Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 10 februarie 2024

Clasa a X-a- Subiecte și bareme

Subiectul I Să se demonstreze că pentru orice numere pozitive a,b,c supraunitare are loc:

$$\log_a^3 bc+\log_b^3 ca+\log_c^3 ab\geq 24 .$$

Soluție și barem:

$\log_a^3 bc+\log_b^3 ca+\log_c^3 ab\geq 3\sqrt[3]{\log_a^3 bc\cdot\log_b^3 ca\cdot\log_c^3 ab}=3\cdot\log_a bc\cdot\log_b ca\cdot\log_c ab=$ **(2p)**

$=3\cdot(\log_a b+\log_a c)(\log_b c+\log_b a)(\log_c b+\log_c a)\geq$ **(1p)**

$\geq 3\cdot 2\cdot\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c}\cdot 2\cdot\sqrt{\log_b c\cdot\log_b a}\cdot 2\sqrt{\log_c a\cdot\log_c b}=$ **(2p)**

$=24\cdot\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c\cdot\log_b c\cdot\log_b a\cdot\log_c a\cdot\log_c b}=$ **(1p)**

$=24\cdot\sqrt{(\log_a b\cdot\log_b a)\cdot(\log_b c\cdot\log_c b)\cdot(\log_c a\cdot\log_a c)}=24$ **(1p).**

Subiectul al II-lea Fie z_1,z_2,z_3 numere complexe nenule astfel încât $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$. Să se arate că numărul $z=\dfrac{z_1^6+z_2^6+z_3^6}{z_1^2z_2^2z_3^2}$ este real.

Soluție și barem: Notăm $z_1^2=x_1, z_2^2=x_2, z_3^2=x_3$ **(1p)**

$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_3=-(x_1+x_2)$ **(2p)**

$z=\dfrac{x_1^3+x_2^3-(x_1+x_2)^3}{-x_1x_2(x_1+x_2)}=$ **(1p)**

Prin calcule obținem $z=3\in R$ **(3p)**

Subiectul al III-lea Să se determine funcțiile surjective $f:N^*\to N^*$, astfel încât:

$$\frac{1}{2f(1)}+\frac{1}{3f(2)}+\ldots+\frac{1}{nf(n-1)}=\frac{n-1}{f(n)},\forall n\in N,n\geq 2$$

Soluție și barem: Pentru $n=2\Rightarrow\dfrac{1}{2f(1)}=\dfrac{1}{f(2)}\Rightarrow f(2)=2f(1)$ **(1p)**

Pentru $n=3 \Rightarrow \frac{1}{2f(1)}+\frac{1}{3f(2)}=\frac{2}{f(3)} \Rightarrow \frac{1}{2f(1)}+\frac{1}{3\cdot 2f(1)}=\frac{2}{f(3)} \Rightarrow f(3)=3f(1)$ **(1p)**

Inductiv, găsim că $f(n)=n\cdot f(1), \forall n\geq 2, n\in N$ **(1p)**

Folosind surjectivitatea funcției găsim că $\exists n_0 \in N^*$ astfel încât $f(n_0)=1$ **(2p)**

$n\cdot f(n)=1$ și $n\in N^* \Rightarrow f(1)=n_0=1 \Rightarrow f(1)=1, f(2)=2,..., f(n)=n$ **(2p)**

Subiectul al IV-lea a). Fie $a=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$. Arătați că a^3+6a este un număr natural.

b). Fie z_1, z_2, z_3 rădăcinile complexe ale ecuației $z^3+24z-16=0$ și punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ în planul complex iar G centru de greutate al triunghiului ABC. Arătați că $GA+GB+GC>6\sqrt[3]{2}$

Gazeta Matematică

<u>**Soluție și barem:**</u>

a) $a^3=\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^3=\sqrt[3]{4}^3-\sqrt[3]{2}^3-3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)=4-2-3\sqrt[3]{8}\cdot a=2-6a$.

Așadar, $a^3+6a=2\in N$ **(2p)**

b). Folosim subpunctul a), respectiv $2=a^3+6a$ ecuația dată se rescrie astfel

$$z^3+24z-2\cdot 8=0 \Rightarrow z^3+24z-\left(a^3+6a\right)\cdot 8=0 \Rightarrow z^3+24z-8a^3-48a=0$$

$$\Rightarrow \left(z^3-8a^3\right)+24(z-2a)=0 \Rightarrow (z-2a)\left(z^2+2az+4a^2\right)+24(z-2a)=0$$

$$\Rightarrow (z-2a)\left(z^2+2az+4a^2+24\right)=0 \Rightarrow z_1=2a \text{ sau } z^2+2az+4a^2+24=0$$

$z_{2,3}=-a\pm i\sqrt{3a^2+24}$ **(2p)**

Adică, $A(2a), B\left(-a-i\sqrt{3a^2+24}\right), C\left(-a+i\sqrt{3a^2+24}\right)$

Iar centrul de greutate va avea afixul $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=0$ **(1p)**

$GA=|z_G-z_A|=|2a|=2a$, $GB=|z_G-z_B|=\left|a+i\sqrt{3a^2+24}\right|=\sqrt{4a^2+24}=GC$ **(1p)**

$GA+GB+GC>3\cdot\sqrt[3]{GA\cdot GB\cdot GC}=3\sqrt[3]{2a\cdot\left(4a^2+24\right)}$ și cum $GA\neq GB$ inegalitatea va fi strictă, adică $GA+GB+GC>3\cdot\sqrt[3]{2\cdot 4\cdot a\cdot\left(a^2+6\right)}=6\sqrt[3]{a^3+6a}=6\sqrt[3]{2}$. **(1p)**