MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Huşi, 3 aprilie 2024

CLASA a VIII-a – soluţii şi bareme

Problema 1. Determinaţi numerele întregi n pentru care există o rearanjare $a_1, a_2, \ldots, a_{1013}$ a numerelor $1012, 1013, \ldots, 2024$, astfel încât să aibă loc egalitatea $a_1 \cdot n^{1012} + a_2 \cdot n^{1011} + \ldots + a_{1012} \cdot n + a_{1013} = 0$.

Soluţie. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $a_1 \cdot n^{1012} + a_2 \cdot n^{1011} + \ldots + a_{1012} \cdot n + a_{1013} > 0$, deci $n \in \mathbb{N}$ nu convine. **1p**

Dacă $n = -k$, cu $k \geqslant 2$, atunci $a_1 \cdot n^{1012} + a_2 \cdot n^{1011} + \ldots + a_{1012} \cdot n + a_{1013} = k^{1011}\big(a_1 \cdot k - a_2\big) + k^{1009}\big(a_3 \cdot k - a_4\big) + \ldots + k\big(a_{1011} \cdot k - a_{1012}\big) + a_{1013} > 0$, deoarece $a_{1013} > 0$ şi $a_i \cdot k - a_{i+1} \geqslant 2a_i - a_{i+1} \geqslant 2 \cdot 1012 - 2024 = 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, 1011\}$. Aşadar, nu există soluţii de acest tip **2p**

Arătăm că $n = -1$ este soluţie.

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, $-a + (a-1) - (a+1) + (a+2) = 0$. **2p**

$(1012 - 2024 + 1013 - 1015 + 1014) + (-1017 + 1016 - 1018 + 1019) + \ldots + (-2021 + 2020 - 2022 + 2023) = 0$, deci $n = -1$ este unica soluţie. **2p**

Problema 2. Spunem că o funcţie de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *utilă*, dacă are proprietăţile:

(i) $|f(x)| \leqslant 2$, pentru orice număr real x cu $|x| \leqslant 2$.

(ii) $|f(x)| \geqslant 1$, pentru orice număr real x cu $|x| \leqslant 1$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că există o funcţie utilă cu $f(x_0) = 0$, dacă şi numai dacă $|x_0| \geqslant 4$.

Soluţie. „ $\Rightarrow$” Dacă f este utilă, atunci şi $-f$ are proprietăţile (i) şi (ii), deci este utilă. În consecinţă, putem alege o funcţie utilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ **1p**

Cum $a > 0$, inegalitatea (i) este echivalentă cu $f(2) \leqslant 2$ şi $f(-2) \geqslant -2$, deci cu $2a + b \leqslant 2$ (1) şi $2a - b \leqslant 2$ (2) **1p**

Inegalitatea (ii) conduce la situaţiile: **I)** $f(-1) \leqslant -1$, $f(1) \leqslant -1$ sau **II)** $f(-1) \geqslant 1$, $f(1) \geqslant 1$ (situaţia $f(-1) < 0 < f(1)$ ar conduce la $-1 < -\dfrac{b}{a} < 1$ şi $f\Big(-\dfrac{b}{a}\Big) = 0$, în contradicţie cu (ii)) **1p**

În cazul **I** obţinem $-a + b \leqslant -1$ (3) şi $a + b \leqslant -1$ (4). Înmulţind (4) cu 2 şi adunând cu (2) rezultă $4a + b \leqslant 0$, adică $x_0 = -\dfrac{b}{a} \geqslant 4$ **1p**

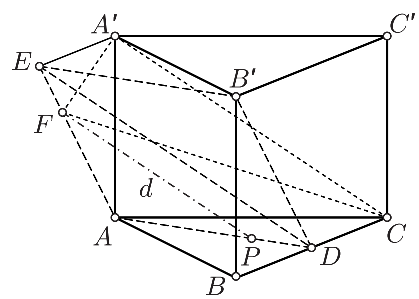
În cazul **II** obţinem $a-b \leqslant -1$ (5) şi $-a-b \leqslant -1$ (6). Adunând (5) înmulţită cu 2 şi (1) rezultă $4a-b \leqslant 0$, deci $x_0 = -\dfrac{b}{a} \leqslant -4$. Din **I)** şi **II)** rezultă că $|x_0| \geqslant 4$ **1p**

„ $\Leftarrow$" Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, cu $|x_0| \geqslant 4$

Dacă $x_0 \geqslant 4$, alegem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x_0-1} \cdot x + \dfrac{x_0}{1-x_0}$......... **1p**

Dacă $x_0 \leqslant -4$ alegem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-1}{1+x_0} \cdot x + \dfrac{x_0}{x_0+1}$. **1p**

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, cu muchiile laterale AA', BB', CC'. Considerăm mijlocul D al muchiei BC şi construim paralelogramul $ADB'E$. Fie F proiecţia ortogonală a punctului A' pe dreapta AE, d dreapta de intersecţie a planelor (ADE) şi $(A'CF)$ şi P intersecţia dreptei d cu planul (ABC). Demonstraţi că P este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $AB = AA'\sqrt{2}$.



Soluţie. Segmentele BA', AB' şi DE au acelaşi mijloc, deci $DBEA'$ este paralelogram. Din $CD = DB = A'E$ şi $BD \parallel A'E$ reiese că $A'CDE$ este paralelogram.. **2p**

Obţinem $CA' \parallel DE$, deci $CA' \parallel (ADE)$ **1p**

Astfel, planul $(A'CF)$ taie planul (ADE) după o paralelă la CA' şi la DE, deci $FP \parallel DE$, iar $P \in AD$ **1p**

Cum AD este mediană în $\triangle ABC$, reiese că: punctul P este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $AP = 2PD$. Deoarece $PF \parallel DE$, aceasta este echivalent cu $AF = 2FE$ **1p**

Deoarece $AA' \parallel BB'$, $BD \parallel EA'$ şi $BB' \perp BD$, triunghiul AEA' este dreptunghic în A'. Cu teorema catetei în $\triangle AA'E$ obţinem $AF = 2FE \iff A'A^2 = 2A'E^2 \iff A'A^2 = \frac{1}{2}BC^2 \iff BC = A'A\sqrt{2}$ **2p**

Problema 4. Fie a şi b două numere naturale distincte, mai mari decât 1, astfel încât $D = b^2 + a - 1$ divide $M = a^2 + b - 1$.

a) Arătaţi că există numere care îndeplinesc condiţiile de mai sus.

b) Demonstraţi că D are cel puţin doi divizori primi.

Soluţie. a) Pentru $b = 2$ căutăm a astfel încât $a + 3 \mid a^2 + 1$. Deoarece $a + 3 \mid a(a + 3) - 3(a + 3) = a^2 - 9$, este necesar şi suficient ca $a + 3 \mid a^2 + 1 - a^2 + 9 = 10$, deci putem lua $a = 7$ **1p**

b) Avem $D \mid (b^2 - 1 + a)(b^2 - 1 - a) = (b^2 - 1)^2 - a^2$, deci $D \mid (b^2 - 1)^2 + b - 1 = b^4 - 2b^2 + b = b(b - 1)(b^2 + b - 1)$ **3p**

Din $D \mid M$ reiese că $0 \leq M - D = (a - b)(a + b - 1)$, deci $a > b$. Apoi, numerele b, $b - 1$ şi $b^2 + b - 1$ sunt prime între ele două câte două şi mai mici decât D. Astfel D are factori primi comuni cu cel puţin două dintre numerele b, $b - 1$, $b^2 + b - 1$, deci D trebuie să aibă cel puţin doi factori primi distincţi **3p**