MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VASLUI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală 24.02.2024
Secțiunea H_1 (Tehnic, Servicii, Uman) - Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2\ (\mathbb{R})$.

a) Să se demonstreze că $A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$.

b) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea AX=XA.

Soluție

a) calculul matricei A^2	(1p)
- verificarea egalității	(1p)
b) A^3, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3^n - 1 & 3^n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$	(2p)
- verificarea formulei folosind metoda inducției matematice	(1p)
c) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$	(1p)
- calcularea matricelor AX, XA	(1p)
- determinarea formei matricei X	(1p)

Problema 2

Fie matricea A(x) = $\begin{pmatrix} 2x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Arătați că det A(0) = 2.
b. Aflați x ∈ (0, 1) pentru care aria triunghiului BCD este maximă, unde B(2x, x+1) , C (2, x) , D (2, 0) .
c. Rezolvați ecuația A (2^a) + A (4^a) = 2 A (1).

Soluție

1.) a.) det A(0) = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (1p)

b.) d = $\begin{vmatrix} 2x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 2x (x-1) (1p)

A = $| x^2 - \ x |$ (1p)

$x \in (0, 1)$ $A = -x^2 + x$ $x_{max} = \frac{1}{2}$ (1p)

c.) $A(2^a) + A(4^a) = 2\,A(1)$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 2^a & 2^a+1 & 1 \\ 2 & 2^a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 4^a & 4^a+1 & 1 \\ 2 & 4^a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1p)$$

$$\begin{pmatrix} 2(2^a+4^a) & 2^a+4^a+2 & 2 \\ 4 & 2^a+4^a & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1p)$$

$2^a + 4^a = 2$ $x + x^2 = 2$ $x = 1$ $2^a = x > 0$ $2^a = 1$ $a = 0$ (1p)

<u>Problema 3</u>

Fie funcția f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} \frac{2mx}{2-x}, & x \in (-\infty, -2) \\ \frac{x^2+mx+2}{x+1}, & x \in [-2, +\infty) \end{cases}$

a. Aflați $m \in \mathbb{R}$ pentru care f are limită în x = -2.
b. Aflați $m \in \mathbb{R}$ dacă y = x + 2 este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Soluție

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{2mx}{2-x} = \frac{-4m}{4} = -m$ (1p)

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x^2+mx+2}{x+1} = \frac{6-2m}{-1} = 2m-6$ (1p)

$-m = 2m - 6 \Leftrightarrow m = 2$ (1p)

b) y = mx + n   m=1 (1p)

y = x + 2   n=2

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+mx+2}{x(x+1)} = 1 \qquad (1p)$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+mx+2-x^2-x}{x+1}\right) = m - 1 \qquad (1p)$$

$$m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3 \qquad (1p)$$

<u>Problema 4</u>

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-5x+6}$;   b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right)$.

Soluție

a) $-\frac{1}{6}$ (4p)

b) $\frac{3}{2}$ (3p)