OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a IX – a

Problema 1

a) Arătați că : $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$; x, y $\in (0, +\infty)$

b) Fie a, b $\in (0, +\infty)$. Arătați că $\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2}\right)^3$ +$\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq 54$

G.M. Nr 3/2023

Problema 2

Fie ABC un triunghi oarecare și O $\in Int(\Delta ABC)$,un punct oarecare. Notăm AO$\cap BC = \{A'\}$, BO$\cap CA = \{B'\}$,CO$\cap AB = \{C'\}$ și $B'C' \cap AO = \{D\}$.

a) Dacă $\frac{BO}{BB'} = \frac{3}{4}$,arătați că $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BB'}$.

b) Să se arate că produsul $\frac{C'D}{B'D} \cdot \frac{B'C}{C'B}$ nu depinde de alegerea punctului O.

Problema 3

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $[x + 2024]$ - $\left[\frac{5x-2024}{2}\right]$ = $\frac{x}{2}$ +2024, unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Problema 4

Se consideră intervalul (a,b) de numere reale care conține exact două numere întregi.

a) Arătați că $\frac{[b]+[a]}{[b]-[a]}$ se află în intervalul (a,b), unde [a] este partea întreagă a numărului real a.

b) Dacă $|b - a - 3| = a^2 + b^2 + \frac{a}{2} - 6b + \frac{149}{16}$ determinați numerele reale a și b.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.