MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a XI-a

Problema 1. a) Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care îndeplinește condițiile: $\text{tr}A = \sqrt{504}$ și $\det A = 4 + 2\sqrt{2}$. Calculați $\det\left(A^2 + 4I_2\right)$.

b) Demonstrați că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det A + 2\det B$, pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(AB - BA) \geq 0$, are loc relația

$$(\det C)^2 - 2\sqrt{\det(AB-BA)} \cdot \det C + \det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0.$$

Problema 2. Fie $A \in M_3\left(\mathbb{N}^*\right)$ o matrice pentru care suma elementelor pe fiecare linie, coloană și diagonală este aceeași. Arătați că $\det A$ este divizibil cu suma tuturor elementelor matricei A.

G.M. Nr.1/2023, Ion Pătrașcu, Craiova

Problema 3. Calculați:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{3^x - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x^{a_i} - n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,x} - \sum_{i=1}^{n} a_i}$, unde $a_i > 0, (\forall) i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = 3^{2^n} + 1$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = 3^{2^n} - 1$, $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n = a_1 \dfrac{1}{x_1} + a_2 \dfrac{2}{x_2} + \ldots + a_n \dfrac{2^{n-1}}{x_n}$, unde $a_i \in \{-1, 1\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Arătați că $\dfrac{1}{y_n} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{2}{y_{n+1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că, dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \dfrac{1}{8}$.

c) Arătați că șirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp efectiv de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.