CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală 24.02.2024
Secțiunea H2 - Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1

Se consideră intervalul $H=(0,1)$.

(2p) **a)** Arătaţi că relaţia $a*b=\dfrac{ab}{ab+(1-a)(1-b)}$ defineşte o lege de compoziţie pe *H*.

(2p) **b)** Demonstraţi că funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy)=f(x)*f(y)$, $\forall\, x,y>0$, unde legea „$*$” este legea definită la punctul a).

(3p) **c)** Ştiind că legea „$*$” definită la punctul **a)** este asociativă, rezolvaţi în *H* ecuaţia $x*x*x=\dfrac{1}{2}$.

Soluție:

a) $a,b\in(0,1)\overset{(1p)}{\Rightarrow}(1-a)(1-b)>0\overset{(0,5p)}{\Rightarrow}ab+(1-a)(1-b)>ab\overset{(0,5p)}{\Rightarrow}a*b\in(0,1)$.

b) Se demonstrează egalitatea (2p).

c) Notăm $x*x=y$, astfel $x*x*x=x*y=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x+y=1\Leftrightarrow x+\dfrac{x^2}{x^2+(1-x)^2}=1$ (1p).

După efectuarea calculelor se obține ecuația $2x^3-3x^2+3x-1=0$ (1p) care are în $H=(0,1)$, soluția $x=\dfrac{1}{2}$ (1p).

Problema 2

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru *e*. Dacă $a,b\in G$ satisfac condițiile: $b^6=e$ și $ab=b^4a$ atunci $b^3=e$ și $ab=ba$.

Soluție:

(1p) Dacă $ab=b^4a$ atunci $b^4=aba^{-1}$.

Dar, $b^2=b^2e=b^2b^6=b^8=b^4b^4=(aba^{-1})(aba^{-1})=ab^2a^{-1}$, adică $b^2a=ab^2$ (2p).

$$\left.\begin{array}{l} b^4a=b^2b^2a=b^2ab^2=ab^2b^2=ab^4 \\ b^4a=ab \end{array}\right\}\Rightarrow ab^4=ab\Rightarrow b^3=e \text{ (2p).}$$

Dacă $b^3=e$ și $ab=b^4a$ atunci $ab=b^4a=b^3ba=ba$, așadar $ab=ba$ (2p).

Problema 3

Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}+arctgx$.

(2p) **a)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}t\cdot[f(t)-arctgt]dt=\dfrac{e-1}{2}$.

(2p) **b)** Să se arate că $1 \le \int_0^1 f^n(x)dx \le \left(e+\frac{\pi}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(3p) **c)** Să se arate că $\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f^n(x)dx \ge \frac{1}{n} f^n\left(1-\frac{1}{n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Soluție:</u>

(2p) **a)** Se calculează $\int_{\frac{1}{x}}^{1} t \cdot [f(t) - arctgt]dt = \frac{e - e^{\frac{1}{x^2}}}{2}$, de unde $\lim_{x\to\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{1} t \cdot [f(t) - arctgt]dt = \frac{e-1}{2}$.

b) (1p) f funcție continuă, monoton crescătoare pe $[0,1]$ și $1 \le f(x) \le e + \frac{\pi}{4},\ \forall x \in [0,1]$.

De aici $1 \le f^n(x) \le \left(e+\frac{\pi}{4}\right)^n,\ \forall x \in [0,1]$ (0,5p)

(0,5p) Aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite rezultă că $1 \le \int_0^1 f^n(x)dx \le \left(e+\frac{\pi}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) (1,5p) f continuă, monoton crescătoare pe $\left[\frac{n-1}{n},1\right]$, de aici $f(x) \ge f\left(\frac{n-1}{n}\right),\ \forall x \in \left[\frac{n-1}{n},1\right]$

și $f^n(x) \ge f^n\left(\frac{n-1}{n}\right),\ \forall x \in \left[\frac{n-1}{n},1\right]$ (1p).

(0,5p) Aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite rezultă că $\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f^n(x)dx \ge \frac{1}{n} f^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>Problema 4</u>

Populaţia unei localităţi este $P = P(t)$, unde $P(t)$ reprezintă numărul de locuitori la timpul t, exprimat în ani. Rata de creştere a populaţiei este data de legea $P'(t) = t \cdot e^t$, unde $P'(t)$ semnifică derivata funcţiei P. Dacă iniţial (la timpul $t_0 = 0$) numărul de locuitori ai localităţii era 2020, câţi locuitori vor fi în acea localitate după 5 ani? ($e^5 \cong 148,5$)

<u>Soluție:</u>

$P(t) = \int P'(t)dt = (t-1)e^t + C$ (3p). Din $P(0) = 2020$, obținem $C = 2021$ (1p) și astfel $P(t) = (t-1)e^t + 2021$.

$P(5) = 4 \cdot e^5 + 2021 \cong 4 \cdot 148,5 + 2021 = 2615$ (3p).