OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a X – a

Problema 1

Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisfac relația $3f\left(\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3}\right)-f^{2}\left(\sqrt[3]{xy}\right)\geq\frac{9}{4}$.

a) Arătați că $\sqrt[3]{xy}\leq\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3}, \forall x,y\geq 0.$ În ce caz avem egalitate?

b) Există funcții injective care satisfac inegalitatea dată?

Problema 2

Fie $a,b,c\in(1,\infty)$ și $x=\log_{bc}a,\ y=\log_{ca}b,\ z=\log_{ab}c.$

a) Arătați că $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=2.$ **b)** Demonstrați că $a^{(x+1)(y-z)}\cdot b^{(y+1)(z-x)}\cdot c^{(z+1)(x-y)}=1.$

G.M. Supliment- octombrie 2022

Problema 3

Fie numărul complex z astfel încât $z^2-2z\cos\alpha+1=0, \alpha\in\mathbb{R}.$

a) Arătați că $|z|=1.$ b) Demonstrați că $\sum_{k=1}^{n}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)=2\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$

Problema 4

În planul complex se consideră trunghiul ABC cu $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ și punctele M, N, P pe laturilor $(AB), (AC)$ respectiv (BC), astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{n}, \frac{AN}{NC}=n$ și $BP=\frac{1}{n}PC,\ n\in\mathbb{N}^*.$ Dacă $G(z_G)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC, $H(z_H)$ este ortocentrul triunghiului MNP iar $O_1(z_{O_1})$ centrul cercului circumscris triunghiului MNP, arătați că $3z_G+2z_{o_1}=z_{H}.$

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp efectiv de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.