Propuneri subiecte pentru Olimpiada de Matematică
Etapa locală
10 februarie 2024
Barem de corectare clasa VIII

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:
$\sqrt{x^2-2024}+\sqrt{2089-x^2}=|46x+2061|$.

Soluție :

Condiția de existență a radicalilor : $x^2-2024\geq 0$ și 2089-$x^2\geq 0$,deci 2024$\leq x^2\leq 2089$	Punctaj 1p
Cum $x\in Z$ $și$ 2024$\leq x^2\leq 2089$,obținem $x=\pm 45$	1p
Pentru$x=\pm 45$, obținem $\sqrt{x^2-2024}=1$ și $\sqrt{2089-x^2}=8$,deci 9=$\|46x+2061\|$	3p
Dacă$x=45$ obținem 9=$\|46\cdot 45+2061\|$(F) Dacă $x=-45$ obținem 9=$\|46\cdot(-45)+2061\|$ (A) ,deci rezultă $x=-45$ este soluțiaecuației este $S=\{-45\}$	2p

2. Fie a, b, d, e numere reale cu $a>d$ și $c=a^2+b^2, f=d^2+e^2, m=\frac{b-e}{a-d}, n=\frac{bd-ae}{a-d}$.
Arătați că, dacă $x\in[-a;-d]$ și $y=mx+n$, atunci
$E(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+2ax+2by+c}+\sqrt{x^2+y^2+2dx+2ey+f}$ nu depinde de x.
(Gazeta Matematică)

Soluție:

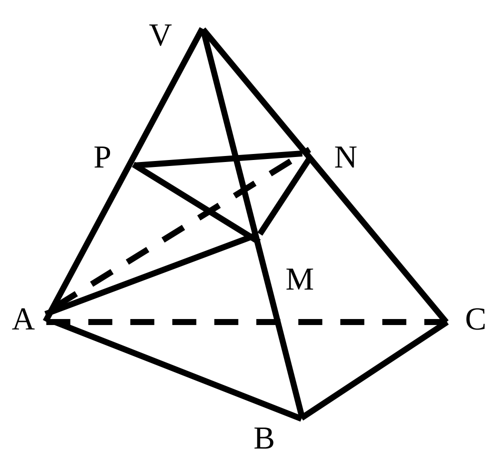
Înlocuim c cu a^2+b^2 și f cu d^2+e^2 și expresia devine: $E(x,y)=\sqrt{x^2+2ax+a^2+y^2+2by+b^2}+\sqrt{x^2+2dx+d^2+y^2+2ey+e^2}E(x,y)=\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}+\sqrt{(x+d)^2+(y+e)^2}$	Punctaj 2p
$y=mx+n\Rightarrow y=\frac{b-e}{a-d}x+\frac{bd-ae}{a-d}\Rightarrow$ $\Rightarrow y+b=\frac{bx-ex+bd-ae+ab-bd}{a-d}\Rightarrow y+b=\frac{(b-e)(x+a)}{a-d}$ $\Rightarrow y+e=\frac{bx-ex+bd-ae+ae-de}{a-d}\Rightarrow y+e=\frac{(b-e)(x+d)}{a-d}$	2p
$E(x,y)=\sqrt{(x+a)^2+\frac{(b-e)^2(x+a)^2}{(a-d)^2}}+\sqrt{(x+d)^2+\frac{(b-e)^2(x+d)^2}{(a-d)^2}}$ $E(x,y)=\|x+a\|\sqrt{1+\frac{(b-e)^2}{(a-d)^2}}+\|x+d\|\sqrt{1+\frac{(b-e)^2}{(a-d)^2}}$ $E(x,y)=\sqrt{1+\frac{(b-e)^2}{(a-d)^2}}(\|x+a\|+\|x+d\|)$	2p
$x\in[-a;-d]\Rightarrow -a\leq x\leq -d\Rightarrow 0\leq x+a\leq a-d\Rightarrow \|x+a\|=x+a$ $-a\leq x\leq -d\Rightarrow d-a\leq x+d\leq 0\Rightarrow \|x+d\|=-x-d$	1p

$E(x,y) = \sqrt{1 + \frac{(b-e)^2}{(a-d)^2}}(x + a - x - d) \Longrightarrow E(x,y) = \sqrt{1 + \frac{(b-e)^2}{(a-d)^2}}(a - d).$ Deci, expresia nu depinde de x.	

3. Se consideră piramida triunghiulară regulată VABC cu latura bazei de 12 cm și muchia laterală de 18 cm. Fie AM bisectoarea unghiului VAB, M∈VB, și AN bisectoarea unghiului VAC, N ∈VC.
   a) Calculați lungimea segmentului MN.
   b) Dacă punctul P ∈VA astfel încât MP ∥AB, calculați aria triunghiului MNP.

Soluție:

	Punctaj
Desen. a)Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul VAB obținem:$\frac{VM}{MB} = \frac{VA}{VB} \Longrightarrow \frac{VM}{MB} = \frac{3}{2}$. Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul VAC obținem:$\frac{VN}{NC} = \frac{VA}{VC} \Longrightarrow \frac{VN}{NC} = \frac{3}{2}$.	1p 2p
Aplicând reciproca teoremei lui Thales în triunghiul VBC, obținem MN∥BC. Aplicând teorema fundamentală a asemănării în triunghiul VBC $\Longrightarrow \frac{VM}{VB} = \frac{MN}{BC} \Longrightarrow \frac{3}{5} = \frac{MN}{12} \Longrightarrow MN = 7{,}2$ cm.	2p
b)MN∥BC, MP∥AB $\Longrightarrow (MNP)$∥(ABC). (VAC)∩(MNP)=NP, (VAC)∩(ABC)=AC⟹NP∥AC. Aplicând teorema fundamentală a asemănării în triunghiurile VAB și VAC, obținem MP=NP=7,2 cm=MN⟹triunghiul MNP este echilateral ⟹ aria triunghiului este $12{,}96\sqrt{3}$ cm^2.	2p



4. Pe planul dreptunghiului ABCD, cu AD = $a\ cm$ și DC = $a\sqrt{2}\ cm$, se ridică perpendiculara ND, cu ND = $a\ cm$. Fie DM⊥NA, M∈NA și DQ⊥NB, Q∈NB. Dacă S este mijlocul segmentului ND, aflați perimetrul triunghiului MQS.

Soluție:

	Punctaj
Desen.	1p
ΔADN dreptunghic isoscel⟹ DM înălțime și mediană⟹ $DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.	1p
ΔBDN dreptunghic în D ⟹ $DQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	1p
Justifică că DM⊥(NAB) și, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul DMQ, determină $MQ = \frac{a}{2}$.	1p
În triunghiul DNQ, QS este mediană corepunzătoare ipotenuzei⟹ $QS = \frac{DN}{2} \Rightarrow QS = \frac{a}{2}$.	1p
În triunghiul ADN, MS este linie mijlocie ⟹ $MS = \frac{AD}{2} \Rightarrow MS = \frac{a}{2}$.	1p
Triunghiul MQS este echilateral ⟹ $P_{\Delta MQS} = \frac{3a}{2}$.	1p