Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 10 februarie 2024

Clasa a VI-a

Problema 1

Suma a trei numere naturale este 2024. Împărțind primul număr la suma celorlalte două numere, se obține câtul 17 și restul 8. Dacă cel mai mare divizor comun al ultimelor două numere este 16, aflați cele trei numere.

Problema 2

Demonstrați că dacă are loc egalitatea 2a+13b=11c, atunci $(a+b)(b+c)(c+a) \vdots 286$

Gazeta matematică

Problema 3

Unghiurile $\sphericalangle AOC$ si $\sphericalangle COB$ sunt adiacente suplementare, iar punctele C si D sunt de o parte și de cealaltă a dreptei AO, astfel încât $m(\sphericalangle COD) = 100°$ și $m(\sphericalangle BOD) = 3 \cdot m(\sphericalangle AOC) < 180°$. Aflați:

a) Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COB$ și $\sphericalangle BOD$.

b) Măsura unghiului format de bisectoarea $\sphericalangle AOD$ și semidreapta opusă semidreptei $[OC$.

Problema 4

Spunem că două sau mai multe unghiuri au proprietatea $\mathscr{P}$ dacă au interioarele disjuncte două câte două și măsurile lor sunt numai de 15^0 sau de 48^0.

a) Determinați numărul de unghiuri cu această proprietate $\mathscr{P}$ și care se pot construi în jurul unui punct.

b) Arătați că există patru unghiuri $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, cu proprietatea $\mathscr{P}$, astfel încât bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle DOE$ să formeze un unghi cu măsura de 78^0.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 10 februarie 2024
Clasa a VI-a

Problema 1

Suma a trei numere naturale este 2024. Împărțind primul număr la suma celorlalte două numere, se obține câtul 17 și restul 8. Dacă cel mai mare divizor comun al ultimelor două numere este 16, aflați cele trei numere.

Barem de notare și evaluare

a+b+c=2024 și a=17(b+c)+8 și 8<(b+c)..2p

b+c=112..1p

(b,c)=16 implică b=16x, c=16y , cu (x,y)=1..1p

16x+16y=112 implică x+y=7...1p

x+y=7 și (x,y)=1 rezultă (x,y)∈{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}.................................1p

(a,b,c) ∈{(1912,16,96), (1912,32,80), (1912,48,64), (1912,64,48), (1912, 80,32),

(1912, 96,16)}..1p

Problema 2

Demonstrați că dacă are loc egalitatea 2a+13b=11c, atunci (a+b)(b+c)(c+a) ⋮286

Barem de notare și evaluare

2a+13b=11c → 2a+2b+11b=11c, adică 2(a+b)=11(c-b)...1p

2(a+b)=11(c-b) și (2,11)=1 → $\begin{cases}(a+b) ⋮ 11 \\ (c-b) ⋮ 2\end{cases}$ 1p

$(c-b) ⋮ 2$ → c și b au aceeași paritate, deci $(c+b) ⋮ 2$...1p

2a+13b=11c → 2a+13b=13c-2c, adică 2(a+c)=13(c-b)...1p

2(a+c)=13(c-b) și (2,13)=1 rezultă că $(a+c) ⋮ 13$ 1p

Avem că 286=2·11·13...1p

Din $\begin{cases}(a+b) ⋮ 11 \\ (b+c) ⋮ 2 \\ (a+c) ⋮ 13\end{cases}$ și 286=2·11·13, obținem că (a+b)(b+c)(c+a) ⋮286……………………..1p

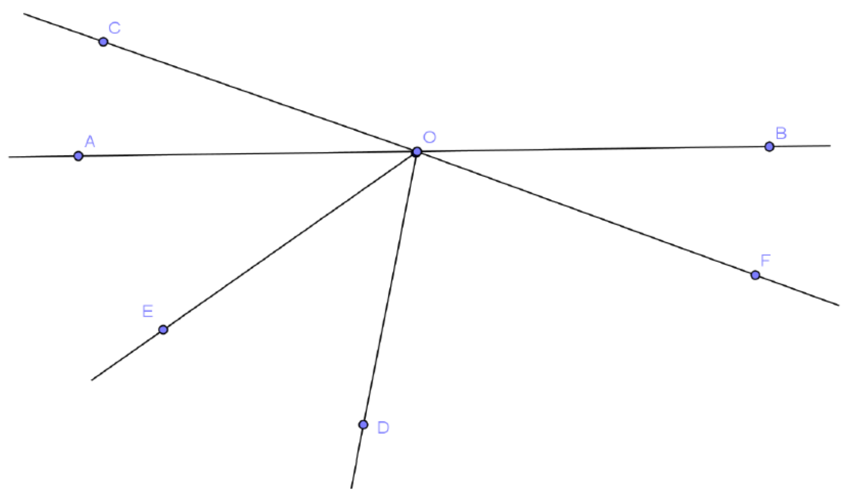
Problema 3

Unghiurile $\sphericalangle AOC$ si $\sphericalangle COB$ sunt adiacente suplementare, iar punctele C si D sunt de o parte și de cealaltă a dreptei AO, astfel încât m($\sphericalangle COD$)= 100° și m($\sphericalangle BOD$)=3·m($\sphericalangle AOC$)< 180°. Aflați:

a) Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COB$ si $\sphericalangle BOD$.

b) Măsura unghiului format de bisectoarea $\sphericalangle AOD$ și semidreapta opusă semidreptei [OC.

Barem de notare și evaluare



a) m($\sphericalangle AOC$)+m($\sphericalangle BOC$)=180°, desen..1p

Fie m($\sphericalangle AOC$)=x°, atunci m($\sphericalangle BOD$)=3x° și m($\sphericalangle AOD$)=100°-x..1p

m($\sphericalangle AOD$)+m($\sphericalangle BOD$)=180°, deci x=40°...1p

m($\sphericalangle AOC$)=40°, m($\sphericalangle BOC$)=140°, m($\sphericalangle BOD$)=120°...1p

b) m($\sphericalangle AOD$)=60°

Fie (OE bisectoarea $\sphericalangle AOD$ → m($\sphericalangle AOE$)=m($\sphericalangle EOD$)=30°..1p

(OF semidreapta opusă lui (OC→ $m(\sphericalangle COF) = 180°$...1p

$m(\sphericalangle EOF) = m(\sphericalangle COF) - m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle AOE) = 110°$..1p

Problema 4

Spunem că două sau mai multe unghiuri au proprietatea $\mathscr{P}$ dacă au interioarele disjuncte două câte două și măsurile lor sunt numai de 15^0 sau de 48^0.

c) Determinați numărul de unghiuri cu această proprietate $\mathscr{P}$ și care se pot construi în jurul unui punct.

d) Arătați că există patru unghiuri ∢AOB, ∢BOC, ∢COD, ∢DOE, cu proprietatea $\mathscr{P}$, astfel încât bisectoarele unghiurilor ∢AOB, respectiv ∢DOE să formeze un unghi cu măsura de 78^0.

Barem de notare și evaluare

a) Fie x numărul unghiurilor de 15° și y numărul unghiurilor de 48°

$15°\cdot x+48°\cdot y=360°/:3\rightarrow 5°\cdot x+16°\cdot y=120°$..1p

Cum 120⋮ 8 și 16⋮ 8 și (5,8)=1, rezultă că $x \vdots 8$...1p

Pt x=8 obținem y=5, pentru $x \geq 16$ nu avem soluții..2p

b) $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} + k \cdot 15° + p \cdot 48° + \frac{m(\sphericalangle DOE)}{2} = 78°$,

unde k=nr. de unghiuri de 15° și p=nr. unghiurilor de 48°

Studiem 3 cazuri

i) $m(\sphericalangle AOB) = 48°$ $și$ $m(\sphericalangle DOE)$=15°,

atunci $m\sphericalangle(BOC) + m(\sphericalangle COD) = 78° - 31°30' = 36°30'$, fără soluție.............................1p

ii) $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle DOE)$=48°,

atunci $m\sphericalangle(BOC) + m(\sphericalangle COD) = 78° - 48° = 30°$,

Cum 30°=15°+15°, avem 2 unghiuri de 15° și 2 unghiuri de 48°..1p

iii) $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle DOE)$=15°,

atunci $m\sphericalangle(BOC) + m(\sphericalangle COD) = 78° - 15° = 63°$,

Cum 63°=15°+48°, avem 3 unghiuri de 15° și un unghi de 48°..1p