Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- clasa a V-a
10 februarie 2024
Barem de corectare

Subiectul I Se dau numerele:

$x = [(2^3)^5 + 25^3 - 7^{35} : 7^{20}] : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) \cdot 3^{26}$,

$y = 2^{101} : [(5^{171} : 5^{170} - 3)^{98} + 2^{105} : (2^3 \cdot 2^4) + (2^{11})^9] \cdot 2^{38}$.

a). Să se calculeze x și y

b). Să se compare x cu y

Soluție și barem

a). $x = (2^{15} + 5^6 - 7^{15}) : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) \cdot 3^{26} = 1 \cdot 3^{26} = 3^{26}$. (**2p**)

$y = 2^{101} : [(5^1 - 3)^{98} + 2^{105} : 2^7 + 2^{99}] \cdot 2^{38} =$

$= 2^{101} : [2^{98} + 2^{98} + 2^{99}] \cdot 2^{38} = 2^{101} : 2^{100} \cdot 2^{38} = 2^{39}$. (**2p**)

b)Avem $2^3 < 3^2$, atunci $(2^3)^{13} < (3^2)^{13} \Rightarrow 2^{39} < 3^{26} \Rightarrow y < x$. (**3p**)

Subiectul al II-lea Să se determine numerele $\overline{abcde}$ știind că: $4 \cdot (2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bcd}) + 2^e = 2025$

Soluție și barem

$4 \cdot \left(2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bcd}\right)$ număr par, 2025 număr impar $\Rightarrow 2^e$ număr impar $\Rightarrow e = 0$	**2p**
$2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bcd} = 506$	**1p**
$2^{2a} \cdot 3^a = 12^a < 506 \Rightarrow a \leq 2, a \neq 0$	**2p**
$Pentru\ a = 2, obține\ \overline{bcd} = 362 \Rightarrow \overline{abcde} = 23620$	**1p**
$Pentru\ a = 1, obține\ \overline{bcd} = 494 \Rightarrow \overline{abcde} = 14940$	**1p**

Subiectul al III-lea

Aflați restul împărțirii unui număr natural la 140, știind că prin împărțirea numărului la 28 se obține restul 5, iar prin împărțirea numărului la 35 se obține restul 12.

Soluție și barem

$a = 28 \cdot c_1 + 5$ $a = 35 \cdot c_2 + 12$	**2p**
$a = 28 \cdot c_1 + 5 / \cdot 5 \Rightarrow 5 \cdot a = 140 \cdot c_1 + 25$ $a = 35 \cdot c_2 + 12 / \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot a = 140 \cdot c_2 + 48$	**2p**

Scăzând relațiile, obține $a = 140 \cdot (c_1 - c_2) - 23$	**1p**
$a = 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) + 117$ $a = 140 \cdot c + r, r < 140$	**1p**
$r = 117$	**1p**

Subiectul al IV-lea

Se dau numerele:

$$a = [2 + 2^7 \cdot 2^{24} + 2^{65} : 2^{24} + 2 \cdot 3 \cdot (3^{48} + 9^{24} + 27^{16})] : (1 + 2^{30} + 2^{40} + 3^{50}) - 2 + 3^{16}$$

$$b = 2^{70} - \{2^3 \cdot 1111_{(2)} - 5 \cdot [5 - (10000 - 9375) : 5^3] : 9^{2024} - 26 \cdot 2^2\} \cdot 2^{65}$$

a) Arătați că a este pătrat perfect ;

b) Arătați că $a < b$.

Soluție și barem:

a) $3^{48} + 9^{24} + 27^{16} = 3^{48} + 3^{48} + 3^{48} = 3^{49}$	**1p**
$2 + 2^7 \cdot 2^{24} + 2^{65} : 2^{24} + 2 \cdot 3 \cdot (3^{48} + 9^{24} + 27^{16}) = 2(1 + 2^{30} + 2^{40} + 3^{50})$	**1p**
Obține $a = 3^{16}$	**0,5p**
Scrie pe $a = \left(3^8\right)^2 \Rightarrow$ a este pătrat perfect	**0,5p**
$2^3 \cdot 1111_{(2)} - 5 \cdot [5 - (10000 - 9375) : 5^3] : 9^{2024} - 26 \cdot 2^2 = 2^4$	**1p**
Obține $b = 2^{69}$	**0,5p**
Ultima cifră a lui b este 2, de unde rezultă că numărul nu este pătrat perfect.	**0,5p**
b) $3^{16} < 16^{16} = 2^{64}$	**1p**
Dar, $2^{64} < 2^{69}$	**0,5p**
Obține prin tranzitivitate că $a < b$	**0,5p**