



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2025
CLASA A V-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Aflați numărul natural \overline{abcd} pentru care $\overline{abcd} - 2 \cdot \overline{abc} = 2024$

Gazeta matematică nr.10/2024

Soluție.

$$\overline{abcd} = \overline{abc0} + d = 10 \cdot \overline{abc} + d, 10 \cdot \overline{abc} + d - 2 \cdot \overline{abc} = 2024, 8 \cdot \overline{abc} + d = 8 \cdot 253 \dots\dots\dots 2p$$

$$d = 8 \cdot 253 - 8 \cdot \overline{abc}, d = 8 \cdot (253 - \overline{abc}) \geq 0, \text{ rezultă } \overline{abc} \leq 253 \dots\dots\dots 1p$$

Deci $d = 8 \cdot (253 - \overline{abc}) + 0$, din teorema împărțirii cu rest avem că d se împarte exact la 8, dar d este cifră, rezultă că $d = 0$ sau $d = 8$. $\dots\dots\dots 1p$

$$\text{Dacă } d = 0 \Rightarrow 0 = 8 \cdot (253 - \overline{abc}) \Rightarrow 253 - \overline{abc} = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 253 \Rightarrow \overline{abcd} = 2530. \dots\dots\dots 1p$$

$$d = 8 \Rightarrow 8 = 8 \cdot (253 - \overline{abc}) \Rightarrow 253 - \overline{abc} = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 252 \Rightarrow \overline{abcd} = 2528. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În concluzie } \overline{abcd} = 2530 \text{ sau } \overline{abcd} = 2528 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2. Demonstrați că numărul $a = 2025^n + (7 \cdot 125^{2n} \cdot 9^{2n+9}) : (81 \cdot 5^n)^4$ este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

prof. Dumitrașc Geanina, Brăila

Soluție.

$$a = 2025^n + (7 \cdot 5^{6n} \cdot 9^{2n} \cdot 9^9) : (3^4 \cdot 5^n)^4 \Rightarrow a = 2025^n + (7 \cdot 5^{6n} \cdot 9^{2n} \cdot 3^{18}) : (3^{16} \cdot 5^{4n}) \dots\dots\dots 2p$$

$$a = 2025^n + 7 \cdot 5^{2n} \cdot 9^{2n} \cdot 3^2 \Rightarrow a = 2025^n + 63 \cdot 2025^n \dots\dots\dots 2p$$

$$a = 2025^n \cdot 64 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 5^{2n} \cdot 9^{2n} \cdot 8^2 \Rightarrow a = (5^n \cdot 9^n \cdot 8)^2 \text{ este p.p. } \forall n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3. Un număr este „norocos” dacă este și pătrat perfect și cub perfect.

- 1) Arătați că $a = 5^{45} - 3 \cdot 5^{44} + 14 \cdot 5^{42}$ este „norocos” și $b = 2^{33} + 3^{21} + 7^{45}$ nu este „norocos”;
- 2) Câte numere „norocoase” sunt între numerele $x = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 49$ și $y = 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 202$?

prof. Tilincă Daniela și Mihăilă Adriana, Brăila

Soluție.

$$1) a = 5^{45} - 3 \cdot 5^{44} + 14 \cdot 5^{42} = 5^{42} \cdot (5^3 - 3 \cdot 5^2 + 14) = 5^{42} \cdot 64 = (5^{14})^3 \cdot 4^3 = (5^{14} \cdot 4)^3 \dots\dots\dots 1p$$

$$5^{42} \cdot 64 = (5^{21})^2 \cdot 8^2 = (5^{21} \cdot 8)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$b = 2^{33} + 3^{21} + 7^{45}$ ultima cifră a lui b este $u(b) = \overline{\dots 2} + \overline{\dots 3} + \overline{\dots 7} = 2$, dar ultima cifră a unui p.p. $\neq 2 \Rightarrow b$ nu este „norocos”..... $1p$

$$2) x = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 49 = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \dots + (2 \cdot 24 + 1) = 625 \dots\dots\dots 1p$$

$$y = 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 202 = (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + (3 \cdot 3 + 1) + \dots + (3 \cdot 67 + 1) = 6901 \dots\dots\dots 1p$$

Numerele „norocoase” sunt de forma k^6 , k număr natural $\Rightarrow 3^6 = 729$; $4^6 = 4096$;

$$5^6 > 6901 \Rightarrow 2 \text{ numere „norocoase”} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 4. Aflați toate numerele naturale de forma \overline{abc} care verifică condițiile:

$$\overline{abc} + 99 \cdot (\overline{bc} - 1) = 2401 \text{ și } \overline{cba} + 99 \cdot \overline{bc} = 2401$$

prof. Șerban George-Florin, Brăila

Soluție.

$$\text{Scădem ecuațiile } \overline{abc} - \overline{cba} = 99, 99(a - c) = 99, a - c = 1 \Rightarrow a = c + 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$100c + 10b + c + 1 + 99(10b + c) = 2401 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow 1000b + 200c = 2400 \Rightarrow 5b + c = 12 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } b = 1, c = 7, a = 8, \overline{abc} = 817 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } b = 2, c = 2, a = 3, \overline{abc} = 322 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } b \geq 3, 5b + c = 12 \geq 16, \text{ fals. În concluzie } \overline{abc} = 817 \text{ sau } \overline{abc} = 322. \dots\dots\dots 1p$$

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.