OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024
CLASA a VII - a

Problema 1

a) Demonstrați că: $\frac{1}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})}=\frac{1}{(k-\sqrt{2})}-\frac{1}{(k+1-\sqrt{2})}$, $(\forall)k \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $x=\frac{44+24\sqrt{2}}{98}$ și $y=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-4)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-9)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-10)^2}}$, atunci $\frac{y}{x}\in\mathbb{Z}$.

Problema 2

Aflați numerele prime p și q de două cifre, pentru care $pq+1$ este pătrat perfect.

GM. 2023

Problema 3

Se dă un triunghi ascuțitunghic ABC, $AB=AC$. Fie D mijlocul laturii BC, iar E și F simetricele punctului D față de dreptele AB, respectiv AC.

a) Demonstrați că patrulaterul *BCFE* este trapez isoscel.

b) Demonstrați că patrulaterul *AEDF* este romb dacă și numai dacă triunghiul *ABC* este echilateral.

Problema 4

Cercurile $C_1(O_1,r_1)$ și $C_2(O_2,r_2)$ se intersectează în A și P, iar secanta BP, $B\in C_1(O_1,r_1)$, intersectează $C_2(O_2,r_2)$ în C. Fie B', respectiv C' diametral opuse lui A în $C_1(O_1,r_1)$, respectiv $C_2(O_2,r_2)$. Arătați că:

a) Punctele B',P,C' sunt coliniare;

b) $\sphericalangle O_1BA\equiv\sphericalangle O_2CA$.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.