CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală 24.02.2024
Secțiunea H2 - Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

Două matrice $A, B \in M_2(\mathrm{R})$ se numesc ***matrice similare***, dacă există un număr natural nenul *n*, astfel încât $\det(A+B)=n$ și $\det A = \det B = n^2$.

Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $Z = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

(2p) **a)** Arătați că matricele *X* și *Y* sunt ***matrice similare***.

(3p) **b)** Arătați că, dacă $C \in M_2(\mathrm{R})$ și $X \cdot C = Z$, atunci matricele *X* și *C* sunt ***matrice similare***.

(2p) **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural *k*, există un număr natural *n*, astfel încât $\det(X^k) = n^2$.

Soluție:

a) Calculăm $\det(X+Y) = 2 \in \mathrm{N}^*$ (1p) și $\det X = \det Y = 4 = 2^2$ (1p) de aici *X* și *Y* sunt ***matrice similare.***

b) Se determină matricea $C = X^{-1} \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (2p), se calculează $\det(X+C) = 2 \in \mathrm{N}^*$ și $\det X = \det C = 4 = 2^2$, rezultând astfel că *X* și *C* sunt ***matrice similare***. (1p)

c) $\det(X^k) = (\det X)^k = 4^k = (2^k)^2$ (1p). Așadar, pentru orice număr natural *k*, există un număr natural $n = 2^k$, astfel încât $\det(X^k) = n^2$ (1p).

Problema 2

Se consideră determinantul $D(a, b.c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathrm{R}$.

(1p) **a)** Arătați că $D(1, 0.-1)$ este un număr natural.

(3p) **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(2^x, 0, 1) = 4$.

(3p) **c)** Arătați că, dacă *a*, *b*, *c* sunt lungimile laturilor unui triunghi și $D(a, b.c) = 0$, atunci triunghiul este isoscel.

Soluție:

a) $D(1, 0.-1) = 2 \in \mathrm{N}$ (1p).

b) $D(2^x, 0, 1) = 4 \overset{(2p)}{\Leftrightarrow} (2^{2x} + 2^x + 2)(2^x - 2) = 0 \overset{(1p)}{\Leftrightarrow} x = 1$

c) $D(a,b.c)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \overset{(2p)}{=} (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)$

$D(a,b.c)=0 \Rightarrow a=b$ sau $a=c$ sau $b=c \Rightarrow$ triunghiul este isoscel (1p).

<u>Problema 3</u>

(2p) **a)** Determinați asimptotele funcției $f:D\to \mathrm{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$.

(5p) **b)** Dacă funcția $f:\mathrm{N}\to \mathrm{R}$, $f(n)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x)(1+2x)...(1+nx)]}{x}$. Determinați cel mai mare număr natural *n* pentru care $f(n)<2020$.

<u>Soluție:</u>

a) $D=(-1,+\infty)$ (0,5p), $x=-1$ asimptotă verticală (0,5p), nu există asimptote orizontale (0,5p), nu există asimptote oblice (0,5p).

b) $f(n) \overset{(1p)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+....+\dfrac{\ln(1+nx)}{x}\right) \overset{(1p)}{=} 1+2+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$f(n)<2020 \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}<2020 \overset{(1p)}{\Leftrightarrow} n(n+1)<4040$.

Cel mai mare număr natural *n* cu această proprietate este $n=63$ (2p).

<u>Problema 4</u>

O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanţe, aflată în studiu, se modifică în timp după legea $T(t)=\sqrt{t^2+at+b}-ct+5$, $a,b,c\in \mathrm{R}$, unde $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$, moment ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

(5p) **a)** Determinaţi $a,b,c\in\mathrm{R}$, ştiind că $T(1)=7$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8$

(2p) **b)** Cu $a,b,c\in\mathrm{R}$, astfel determinaţi, stabiliţi dacă este posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanţei să fie 0°.

<u>Soluție:</u>

a) $T(1)=7 \overset{(1p)}{\Rightarrow} \sqrt{a+b+1}=c+2$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+at+b}-ct\right)=3$.

Este necesar ca $c>0$ (1p). Rezolvând limita obținem *c* = 1, *a* = 6 (2p).

Din *T*(1) = 7 se obține *b* = 2 (1p).

b) $T(t)=0 \Rightarrow \sqrt{t^2+6t+2}=t-5 \overset{(1p)}{\Rightarrow} t=\dfrac{23}{16}$, dar $\dfrac{23}{16}-5<0$ (0.5p), deci nu este posibil ca temperatura substanţei să fie, în nici un moment al experimentului, 0° (0,5p).