Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- clasa a X-a
10 februarie 2024

Subiectul I

Să se demonstreze că pentru orice numere pozitive a,b,c supraunitare are loc:

$$\log_a^3 bc+\log_b^3 ca+\log_c^3 ab\geq 24 .$$

Subiectul al II-lea

Fie z_1,z_2,z_3 numere complexe nenule astfel încât $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$. Să se arate că numărul $z=\dfrac{z_1^6+z_2^6+z_3^6}{z_1^2z_2^2z_3^2}$ este real.

Subiectul al III-lea

Să se determine funcțiile surjective $f:N^*\to N^*$, astfel încât:

$$\frac{1}{2f(1)}+\frac{1}{3f(2)}+\ldots+\frac{1}{nf(n-1)}=\frac{n-1}{f(n)},\forall n\in N,n\geq 2$$

Subiectul al IV-lea

a) Fie $a=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$. Arătați că a^3+6a este un număr natural.

b) Fie z_1,z_2,z_3 rădăcinile complexe ale ecuației $z^3+24z-16=0$ și punctele $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$ în planul complex iar G centru de greutate al triunghiului ABC. Arătați că $GA+GB+GC>6\sqrt[3]{2}$

Gazeta matematică

Notă: Fiecare subiecte este obligatoriu și se notează cu punctaje de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.