



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2025
CLASA A VI-A
SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Aflați numerele naturale n și m dacă avem simultan:

- i) $n = 5^y \cdot 11^z$, ii) $m = 2^x \cdot 11^z$, iii) n are 15 divizori naturali, iv) m are 12 divizori naturali.

Supliment Gazeta Matematică nr. 11/2024

Soluție. $\tau(n) = (y+1)(z+1) = 15$, $\tau(m) = (x+1)(z+1) = 12$,1p

Rezultă $z+1 \mid 15$, $z+1 \mid 12$, deci $z+1 \mid (12, 15)$, $z+1 \mid 3$, $z+1 \in \{1, 3\}$, $z \in \{0, 2\}$2p

Dacă $z = 0$, $y+1 = 15$, $y = 14$, $n = 5^{14}$, $x+1 = 12$, $x = 11$, $m = 2^{11}$2p

Dacă $z = 2$, $y+1 = 5$, $y = 4$, $n = 5^4 \cdot 11^2 = 75625$, $x+1 = 4$, $x = 3$, $m = 2^3 \cdot 11^2 = 968$2p

Problema 2.

Fie mulțimile $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2024^y + 3 \mid y \in \mathbb{N}\}$, $C = \{z^3 \mid z \in \mathbb{N}\}$, $D = \{2023^t + 2 \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Aflați $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

prof. George-Florin Șerban, Brăila

Soluție. Dacă $y = 0$, $x^2 = 2^2$, $x = 2$1p

Dacă $y \geq 1$, atunci $2024^y + 3 = M_4 + 3$1p

Pentru x de forma $4k$, $4k+1$, $4k+2$ sau $4k+3$, unde k este un număr natural, avem $x^2 = M_4, M_4 + 1$. Deci

$x^2 \neq M_4 + 3$. Prin urmare $A \cap B = \{4\}$2p

Dacă $t = 0$, $z^3 = 3$, fals, deoarece $1^3 = 1 < 3 < 2^3 = 8$1p

Dacă $t \geq 1$, atunci $2023^t + 2 = M_7 + 2 \neq z^3$, deoarece $z^3 = M_7, M_7 + 1, M_7 + 6$.

Deci $C \cap D = \emptyset$, rezultă $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{4\}$2p

Problema 3.

În jurul punctului O considerăm unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOF$ și $\sphericalangle FOA$, având măsurile b, c, d, e, f , respective a , exprimate în grade, cu a, b, c, d, e, f numere naturale nenule. Se știe că numerele a, b, c sunt direct proporționale cu 4, 5, 6, iar numerele c, d, e sunt invers proporționale cu 4, 5, 6. Determinați care este cea mai mică valoare posibilă pentru f .

Gazeta Matematică nr 6-7-8/2024

Soluție. $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOF + \angle FOA = 360^\circ$, $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$, $5a = 4b$, rezultă

$4 \mid 5a$, dar $(4, 5) = 1$, deci $4 \mid a$, rezultă $k \in \mathbb{N}^*$, $a = 4k, b = 5k, c = 6k$, 1p,

$4c = 5d = 6e = 24k$, rezultă $d = \frac{24k}{5}, e = 4k, d = \frac{24k}{5} \in \mathbb{N}$, $(24, 5) = 1$, rezultă $k : 5$, $k = 5x$, cu $x \in \mathbb{N}^*$,

rezultă $a = 20x, b = 25x, c = 30x, d = 24x, e = 20x$, 2p

$20x + 25x + 30x + 24x + 20x + f = 360$, $119x + f = 360$, 1p

$f = 360 - 119x \geq 1$, $119x \leq 359$, $x \leq \frac{359}{119} < 4$, deci $x \in \{1, 2, 3\}$, 1p

Dacă $x = 1 \Rightarrow f = 241$. Dacă $x = 2 \Rightarrow f = 122$. Dacă $x = 3 \Rightarrow f = 3$. În concluzie cea mai mică valoare posibilă pentru f este 3, 2p.

Problema 4. Fie unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COA$ în jurul unui punct O . Se construiesc bisectoarele celor trei unghiuri, OM , ON și OP , în ordinea indicată. Măsurile unghiurilor $\angle MON$, $\angle NOP$ și $\angle POM$ sunt direct proporționale cu 11, 13 și 12.

a) Determinați măsurile $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COA$.

b) Demonstrați că bisectoarele unghiurilor $\angle BOM$ și $\angle COP$ sunt semidrepte opuse.

prof. Florentina Negoită, Brăila

Soluție.

a) Din OM bisectoarea $\angle AOB$, rezultă că $\angle AOM = \angle BOM = \frac{\angle AOB}{2} = a^\circ$.

Analog, se obțin $\angle BON = \angle CON = \frac{\angle BOC}{2} = b^\circ$ și $\angle COP = \angle POA = \frac{\angle COA}{2} = c^\circ$ 1p

$\angle MON = a^\circ + b^\circ$, $\angle NOP = b^\circ + c^\circ$ și $\angle POM = c^\circ + a^\circ$ 1p

Dacă $\angle MON$, $\angle NOP$ și $\angle POM$ sunt direct proporționale cu 11, 13 și 12, rezultă că

$$\frac{a^\circ + b^\circ}{11} = \frac{b^\circ + c^\circ}{13} = \frac{c^\circ + a^\circ}{12} = k \Rightarrow a^\circ + b^\circ = 11k, b^\circ + c^\circ = 13k, c^\circ + a^\circ = 12k \Rightarrow 2(a^\circ + b^\circ + c^\circ) = 36k$$

Dar $2(a^\circ + b^\circ + c^\circ) = 360^\circ$. Deci $k = 10^\circ$ 1p

Înlocuind, obținem $a^\circ + b^\circ = 110^\circ, b^\circ + c^\circ = 130^\circ, c^\circ + a^\circ = 120^\circ$. Deci $a^\circ = 50^\circ, b^\circ = 60^\circ, c^\circ = 70^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB = 100^\circ, \angle BOC = 120^\circ, \angle COA = 140^\circ$ 2p

b) Fie OX bisectoarea $\angle BOM \Rightarrow \angle XOM = 25^\circ$, OY bisectoarea $\angle COP \Rightarrow \angle YOP = 35^\circ$

$\angle XOY = \angle XOM + \angle MOP + \angle POY = 25^\circ + 120^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Rightarrow OX$ și OY sunt semidrepte opuse. 2p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.