



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2025
CLASA A XI-A
SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1.

Să se afle termenul general al șirului definit prin $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 9}{2a_n}$ și calculați limita lui.

prof. Daniela Covaci, Brăila

Soluție:

$$\frac{a_{n+1} + 3}{a_{n+1} - 3} = \frac{a_n^2 + 9 + 6a_n}{a_n^2 + 9 - 6a_n} = \left(\frac{a_n + 3}{a_n - 3} \right)^2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{a_0^2 + 9}{2a_0} > 0, \dots, a_n > 0 \Rightarrow \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$a_{n-1}^2 + 9 \geq 6a_{n-1} \Rightarrow a_n \geq 3, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Fie } x_n = \frac{a_n + 3}{a_n - 3} \Rightarrow x_{n+1} = x_n^2, \forall n \geq 1,$$

$$x_1 = x_0^2 = \left(\frac{a_0 + 3}{a_0 - 3} \right)^2 = \left(\frac{4}{-2} \right)^2 = 4$$

$$\log_{x_1} x_{n+1} = \log_{x_1} x_n^2 = 2 \log_{x_1} x_n = \dots = 2^n \Rightarrow x_{n+1} = x_1^{2^n} \Rightarrow x_n = x_1^{2^{n-1}} \Rightarrow \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$a_n = \frac{3(1 + x_n)}{x_n - 1} = 3 \frac{x_1^{2^{n-1}} + 1}{x_1^{2^{n-1}} - 1}, x_1^{2^{n-1}} \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Problema 2.

Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $X^3 - 6X^2 + 12X = \begin{pmatrix} 2032 & 2025 \\ 2023 & 2032 \end{pmatrix}$.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila

Soluție:

$$(X - 2I_2)^3 = A = \begin{pmatrix} 2024 & 2025 \\ 2023 & 2024 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Notăm } Y = X - 2I_2 \in M_2(\mathbb{R}) \text{ și obținem ecuația binomă } Y^3 = A. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\det Y^3 = (\det Y)^3 = \det A = 2024^2 - 2023 \cdot 2025 = (2023+1)^2 - 2023(2023+2) = 2023^2 +$$

$$+2 \cdot 2023 + 1 - 2023^2 - 2 \cdot 2023 = 1. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Aplicăm teorema lui $H-C$, $Y^2 - (TrY)Y + (\det Y)I_2 = O_2$, $Tr(Y) = a$, $Y^2 = aY - I_2$,

$$Y^3 = aY^2 - Y = a^2Y - aI_2 - Y = (a^2 - 1)Y - aI_2, Tr(Y^3) = (a^2 - 1)Tr(Y) - Tr(aI_2), \quad \dots\dots\dots 2 \text{ punct}$$

$$a^3 - 3a - 4048 = 0, a^3 - 4096 - 3a + 48 = 0, (a-16)(a^2 + 16a + 256) - 3(a-16) = 0,$$

$$(a-16)(a^2 + 16a + 253) = 0. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Dacă $a^2 + 16a + 253 = 0$, $\Delta = 256 - 1012 = -756 < 0$, fals, deoarece $a \in \mathbb{R}$, rezultă $a = 16$, 1 punct

$$A = Y^3 = 255Y - 16I_2, A = 255(X - 2I_2) - 16I_2, A = 255X - 526I_2,$$

$$X = \frac{1}{255}(A + 526I_2) = \frac{1}{255} \begin{pmatrix} 2550 & 2025 \\ 2023 & 2550 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}). \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Problema 3.

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pentru care $a_{n+1} = -2025 \cdot a_n + 3^n$, oricare ar fi n număr natural și $a_0 = \frac{1}{2028}$. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n!} \right).$$

prof. Andreea Maria Popa, Brăila

Soluție:

Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $k = \overline{0, n-2}$ înmulțim relația $a_{n+1} = 3^n - 2025 \cdot a_n$ cu $(-2025)^{n-k-1}$.

Adunăm cele $n-1$ egalități și obținem

$$a_n = 3^{n-1} + 3^{n-2}(-2025) + 3^{n-3}(-2025)^2 + \dots + 3(-2025)^{n-2} + (-2025)^{n-1} + (-2025)^n a_0, \quad \dots\dots 3 \text{ puncte}$$

$$a_n = \frac{3^n}{2028} \left[1 - \left(-\frac{2025}{3} \right)^n \right] + (-2025)^n a_0 = \frac{3^n}{2028} + (-2025)^n \left(a_0 - \frac{1}{2028} \right) = \frac{3^n}{2028}. \quad \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2028 \cdot n!} = 0, \text{ din criteriul majorării.} \quad \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Problema 4.

Să se determine $\alpha \in \mathbb{C}^*$ știind că există două matrice inversabile $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât

$$(A + \alpha B)^n = A^n + \alpha B^n, \text{ oricare ar fi } n \text{ număr natural nenul.}$$

prof. Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{Pentru } n=2 \Rightarrow (A+\alpha B)^2 &= A^2 + \alpha B^2 \Leftrightarrow (A+\alpha B)(A+\alpha B) = A^2 + \alpha B^2 \Leftrightarrow A^2 + \alpha AB + \alpha BA \\ &+ \alpha^2 B^2 = A^2 + \alpha B^2 \Leftrightarrow \alpha AB + \alpha BA = \alpha B^2 - \alpha^2 B^2 \Leftrightarrow \alpha \cdot (AB + BA) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot B^2 \\ \Rightarrow AB + BA &= (1-\alpha) \cdot B^2 \quad (1) \end{aligned}$$

..... 2 puncte

$$\begin{aligned} \text{Pentru } n=3 \Rightarrow (A+\alpha B)^3 &= A^3 + \alpha B^3 \Leftrightarrow (A+\alpha B)^2 (A+\alpha B) = A^3 + \alpha B^3 \Leftrightarrow (A^2 + \alpha B^2)(A+\alpha B) = \\ &= A^3 + \alpha B^3 \Leftrightarrow A^3 + \alpha A^2 B + \alpha B^2 A + \alpha^2 B^3 = A^3 + \alpha B^3 \Leftrightarrow \alpha A^2 B + \alpha B^2 A = \alpha B^3 - \alpha^2 B^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha \cdot (A^2 B + B^2 A) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot B^3 \Leftrightarrow A^2 B + B^2 A = (1-\alpha) \cdot B^3 \quad (2) \end{aligned}$$

..... 2 puncte

$$\begin{aligned} \text{Din (1)} \Rightarrow B \cdot (AB + BA) &= (1-\alpha) \cdot B^3 \Leftrightarrow {}^{(2)}BAB + B^2 A = A^2 B + B^2 A \Leftrightarrow BAB = A^2 B \Big| \cdot B^{-1} \\ \Rightarrow BA &= A^2 \Big| \cdot A^{-1} \Rightarrow B = A \quad (3). \end{aligned}$$

Relația (1) devine 1 punct

$$\begin{aligned} B^2 + B^2 &= (1-\alpha) B^2 \Leftrightarrow 2B^2 = (1-\alpha) B^2 \Leftrightarrow (1+\alpha) B^2 = O_3 \Big| \cdot B^{-1} \Rightarrow (1+\alpha) B = O_3 \Big| \cdot B^{-1} \\ \Rightarrow (1+\alpha) I_3 &= O_3 \Rightarrow 1+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1. \end{aligned}$$

..... 1 punct

Reciproc, pentru $\alpha = -1$ și A, B matrice arbitrare cu $A = B$, avem $(A - A)^n = A^n - A^n$ adevărat, oricare ar fi n număr natural nenul. Deci, $\alpha = -1$ 1 punct

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.