



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ – 2025  
CLASA A X-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

**Problema 1.** Demonstrați că  ${}^{n-2}\sqrt{\log_3(n+1)} < \frac{3}{2}$ , oricare ar fi numărul natural  $n \geq 4$ .

*prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila*

**Soluție.**

Inegalitatea este echivalentă cu  $3^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}} > n+1, \forall n \geq 4$  natural.

Se demonstrează prin inducție matematică  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$  oricare ar fi  $n \geq 1$  3 punct

Rezultă  $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{n-2} \geq 1 + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}$ , 1 punct

este suficient să arătăm că  $3^{\frac{n}{2}} > n+1, \forall n \geq 4$ ,

adică  $3^n > (n+1)^2, \forall n \geq 4$ , ceea ce se probează inductiv. 3 puncte

**Problema 2.** Rezolvați în  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ecuația  $x^3 + x^2 + x = (x+1)(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$ .

*prof George-Florin Șerban, Brăila*

**Soluție.**  $\frac{x^3 + x^2 + x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}, \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+1)\sqrt{y+1} + \sqrt{y+1},$

$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}, \dots\dots\dots$  2 pct

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^3 + t$ , este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ , deci este injectivă,  $f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1})$

rezultă  $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}, \frac{x^2}{x+1} = y+1, \dots\dots\dots$  2 pct

$x-1 + \frac{1}{x+1} = y+1$ , deci  $\frac{1}{x+1} \in \mathbb{Z}, x \in \{-2, 0\}. \dots\dots\dots$  2 pct

Dacă  $x = -2$  rezultă  $y = -5, -6 = 3\sqrt{4} = 6$  fals.

Dacă  $x = 0$  rezultă  $y = -1, 0 = 0$ , adevărat,  $S = \{(0, -1)\}. \dots\dots\dots$  1 pct

**Problema 3.** Fie  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Arătați că  $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ .

*Gazeta Matematică nr 9/2024*

**Soluție.** Aplicăm inegalitatea mediilor,  $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1}} \leq \frac{n+n-1}{n} = 1 + \frac{n-1}{n}. \dots\dots\dots$  2 pct.



Este suficient să demonstrăm că  $1 + \frac{n-1}{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ ,  $\frac{n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ ,  $\sqrt[n]{2} < \frac{n}{n-1}$ , ..... 3 pct

$$\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{\underbrace{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1}} \leq \frac{2+n-1}{n} = \frac{n+1}{n}. \text{ Este suficient să demonstrăm că } \frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}, \text{ rezultă}$$

$$n^2 - 1 < n^2, \text{ adevărat, deci } \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}}. \text{ ..... 2 pct.}$$

**Problema 4.** Se consideră numerele complexe nenule  $z_1, z_2, \dots, z_{2028}$  cu proprietatea că  $2z_{k+1} + \frac{1}{2z_k} = 1$ ,

pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, 2027\}$ . Arătați că  $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots \cdot z_{2028}$  este un număr rațional pozitiv.

*prof. Costel Cerchez, Brăila*

**Soluție.**

$$z_{k+1} = \frac{2z_k - 1}{4z_k} \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, 2027\}. \text{ ..... 1 punct}$$

$$z_{k+2} = \frac{2z_{k+1} - 1}{4z_{k+1}} = -\frac{1}{4z_k - 2} \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, 2026\}. \text{ ..... 2 puncte}$$

$$z_{k+3} = -\frac{1}{4z_{k+1} - 2} = z_k \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, 2025\}. \text{ ..... 2 puncte}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots \cdot z_{2028} &= (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)^{676} = \\ &= \left[ z_1 \cdot \frac{2z_1 - 1}{4z_1} \cdot \left( -\frac{1}{4z_1 - 2} \right) \right]^{676} = \left( -\frac{1}{8} \right)^{676} = \left( -\frac{1}{2^3} \right)^{676} = \left( \frac{1}{2} \right)^{2028} \dots \text{ 2 puncte} \end{aligned}$$

**Notă:** Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.