup, unde  $x \circ y = 2xy - x - y + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ,

arătați că acesta este izomorf cu grupul  $(G, \cdot)$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A(x) \cdot A(y) = A(2xy - x - y + 1) = A\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right), (\forall) A(x), A(y) \in G$ și $\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$	1p
Justificarea asociativității	1p
Justificarea că $A(1)$ este element neutru	1p

Justificare orice element $A(x) \in G$ este simetrizabil, cu simetricul $A\left(\frac{1}{2(2x-1)} + \frac{1}{2}\right) \in G$	<b>1p</b>
<b>b)</b> Construcția funcției $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow G, f(x) = A(x), (\forall) x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$	<b>1p</b>
Demonstrație $f$ morfism	<b>1p</b>
Demonstrație $f$ bijectivă	<b>1p</b>

**Enunț subiect 3:**

Se consideră funcția  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{2x} + 1}, n \in \mathbb{N}$ .

**3p a)** Determinați primitiva funcției  $f_0$  al cărei grafic conține punctul  $A\left(0, \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**4p b)** Arătați că orice primitivă a funcției  $f_1$  are un singur punct de inflexiune.

Detalii rezolvare	Barem asociat
<b>a)</b> $\int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln(e^{-2x} + 1) + C$	<b>1p</b>
$F(x) = -\frac{1}{2} \ln(e^{-2x} + 1) + k, k \in \mathbb{R}$	<b>1p</b>
$F(0) = -\frac{1}{2} \ln 2 + k \Rightarrow k = 0$ și $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(e^{-2x} + 1)$	<b>1p</b>
<b>b)</b> Dacă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f_1$ , atunci $F$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = f_1(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$ $F''(x) = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}, (\forall) x \in \mathbb{R}$ $F''(0) = 0, F$ continuă pe $\mathbb{R}, F$ convexă pe $(-\infty, 0]$ și concavă pe $[0, +\infty)$ , deci $x = 0$ este unicul punct de inflexiune	<b>1p</b>  <b>1p</b>  <b>2p</b>

**Enunț subiect 4:**

**7p** Se consideră funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_1^x \left(x + \frac{4}{x} - 5\right) dx$ . Determinați valoarea minimă a funcției  $f$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f'(t) = \frac{t^2 - 5t + 4}{t}$	<b>2p</b>
$f'(1) = 0$ și $f'(4) = 0$ ; $f$ continuă și descrescătoare pe $[1; 4]$ și crescătoare pe $[4, +\infty)$ , deci $f(4)$ este valoarea minimă a funcției $f$	<b>3p</b>
$f(4) = \int_1^4 \left(x + \frac{4}{x} - 5\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4 \ln x - 5x\right) \Big _1^4 = 4 \ln 4 - \frac{15}{2}$	<b>2p</b>