MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VASLUI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală 24.02.2024
Secțiunea H1 (Tehnic, Servicii, Uman) - Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Secțiunea H1 - Clasa a X-a

<u>Problema 1</u>

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to(-4;\infty)$, $f(x)=a^{2x-1}-4$, unde $a\in(0;\infty)-\{1\}$.

a) Să se determine numărul $a\in(0;\infty)-\{1\}$, pentru care $f(2)=23$.

b) Pentru $a=5$, rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{f(x+1)+4}{5^x}-f(x)=4\cdot 5^x+4$.

Soluție:

a) $f(2)=a^3-4$ $\quad a^3-4=23$ 1p

$a=3$ 1p

b) $f(x+1)=5^{2x+1}-4$ 1p

$\dfrac{5^{2x+1}-4+4}{5^x}-\left(5^{2x-1}-4\right)=4\cdot 5^x+4$ 1p

$5^{x+1}-\left(5^{2x-1}-4\right)=4\cdot 5^x+4$ 1p

$5^{2x-1}=5^x$ 1p

$x=1$ 1p

<u>Problema 2</u>

Fie $a=\sqrt[3]{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}+\sqrt[3]{\sqrt{2019}-\sqrt{2020}}$

a) Să se arate că $a^3+3a\in\mathbf{R}\setminus\mathbb{Q}$

b) Să se arate că $\log_{2019}\dfrac{a^3+3a}{2}+\log_a\left(\dfrac{2\sqrt{2019}}{a}-3\right)\in\mathbb{Q}$

Soluție:

a) $a^3=\sqrt{2019}+\sqrt{2020}+\sqrt{2019}-\sqrt{2020}+3\sqrt[3]{2019-2020}\cdot a$ (1p)

$a^3=2\sqrt{2019}-3\cdot a$

$a^3+3\cdot a=2\sqrt{2019}$ (1p)

$2\sqrt{2019}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ si $a^3+3\cdot a=2\sqrt{2019}$ atunci $a^3+3\cdot a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (1p)

b) $a^3+3\cdot a=2\sqrt{2019}$ atunci $\dfrac{a^3+3\cdot a}{2}=\sqrt{2019}$ (1p)

$a(a^2+3)=2\sqrt{2019}$ atunci

$a>0$ si $\dfrac{2\sqrt{2019}}{a}-3=a^2$ (1p)

$$\log_{2019}\frac{a^3+3a}{2}=\log_{2019}\sqrt{2019}=\frac{1}{2}$$

$$\log_a\left(\frac{2\sqrt{2019}}{a}-3\right)=\log_a a^2=2$$ (1p)

$$\log_{2019}\frac{a^3+3\cdot a}{2}+\log_a\left(\frac{2\sqrt{2019}}{a}-3\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\in\mathbb{Q}$$ (1p)

<u>Problema 3</u>

Fie ecuația: $z^2-z+1=0$ cu rădăcinile z_1 si z_2.

a) Să se determine z_1 si z_2.

b) Să se arate ca $z_1{}^3=z_2{}^3=-1$

c) Să se calculeze $z_1{}^2+z_2{}^2$ si $\dfrac{1}{z_1^{2020}}+\dfrac{1}{z_2^{2020}}$.

Soluție:

a) $z^2-z+1=0$

$\Delta=-3$ $\quad z_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ (1p)

b) $z_{1,2}$ radacinile ecuatiei atunci $z_1^2-z_1+1=0 \quad |\cdot z_1$

$z_2^2-z_2+1=0 \quad |\cdot z_2$ (1p)

$$z_1^3-z_1^2+z_1=0\rightarrow z_1^3=z_1^2-z_1=-1$$

$$z_2^3-z_2^2+z_2=0\rightarrow z_2^3=z_2^2-z_2=-1$$ (1p)

c) $z_1+z_2=1, z_1\cdot z_2=1$ (1p)

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 - 1 + z_2 - 1 = z_1 + z_2 - 2 = 1 - 2 = -1 \qquad (1p)$$

$$\frac{1}{z_1^{2020}} + \frac{1}{z_2^{2020}} = \frac{z_1^{2020} + z_2^{2020}}{(z_1 \cdot z_2)^{2020}} = \frac{z_1^{2019} \cdot z_1 + z_2^{2019} \cdot z_2}{1^{2020}} = (z_1^3)^{673} \cdot z_1 + (z_2^3)^{673} \cdot z_2 = -z_1 - z_2 = -1 \qquad (2p)$$

Problema 4

Un baril de petrol este o unitate de volum echivalentă cu 42 de galoane americane. Dacă un galon american înseamna 3,785 $\boldsymbol{dm^3}$, iar prețul unui baril de petrol este aproximativ 79,5 dolari. (Se știe ca 1 $\boldsymbol{dm^3}$ = 1 l).

a) Calculați prețul aproximativ al unui galon.
b) Calculați prețul aproximativ al unui litru de petrol.

Soluție:

1 galon = 1,89 dolari 3p
1 litru = 0,5 dolari 4p