Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală, județul Timiș

16.02.2024

Clasa a VII-a

1. a) Fie $A = 2023^{2023} + 2024^{2024} + 2025^{2025}$. Arătați că $\sqrt{A}$ este număr irațional.

b) Demonstrați că $\sqrt{a+b+c}$ este număr irațional, dacă $\left(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}\right) = 3$, unde prin (x, y, z) înțelegem c.m.m.d.c al numerelor x, y, z.

2. a) Arătați că nu există numerele raționale a și b astfel încât:

$$\sqrt{3(a-1)^2} + \sqrt{75} = \sqrt{(b+2)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}.$$

b) Determinați numerele naturale a și b astfel încât: $\sqrt{20a^2 + 24b^2 + 1} = 20 + 24 + 1$.

3. Fie E un punct pe latura DC a pătratului $ABCD$, AN bisectoarea unghiului $\measuredangle EAB$, $N \in BC$ și P punctul de intersecție a dreptelor AE și BC. Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Demonstrați că:

a) NA este bisectoarea unghiului $\measuredangle MNB$;

b) $MN = DM + BN$;

c) $\measuredangle MAN = 45^0$.

G.M

4. a) Să se arate că nu există un triunghi cu lungimile înălțimilor $1, \sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

b) Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB//CD$, $AB>CD$). Știind că înălțimea MN a trapezului este egală cu linia mijlocie EF, arătați că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de 3 ore.
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.