MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VASLUI

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- clasa a IX-a
10 februarie 2024

Subiectul I

a) Dați exemplu de un număr $x \in \mathbb{R}$ care să verifice: $\{x\} + \{2x\} > [x] + 1$,
unde {x} = partea fracționară a lui x, iar [x] = partea întreagă a lui x.

b) Oricare ar fi numărul $y \in \mathbb{R}$ arătați că: $[2y] + [2y+\frac{1}{3}] + [2y+\frac{2}{3}] = [3y] + [3y+\frac{1}{2}]$.

c) Să se arate că $(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$.

Subiectul al II-lea

Determinați numerele reale x pentru care $2\{x\}^2 < \{x\}$, cu proprietatea că cel mai apropiat întreg de x este $3x - [x] - 6\{x\} - 1$. S-a notat $\{a\}$ și$[a]$ partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a.

(G.M. nr.6-7-8/2023)

Subiectul al III-lea

Coardele [AB] și [CD] ale cercului de centru O sunt perpendiculare și se intersectează în Q. Să se demonstreze că: $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = 2\overrightarrow{QO}$.

Subiectul al IV-lea

În triunghiul ABC avem: AB = c, BC = a, CA = b, AD ⊥ BC, [AE = bisectoarea lui $\widehat{BAC}$ $(D, E \in BC)$ și m($\widehat{BAC}$) = 90^0. Justificați că:

a) $\overrightarrow{AE} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

b) $a^2\overrightarrow{AD} = b^2\overrightarrow{AB} + c^2\overrightarrow{AC}$.

c) $|\overrightarrow{DE}| \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(b-c)^2$.

Notă: Fiecare subiecte este obligatoriu și se notează cu punctaje de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.