Clasa a VII-a *Barem de corectare și notare*

Subiectul I. a).(**3p**) Demonstrați că:

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}),\text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$

b). Arătați că $\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

c). Dacă a, b, c sunt numere raționale astfel încât $ab+ac+bc=23$, atunci arătați că

$\sqrt{(a^2+23)(b^2+23)(c^2+23)}$ este număr rațional.

a). Se aplică inegalitatea mediilor: $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$;

Avem $\sqrt{n(n+1)}-n<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{n(n+1)}<\frac{2n+1}{2}$, (A) .... **(1p)**

Analog $\frac{1}{2}<n-\sqrt{n(n-1)}\Leftrightarrow\sqrt{n(n-1)}<\frac{2n-1}{2}$, (A) .... **(1p)**

b). $\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{15}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30-6\sqrt{15}+10\sqrt{15}-30=4\sqrt{15}\Leftrightarrow 4\sqrt{15}=4\sqrt{15}$..................**(1p)**

c). $a^2+23=a^2+ab+ac+bc=(a+c)(a+b)$............................**(1p)**

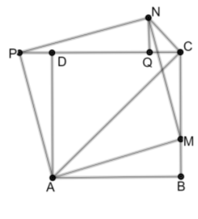
$b^2+23=b^2+ab+ac+bc=(a+b)(b+c)$............................**(1p)**

$c^2+23=c^2+ab+ac+bc=(a+c)(b+c)$ ....**(1p)**

$\sqrt{(a^2+23)(b^2+23)(c^2+23)}=|(a+c)(a+b)(b+c)|$, care este număr rațional ...**(1p)**

Subiectul al II-lea

Fie pătratul ABCD și M un punct pe latura BC. De aceeași parte a dreptei AB se construiește



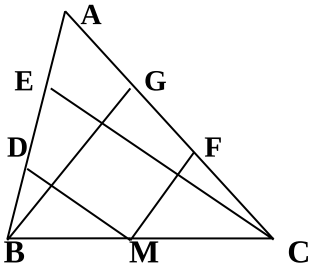
pătratul AMNP. Arătați că punctele P,D,C sunt coliniareși că dreptele AC și CN sunt perpendiculare

ABCD și AMNP pătrate $\Rightarrow\begin{cases}AB=AD\\AB\perp AD, AM\perp AP\end{cases}\Rightarrow\sphericalangle BAM\equiv\sphericalangle PAD$ (**1p**)

Obț Δ ADP ≡ ΔABM (L.U.L.) (**1p**) ⇒ $\sphericalangle ADP=90^0$. Obț. $\sphericalangle PDC$ alungit, deci punctele P, D, C sunt coliniare **1p**

Fie $Q \in (DC)$ astfel încât NQ⊥ DC Avem $\begin{cases} AB \parallel PQ \\ AM \parallel PN \end{cases} \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle QPN$ (**1p**), Δ PQN ≡ Δ ABM (I.U.) ⇒PQ≡AB, dar AB≡DC (ABCD pătrat) ⇒ $MB \equiv QC$ (**1p**). Dar $MB \equiv PD$, de unde NQ≡QC (**1p**). Obț. NQC triunghi dreptunghic isoscel⇒ $\sphericalangle QCN = 45^0$. ABCD pătrat ⇒ $\sphericalangle ACD = 45^0 \Rightarrow \sphericalangle ACN = 90^0 \Rightarrow AC \perp CN$ (**1p**)

Subiectul al III-lea



Fie P mijlocul segmentului EG.

Se arată că F este mijlocul lui GC.........**(1p)**

Se arată că D este mijlocul lui EB.........**(1p)**

PF∥ $EC \parallel DM$ (1).....................................**(2p)**

$PD \parallel BG \parallel MF$ *(2)*.............................**(2p)**

Din (1) și (2) obținem că $PDMF$ este paralelogram în care diagonalele se înjumătățesc. Astfel mijlocul N al segmentului DF este mijlocul diagonalei MP, așadar M, N, P sunt coliniare.....**(1p)**

Subiectul al IV-lea

a) Arătați că $\left[\sqrt{4n^2+n}\right]$ este un număr natural par, pentru orice număr natural n. (prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x).

b) Calculați suma: $S = \left[\sqrt{1\cdot 5}\right] + \left[\sqrt{2\cdot 9}\right] + \left[\sqrt{3\cdot 13}\right] + \cdots + \left[\sqrt{50\cdot 201}\right]$

a) $4n^2 < 4n^2 + n < 4n^2 + 4n + 1$

$(2n)^2 < 4n^2 + n < (2n+1)^2$...... **(1p)**

$$\sqrt{(2n)^2} < \sqrt{4n^2+n} < \sqrt{(2n+1)^2}$$

$2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1$ ...... **(1p)**

$\left[\sqrt{4n^2+n}\right] = 2n$, număr natural par, pentru $\forall\, n \in N$. ..... **(1p)**

b) $4n^2 + n = n(4n+1)$ .... **(1p)**

Pentru n = $\overline{1,50}$ obținem fiecare produs de sub radicali.

$\left[\sqrt{1\cdot 5}\right] = 2$; $\left[\sqrt{2\cdot 9}\right] = 4$; $\left[\sqrt{3\cdot 13}\right] = 6$; .... ; $\left[\sqrt{50\cdot 201}\right] = 100$ ..... **(2p)**

S = 2 + 4 + 6 + ... + 100 = 2 (1 + 2 + 3 + ... + 50) = 2550 ...... **(1p)**