MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VASLUI

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- clasa a XII-a
10 februarie 2024

1. Pe mulţimea $G = (1;\ \infty)$ se defineşte legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[n]{x^n y^n - x^n - y^n + 2}$, unde n este un număr natural impar, $n \geq 3$.
   a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.
   b) Să se determine numărul natural impar n, $n \geq 3$ pentru care $\underbrace{3^{\frac{1}{n}} \circ 3^{\frac{1}{n}} \circ \ldots \circ 3^{\frac{1}{n}}}_{(n \text{ elemente})} = \sqrt[n]{129}$.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că există un endomorfism $f : G \to G$, astfel încât $f(x^5 \cdot y^6) = x^6 \cdot y^5, \forall x, y \in G$. Arătați că grupul $(G, \cdot)$ este comutativ.

3. Fie
$f : R \to R$ funcție continuă cu proprietatea că $f(x) f(-x) = 1,\ (\forall)\ x \in R$ și

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1 + 2\sin^2 x\right)\left(1 + f(x)\right)} \mathrm{d}x$$

a)Arătați că

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\left(1 + 2\sin^2 x\right)\left(1 + f(x)\right)} \mathrm{d}x$$

b) Calculați I.

4. Determinați funcția $f : (o, \infty) \to R$ știind că admite o primitivă F astfel încât

$$xf(x) + F(x) = \frac{x + 1}{x(1 + xe^x)},\ (\forall)\ x > 0.$$

(*Supliment Gazeta Matematică nr. 10/ 2023*)

Notă: Fiecare subiecte este obligatoriu și se notează cu punctaje de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.