

11

Olimpiada Națională de Matematică  
Etapă locală, 8 februarie 2025

Clasa a XI-a

AG  
2025

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Subiectul I – soluție orientativă**

a)  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Din condiția  $XA = AX$  se obține

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a - 4b & 2b \\ -2c - 4d & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ -4a + 2c & -4b + 2d \end{pmatrix} \quad 2p$$

$$\Rightarrow b = 0, d = a - c \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R} \quad 2p$$

b) Se demonstrează faptul că matricea  $X$  căutată, verifică  $XA = AX$  1p

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2c - 3ac^2 + c^3 & (a - c)^3 \end{pmatrix} \quad 1p$$

Ecuția dată devine:

$$\begin{pmatrix} a^3 - 3a & 0 \\ 3a^2c - 3ac^2 + c^3 - 3c & (a - c)^3 - 3(a - c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Din condiția  $a^3 - 3a = -2$ , obținem  $a \in \{-2, 1\}$

i. Pentru  $a = -2$ , obținem  $c \in \{-4, -1\}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii. Pentru  $a = 1$ , obținem  $c \in \{-1, 2\}$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 1p$$

**Subiectul II – soluție orientativă**

$$1 \leq 1! + (2!)^2 + \dots + (n!)^n \leq n(n!)^n \quad 2p$$

$$1 \leq \sqrt[n^3]{1! + (2!)^2 + \dots + (n!)^n} \leq \sqrt[n^3]{n} \cdot \sqrt[n^3]{(n!)^n}$$

$$1 \leq \sqrt[n^3]{1! + (2!)^2 + \dots + (n!)^n} \leq \sqrt[n^3]{n} \cdot \sqrt[n^2]{n!} \quad 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^3]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{n^2}} = 1^0 = 1 \quad 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[n^2]{n!}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n}{n^2}} \quad 1p$$

$$a_n = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n, b_n = n^2, n \geq 1$$

Cum șirul  $b_n = n^2, n \geq 1$  este strict monoton și nemărginit, calculăm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+1}$$

$$\text{Din lema Cesaro-Stolz} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n+2}{n+1}}{2}} = e^0 = 1$$

1p

În concluzie,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^3]{n} \cdot \sqrt[n^2]{n!} = 1 \cdot 1 = 1$  și conform criteriului cleștelui rezultă că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^3]{1! + (2!)^2 + \dots + (n!)^n} = 1$$

1p

### Subiectul III – soluție orientativă

$$\text{a) } A = B + BA - AB - ABA \Leftrightarrow A = B(I_n + A) - AB(I_n + A) \\ \Leftrightarrow A = (I_n - A)B(I_n + A) \quad (1)$$

1p

$$I_n = I_n - A^7 = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^6) \Rightarrow \det(I_n - A) \neq 0$$

$$I_n = I_n + A^7 = (I_n + A)(I_n - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 + A^6) \Rightarrow \det(I_n + A) \neq 0$$

1p

$$\text{Din (1)} \Rightarrow 0 = \det A = \det(I_n - A) \cdot \det B \cdot \det(I_n + A) \Rightarrow \det B = 0$$

1p

$$\text{b) } B = A^2 \Rightarrow A^4 + A - A^2 = A^3 - A^3 \Rightarrow A^4 + A - A^2 = O_n \Rightarrow A^4 + A = A^2 \mid \cdot A^3$$

1p

$$A^7 + A^4 = A^5 \Rightarrow A^4 = A^5 \mid \cdot A \Rightarrow A^5 = A^6 \mid \cdot A \Rightarrow A^6 = A^7 \Rightarrow A^6 = O_n$$

1p

$$\Rightarrow A^4 = A^5 = A^6 = A^7 = O_n \text{ și } A = A^2 \mid \cdot A, A^2 = A^3 \mid \cdot A, A^3 = A^4 = O_n$$

1p

$$\Rightarrow A = A^2 = A^3 = A^4 = O_n \Rightarrow A = O_n$$

1p

### Subiectul IV – soluție orientativă

Se arată prin inducție matematică faptul că  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

1p

$$x_1 = \frac{x_0 + 1}{2x_0 + 3} = \frac{2}{5} < x_0$$

1p

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + 1}{2x_n + 3} - \frac{x_{n-1} + 1}{2x_{n-1} + 3} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(2x_{n-1} + 3)(2x_n + 3)}, \forall n \geq 1$$

1p

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_n - x_{n-1}), \forall n \geq 1$$

Atunci  $\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0) < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 0}$  strict descrescător

1p

Cum  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit inferior de 0, rezultă că el este convergent

1p

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = l$$

$$\text{Trecem la limită în relația de recurență: } l = \frac{l+1}{2l+3} \Rightarrow 2l^2 + 2l - 1 = 0$$

$$\Rightarrow l = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

1p

$$\text{Cum } x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow l \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

1p

**Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător**