Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- clasa a VII-a
10 februarie 2024

Subiectul I.

a). Demonstrați că:

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$, pentru orice număr natural nenul n.

b). Arătați că $\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

c). Dacă a, b, c sunt numere raționale astfel încât $ab+ac+bc=23$, atunci arătați că

$\sqrt{(a^2+23)(b^2+23)(c^2+23)}$ este număr rațional.

Subiectul al II-lea

Fie pătratul $ABCD$ și M un punct pe latura BC. De aceeași parte a dreptei AB se construiește pătratul $AMNP$. Arătați că punctele P,D,C sunt coliniare și că dreptele AC și CN sunt perpendiculare.

(Supliment noiembrie 2023)

Subiectul al III-lea

Fie triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC și punctele D și E pe latura AB, F și G pe latura AC astfel încât $DM \parallel CE$ și $MF \parallel BG$. Notăm cu N și P mijloacele segmentelor DF, respectiv EG. Demonstrați că M, N, P sunt coliniare.

(G.M. nr 10/ 2023)

Subiectul al IV-lea

a). Arătați că $\left[\sqrt{4n^2+n}\right]$ este un număr natural par, pentru orice număr natural n. (prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x).

b). Calculați suma: $S=\left[\sqrt{1\cdot 5}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 9}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 13}\right]+\cdots+\left[\sqrt{50\cdot 201}\right]$

Notă: Fiecare subiecte este obligatoriu și se notează cu punctaje de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.