CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală 24.02.2024
Secțiunea H2(Științe ale naturii) - Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1

(2p) **a)** Să se arate că $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) **b)** Să se determine numărul $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}}\in(k,k+2)$.

Soluție:

a) (2p) Se demonstrează că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ și $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{99}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)<\sum\limits_{k=1}^{99}\dfrac{1}{2\sqrt{k}}<\sum\limits_{k=1}^{99}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$ (2p)

de aici $\sqrt{100}-1<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}}\right)<\sqrt{99}$ (1p) de unde

$18<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}}<2\sqrt{99}<18+2$. Astfel $k=18$. (2p)

Problema 2

(5p) **a)** Se consideră predicatele $p(x)$:„$|x-2|+|1-x|=1,\ x\in\mathbb{R}$” și $q(x)$:„$\left[\dfrac{2x-1}{2}\right]=1,\ x\in\mathbb{R}$” și A, B mulțimile lor de adevăr. Determinați mulțimea $A\cap B$.

(2p) **b)** Se dau mulțimile $C=\{p\mid p\in\mathbb{N},\ p<30,\ p=\text{prim}\}$ și $D=\left\{r\mid r\in\mathbb{Q}, r=\dfrac{a}{b}, a,b\in C\right\}$.

Determinați cardinalul mulțimii D.

Soluție:

a) (2p) $|x-2|+|1-x|=1\Leftrightarrow x\in[1,2]=A$

(2p) $\left[\dfrac{2x-1}{2}\right]=1\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)=B$

(1p) De aici $A\cap B=\left[\dfrac{3}{2},2\right]$.

b) $C=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$. card($C$) = 10 (1p)

(1p) card(D) = 100 – 9 = 91.

Problema 3

Fie triunghiul *ABC* și punctul *G* centru de greutate al triunghiului. Se consideră punctul *N* astfel încât $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$ și punctul *P*, simetricul lui *B* față de *G*. Să se arate că:

(2p) **a)** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

(2p) **b)** Patrulaterul *APCG* este paralelogram,

(3p) **c)** Punctele *A*, *P*, *N* sunt coliniare.

Soluție:

a) Avem $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, unde *M* este mijlocul laturii *BC* (1p).

Așadar $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ deci, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1p)

b) Cum *P* este simetricul punctului *B* față de *G*, atunci $\overrightarrow{GP} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$
APCG este paralelogram (2p).

c) *APCG* paralelogram, deci $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GN}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$, de unde *A*, *P*, *N* sunt puncte coliniare (3p).

Problema 4

Pe un cilindru (rolă) cu diametrul *d* se află înfășurat un film de grosime *g*. Să se determine lungimea filmului după n rotații complete, fără a-l desfășura.

Soluție:

(1p) La fiecare înfășurare pe rolă se adaugă la lungimea diametrului cercului de înfășurare 2*g*. (2p) Prima înfășurare este un cerc cu diametrul $d_1 = d + 2g$, a doua înfășurare are diametrul $d_2 = d + 2 \cdot 2g$, …, $d_n = d + n \cdot 2g$.

(1p) Lungimile acestor diametre vor fi în progresie aritmetică, cu rația 2*g*.

$L = L_1 + L_2 + ... + L_n = \pi(d_1 + d_2 + ... + d_n) = \pi \frac{[2d + 2g(n+1)]n}{2} = \pi n[d + g(n+1)]$ (3p).