Barem de notare – clasa a XII-a

Subiectul 1

Pe mulţimea $G =$ (1; ∞) se definește legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[n]{x^n y^n - x^n - y^n + 2}$, unde n este un număr natural impar, $n \geq 3$.

a)Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b)Să se determine numărul natural impar n, $n \geq 3$ pentru care $\underbrace{3^{\frac{1}{n}} \circ 3^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ 3^{\frac{1}{n}}}_{(n \quad \text{elemente})} = \sqrt[n]{129}$.

<u>Barem</u>

a)demonstrarea comutativității……………………………………………………………1p

demnstrarea asociativității…………………………………………………………………1p

Se poate folosi forma $x \circ y = \sqrt[n]{(x^n - 1)(y^n - 1) + 1}$.

Determinarea elementului neutru $e = \sqrt[n]{2}$; $\sqrt[n]{2} \in (1;\infty)$ ……………………………………..1p

Se arată că pentru fiecare $x \in (1;\infty)$ există $x' = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n - 1}} \in (1;\infty)$ astfel încât $x \circ x' = \sqrt[n]{2} = x' \circ x$ ………………………………………………………………………………………………1p

b)Se arată prin inducție matematică:

$\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{(n \quad \text{elemente})} = \sqrt[n]{(x^n - 1)^n + 1}$, pentru orice $n \geq 3$ 1p

$\underbrace{3^{\frac{1}{n}} \circ 3^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ 3^{\frac{1}{n}}}_{(n \quad \text{elemente})} = \sqrt[n]{2^n + 1}$ …………………………………………………………..1p

$\sqrt[n]{2^n + 1} = \sqrt[n]{129}$ $\quad n = 7$ impar, $7 \geq 3$ ……………………………………………1p

Subiectul 2

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există un endomorfism $f:G\to G$, astfel încât $f(x^5\cdot y^6)=x^6\cdot y^5$, $\forall x,y\in G$. Arătați că grupul $(G,\cdot)$ este comutativ.

Barem

Deoarece funcția f este endomorfism, obținem $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$, pentru orice $a,b\in G$ ...1 p

Se notează e elementul neutru al legii de compoziție ,,$\cdot$'' pe G

Pentru $x=e$ se obține $f(y^6)=y^5$, pentru orice $y\in G$ 1p

Pentru $y=e$ se obține $f(x^5)=x^6$, pentru orice $x\in G$ 1p

$x^5=f(x^6)=f(x^5\cdot x)=f(x^5)\cdot f(x)$, pentru orice $x\in G$ ....1 p

$x^5=x^6\cdot f(x)$, pentru orice $x\in G$

Deoarece $(G,\cdot)$ este grup se obține că $f(x)=x^{-1}$, pentru orice $x\in G$ 1p

Cum funcția f este endomorfism se ajunge la $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$ pentru orice $a,b\in G$ și

$b^{-1}\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$ pentru orice $a,b\in G$ 1p

Ceea ce este echivalent cu $a\cdot b=b\cdot a$ pentru orice $a,b\in G$ 1p

Subiectul 3

Fie $f:R\to R$ ***funcție continuă cu proprietatea că*** $f(x)f(-x)=1,\ (\forall)\,x\in R$ ***și***

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(1+2\sin^2x\right)(1+f(x))}\mathrm{d}x$$

a)Arătați că $$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\left(1+2\sin^2x\right)(1+f(x))}\mathrm{d}x$$

b) Calculați I.

<u>Barem</u>

a) Cu schimbarea de variabilă .... (1 p)

$$t=-x$$

Obținem $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(1+2\sin^2t\right)(1+f(-t))}\mathrm{d}t$

și înlocuind $f(-t)=\frac{1}{f(t)}$ .... (1 p)

Obținem $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(t)}{\left(1+2\sin^2t\right)(1+f(t))}\mathrm{d}t$ .... (1p)

b) Atunci $2I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+f(x)}{\left(1+2\sin^2x\right)(1+f(x))}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+2\sin^2x}\mathrm{d}x$ .... (1p)

Avem că $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2x+3\sin^2x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(tgx)`}{1+3tg^2x}\mathrm{d}x=$ .... (2p)

$\frac{1}{3}\sqrt{3}arctg\left(\sqrt{3}tgx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\pi}{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ .... (1p)

Subiectul 4

Determinați funcția $f:(o,\infty)\to R$ **știind că admite o primitivă F astfel încât**

$$xf(x)+F(x)=\frac{x+1}{x(1+xe^{x})},\ (\forall)\,x>0.$$

Barem

Justifică că F este o primitivă a lui f pe $(0,\infty)$ ……………………………. (1 p)
Relația din ipoteză se rescrie

$$(xF(x))`=\frac{x+1}{x(1+xe^{x})},\ (\forall)\,x\in(0,\infty)\quad (*)$$ ……………………… (1p)

$$\int\frac{x+1}{x(1+xe^{x})}dx=\int\frac{(x+1)e^{x}}{xe^{x}(1+xe^{x})}dx$$

$$\frac{1}{xe^{x}(1+xe^{x})}dx=\frac{(1+xe^{x})-xe^{x}}{xe^{x}(1+xe^{x})}=\frac{1}{xe^{x}}-\frac{1}{1+xe^{x}}$$ ……………………….. (1p)

$$\int\frac{x+1}{x(1+xe^{x})}dx=\int\frac{xe^{x}+e^{x}}{xe^{x}}dx-\int\frac{xe^{x}+e^{x}}{1+xe^{x}}dx$$

$$=\int\frac{(xe^{x})`}{xe^{x}}dx-\int\frac{(xe^{x}+1)`}{1+xe^{x}}dx$$

$$=\ln\left|xe^{x}\right|-\ln\left|1+xe^{x}\right|+C=\ln\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}+C,\ x>0\ (**)$$ ………………………… (2 p)

Din (*) și (**) obținem că $xF(x)-\ln\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}=C,\ (\forall)\,x>0$

$$F(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}+\frac{1}{x}C,\ (\forall)\,x>0$$ ……………..………… (1p)

$$f(x)=F`(x)=\left(\frac{1}{x}\right)`\left(\ln\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}\right)+\frac{1}{x}\left(\ln\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}\right)`-\frac{1}{x^{2}}C$$

$$f(x)=-\frac{1}{x^{2}}\ln\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}+\frac{1}{x}\,\frac{x+1}{x(1+xe^{x})}`-\frac{1}{x^{2}}C$$

$$f(x)=-\frac{1}{x^{2}}\left(\ln\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}-\frac{x+1}{1+xe^{x}}`+C\right)$$ ………………………….. (1p)