Barem ONM - faza locală (clasa a IX-a)

Subiectul I

a) Dați exemplu de un număr $x \in \mathbb{R}$ care să verifice: $\{x\} + \{2x\} > [x] + 1$,
unde {x} = partea fracționară a lui x, iar [x] = partea întreagă a lui x.

b) Oricare ar fi numărul $y \in \mathbb{R}$ arătați că: [2y] + [2y+$\frac{1}{3}$] +[2y+$\frac{2}{3}$] = [3y] +[3y+$\frac{1}{2}$].

c) Să se arate că $(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$.

Soluție și barem :

a) Luăm x = 0,4 ⇒ 2x = 0,8 **(1p).** Verificarea conduce la 0,4 +0,8 >1, adev.**(1p)**

b) Folosim identitatea lui Hermite: $[a] + \left[a+\frac{1}{3}\right] + \left[a+\frac{2}{3}\right] = [3a]$și, luând $a = 2y$, avem

[2y] + [2y+$\frac{1}{3}$] +[2y+$\frac{2}{3}$] =[3· $2y$] = [6y]**(1p).**

Folosim identitatea lui Hermite: [a] + [a+$\frac{1}{2}$] =[2a]și, luând $a = 3y$, avem

[3y] + [3y+$\frac{1}{2}$] =[2· $3y$] = [6y] **(1p).**

c). $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \leq 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(a+b+c) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.**(2,5p)**

De aici avem $(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ **(0,5p)**

Subiectul al II-lea

Determinați numerele reale x pentru care $2\{x\}^2 < \{x\}$, cu proprietatea că cel mai apropiat întreg de x este $3x - [x] - 6\{x\} - 1$. S-a notat $\{a\}$ și$[a]$ partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a.

Soluție și barem :

Cum $\{x\} \in (0,1)$ pentru orice număr real diferit de un număr întreg, din $2\{x\}^2 < \{x\}$ obținem

$\{x\} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ **(2p).** $3x - [x] - 6\{x\} - 1 = 2[x] - 3\{x\} - 1 \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow 3\{x\} \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{3}$ **(2p)**

Cel mai apropiat întreg de x este partea sa întreagă, deci $2[x] - 3\{x\} - 1 = [x] \Rightarrow [x] = 2$

Așadar $x = \frac{7}{3}$ **(3p)**

Subiectul al III-lea

Coardele [AB] și [CD] ale cercului de centru O sunt perpendiculare și se intersectează în Q. Să se demonstreze că: $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = 2\overrightarrow{QO}$.

Soluție și barem :

Construim $d_1 \parallel CD$, $O \in d_1$, $d_1 \cap AB = \{M\}$ și $d_2 \parallel AB$, $O \in d_2$, $d_2 \cap CD = \{N\}$. **(Figura 1)** **(1p)**

Avem: $d_2 \parallel AB \Rightarrow ON \parallel MQ$ și $d_1 \parallel CD \Rightarrow OM \parallel NQ$, deci ONQM paralelogram **(1p)** $\Rightarrow$ $\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QO}$. **(1p)**$O \in d_1$, $d_1 \perp AB \Rightarrow d_1$ = mediatoarea seg. [AB] $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Analog, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND}$.**(1p)**$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QB} \Rightarrow \overrightarrow{QM} - \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} \Rightarrow \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QM}$**(1p)** Analog ,$\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = 2\overrightarrow{QN}$**(1p)**

$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = 2\overrightarrow{QM} + 2\overrightarrow{QN} = 2(\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN}) = 2\overrightarrow{QO}$**(1p)**

Figura 2

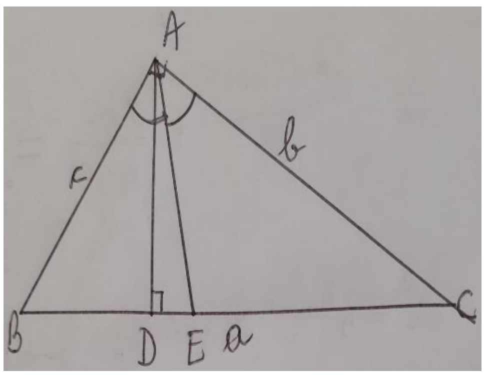
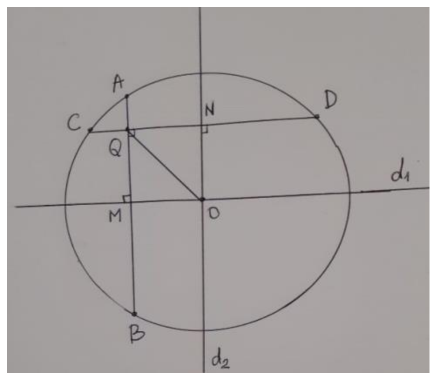


Figura 1



Subiectul al IV-lea

În triunghiul ABC avem: AB = c, BC = a, CA = b, $AD \perp BC$, [AE = bisectoarea lui $\widehat{BAC}$ $(D, E \in BC)$ și $m(\widehat{BAC}) = 90^0$. Justificați că:**a)** $\overrightarrow{AE} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

b) $a^2\overrightarrow{AD} = b^2\overrightarrow{AB} + c^2\overrightarrow{AC}$. **c)** $\left|\overrightarrow{DE}\right| \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(b-c)^2$.

Soluție și barem : a).[AE = bisectoareaunghiului$\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = k$**(1p)** $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.\ \mathbf{(1p)}$$

b). Aplicând teorema catetei în Δ ABC obținem:$AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow BD = \frac{c^2}{a}$.

și $AC^2 = CD \cdot BC \Rightarrow CD = \frac{b^2}{a}$. **(1p)** Deci, $\frac{BD}{CD} = \frac{c^2}{b^2} = l$ **(0,5p)** și $b^2 + c^2 = a^2$ **(0,5p)**

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+l}\overrightarrow{AB} + \frac{l}{1+l}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{b^2}{a^2}\overrightarrow{AB} + \frac{c^2}{a^2}\overrightarrow{AC}$ **(1p)** $\Rightarrow a^2\overrightarrow{AD} = b^2\overrightarrow{AB} + c^2\overrightarrow{AC}$.

c). $\left|\overrightarrow{DE}\right| = \left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right| = \left|\left(\frac{b}{b+c} - \frac{b^2}{a^2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c^2}{a^2}\right)\overrightarrow{AC}\right| \le$

$$\left(\frac{b}{b+c} - \frac{b^2}{a^2}\right)c + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c^2}{a^2}\right)b\,\mathbf{(1p)} = \frac{2bc}{b+c} - \frac{bc(b+c)}{b^2+c^2} \le \frac{b+c}{2} - \frac{bc(b+c)}{b^2+c^2} =$$
$$= \frac{(b+c)(b-c)^2}{2(b^2+c^2)} \le \frac{(b+c)(b-c)^2}{4bc} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(b-c)^2.\ \mathbf{(1p)}$$