

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $G = (0,1)$ definim operația binară $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.
 - a) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.
 - b) Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow (0, +\infty)$, definită prin $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ pentru orice x din G , este un izomorfism de grupuri de la grupul $(G,*)$ la grupul $((0, +\infty), \cdot)$, unde „ \cdot ” este înmulțirea numerelor reale.
2. Calculați $\int x^2(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x)dx$, $x \in (0,1)$.

G.M.
3. Fie (G, \cdot) un grup și $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^3$, un morfism de grupuri de la (G, \cdot) la (G, \cdot) .
 - a) Demonstrați că $(xy)^4 = x^4 y^4$ pentru orice $x, y \in G$.
 - b) Dacă f este o funcție injectivă, demonstrați că (G, \cdot) este abelian.
4. Fie funcția $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{1}{1+3 \cos^2 x}$ pentru orice x din $[0, \pi]$. Demonstrați că f admite primitive și determinați o primitivă a ei.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.