Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 10 februarie 2024

clasa a XI

Subiectul I

Rezolvaţi ecuaţia $X^3 = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}, X \in M_2(\mathbb{R}).$

Subiectul al II-lea

Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + I_2) = 3$ şi $\det(A - I_2) = 1$.

Calculaţi suma $S = \det(A - 2I_2) + \det(A^3 + 6A^2 + 8A) + \det(A^2 + 2A + 2I_2).$

Subiectul al III-lea

Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_0 = -2$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$

a) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

b) Calculaţi .$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n + 3|}$

Subiectul al IV-lea

Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_1 \in R$ şi $x_{n+1} = x_n + a^{x_n}, \forall n \geq 1$ unde $a \in (0,1)$ este fixat.

Demonstraţi că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a^{-x_n}\cdot\ln n} = \frac{1}{a}.$

Notă: Fiecare subiect se notează de la 0 puncte la 7 puncte
Timp efectiv de lucru: 3 ore