CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală 24.02.2024
Secțiunea H2 (Științe ale naturii) - Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

(2p) **a)** Arătați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$.

(5p) **b)** Fie $S_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Găsiți cel mai mare număr natural *n*, pentru care $S_n<\sqrt{2}$.

Soluție:

a) (2p) Verificare imediată

b)

(2p) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)$

(2p) Rezolvarea inecuației

(1p) Determinarea lui $n = 3$.

Problema 2

Fie $z_1, z_2, z_3\in \mathbb{C}^*$, $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ și $z_1+\alpha\cdot z_2-\beta\cdot z_3=0$, cu $\alpha,\beta\in \mathbb{R}^*$.

(4p) **a)** Arătați că $\frac{1}{z_1}+\frac{\alpha}{z_2}-\frac{\beta}{z_3}=0$,

(3p) **b)** Arătați că $z_2z_3+\alpha\cdot z_3z_1-\beta\cdot z_1z_2=0$.

Soluție:

a) (2p) $z_i\cdot\overline{z_i}=r^2, \forall i=\overline{1,3}$

(2p) $z_1+\alpha\cdot z_2-\beta\cdot z_3=0 \Leftrightarrow \overline{z_1}+\alpha\cdot\overline{z_2}-\beta\cdot\overline{z_3}=0 \Leftrightarrow r^2\left(\frac{1}{z_1}+\frac{\alpha}{z_2}-\frac{\beta}{z_3}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1}+\frac{\alpha}{z_2}-\frac{\beta}{z_3}=0$

b) (3p) $\frac{1}{z_1}+\frac{\alpha}{z_2}-\frac{\beta}{z_3}=0 \Leftrightarrow \frac{z_2z_3+\alpha\cdot z_3z_1-\beta\cdot z_1z_2}{z_1z_2z_3}=0 \Leftrightarrow z_2z_3+\alpha\cdot z_3z_1-\beta\cdot z_1z_2=0$

Problema 3

(4p) **a)** Arătaţi că $\dfrac{1}{\log_{a_1} a_2}+\dfrac{1}{\log_{a_2} a_1}\geq 2$, $\forall a_1, a_2 \in (1,+\infty)$.

(3p) **b)** Demonstraţi că $\forall\, a_1, a_2, ..., a_{2020} \in (1,+\infty)$ are loc relaţia:

$$\frac{1}{\log_{a_1} a_2}+\frac{1}{\log_{a_2} a_3}+...+\frac{1}{\log_{a_{2020}} a_1}\geq 2020.$$

Soluție:

a) (1p) $\forall a_1, a_2 \in (1,+\infty)$, $\log_{a_1} a_2, \log_{a_2} a_1 > 0$

(1p) $\log_{a_1} a_2 = \dfrac{1}{\log_{a_2} a_1}$

(2p) Aplicarea inegalității mediilor și concluzia.

b) (3p) Aplicarea inegalității mediilor pentru cele 2020 numere pozitive și concluzia.

Problema 4

„Dacă o cantitate N, crește cu un procent constant, atunci ea poate fi descrisă printr-o funcție de forma $N:(0,+\infty)\to \mathrm{R}$, $N(t)=N_0 e^{kt}$, *unde t este timpul, N_0 este valoarea lui N la timpul t = 0, iar k este o constantă pozitivă care se numește* ***rata de creștere*** *(sau* ***procentul de creștere) continuă*** *(pentru că se aplică în fiecare moment t)"*

Un oraș are, la data de 1.01.2020, o populație de 17400 de locuitori. Se estimează o creștere a populației cu o rată continuă de 5,3%.

(1p) **a)** Precizați funcția care dă populația orașului după *t* ani.

(2p) **b)** Care va fi populația orașului la data de 1.01.2021?

(4p) **c)** Cât timp este necesar ca populația orașului să se dubleze?

Se consideră cunoscute valorile $e^{0,053}\cong 1,055$ *și* $\ln 2 \cong 0,69$.

Soluție:

(1p) **a)** $N(t)=17400\, e^{0,053t}$

(2p) **b)** Trebuie calculat $N(1)=17400\cdot e^{0,053}\cong 18347$

c) Se cere *t* pentru care $N(t)=2\cdot 17400 \overset{(1p)}{\Leftrightarrow} 17400\cdot e^{0,053t}=34800 \overset{(1p)}{\Leftrightarrow} e^{0,053t}=2 \overset{(1p)}{\Leftrightarrow} t=\dfrac{\ln 2}{0,053}\cong 13,01$.

(1p) Putem spune astfel că puțin peste 13 ani populația orașului se va dubla.