Inspectoratul Școlar Județean Timiș Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a IX-a
Barem de corectare și notare

1. Rezolvați în $\boldsymbol{R}$ ecuația: $\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-[x]}$.

Soluţie:

Condiţii de existenţă: $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-[x] \neq 0 \end{cases}$. Obţine $x \in R-[1,2)$………………………….1p

Condiţia de apartenentă la Z a părţii întregi: $\frac{1}{1-[x]} \in Z$. Obţine $[x]=0$ sau $[x]=2$....1p

Cazul 1: $[x]=0$ implică $x \in [0,1)$. Atunci $\left[\frac{1}{1-x}\right]=1$, deci $x \in [0,\frac{1}{2})$……………….2p

Cazul 2: $[x]=2$ implică $x \in [2,3)$. Atunci $\left[\frac{1}{1-x}\right]=-1$,

deci $x \in ((-\infty,1) \cup [2,+\infty)) \cap [2,3)$……………………………………...……………2p

Obţine soluţia finală $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right) \cup [2,3)$…………………………….………………1p

2.

a) Fie $a,b \in \boldsymbol{R}^*$. Deduceți valoarea minimă a expresiei $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$.

b) Dacă $a,b>0$, demonstrați că $\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq 54$

Soluţie:

a) Demonstrează / justifică că valoarea minimă a expresiei este 2 ……………………………2p.

b) Metoda 1. (utilizând inegalitatea $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ $\forall x,y>0$ și inegalitatea $x+\frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x>0$)

Inegalitatea cerută este echivalentă cu $\frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}{2} \geq 27$

$$\frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}{2} \geq \sqrt{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}=\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)}^3= \text{.......2p}$$

$$=\sqrt{1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1+\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+1}^3 \geq \sqrt{3+2+2+2}^3=27 \quad \text{.................................3p}$$

Metoda 2. (utilizând inegalitatea $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$ $\forall x, y > 0$ și inegalitatea $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$)

$\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2}\right)^3 + \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq \frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}+1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}{4} \geq$ 3p

$\geq \frac{(2+2+2)^3}{4}$ =54 ....2p

(această metodă este prezentată în rezolvarea din GMB nr 10 / 2023)

3. Câte cvadruplete ordonate (a,b,c,d) de numere naturale satisfac simultan relațiile: $a + b + c + d = 12$ și $|a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2 \cdot |ac - bd|$?

Soluţie:

Ridicând la pătrat cei doi membrii pozitivi ai egalității $|a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2 \cdot |ac - bd|$ se obține egalitatea echivalentă $(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 - 4(ac - bd)^2 = 0$ în care utilizând descompunerea diferenței de pătrate se ajunge la egalitatea echivalentă

$(a - b - c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d) = 0$

care are loc dacă unul din factori e nul. 2p

Cazul 1. $a - b - c + d = 0$ și $a + b + c + d = 12, a, b, c, d \in \boldsymbol{N}.$

Se obține $a + d = b + c = 6$ de unde avem 7 perechi de numere naturale (a, d) și respectiv (b, c) care fac parte din mulțimea $\{(0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,0)\}$ 1p

Total 49 cvadruplete (a,b,c,d) de numere naturale ce satisfac condițiile cazului 1

Cazul 2. și cazul 3. se tratează analog, se obțin relațiile:

$a + b = c + d = 6$ și respectiv $a + c = b + d = 6$

și se obțin încă 49, și respectiv 49 de cvadruplete de numere naturale. 1p

Deocamdată avem $3 \cdot 49 = 147$ cvadruplete 1p

Dar unele dintre acestea se repetă:

Cvadrupletul (3,3,3,3) se repetă de trei ori , el apare la fiecare caz in parte, deci el trebuie luat o singură dată. Deci rămân 145 cvadruplete 1p

Cele 6 cvadrupletele $(0,6,0,6), (1,5,1,5), (2,4,2,4), (4,2,4,2), (5,1,5,1), (6,0,6,0)$ se repetă în cazul 1 și 2 si tot câte 6 se repetă în cazurile 2 și 3 și în cazurile 1 și 3 deci mai scădem 18 cvadruplete din 145.

Oținem totalul de 127 cvadruplete. 1p

4. Fie O și H centrul cercului circumscris , respectiv ortocentrul triunghiului ABC. Notăm cu O_1, O_2 și O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HAC respectiv HAB. Arătați că pentru orice punct $M \in OH$, vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{OH}$.

(GMB nr 4 / 2023)

Soluţie:

Scrie relația lui Sylvester pentru triunghiul ABC : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ 1p

Deduce că A este ortocentrul triunghiului BHC (se află la intersecția înălțimilor din H și din C) și scrie relația lui Sylvester în acest triunghi: $\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{O_1A}$ 1p

Scrie relațiile omoloage în triunghiul AHC și AHB.

$\vec{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OH}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{v} = k \cdot \overrightarrow{OH}$, $k \in \boldsymbol{R}^*$..1p

Descompune pe $\overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO_1}$.

Scrie vectorial că $M \in OH$: $\overrightarrow{MO} = x \cdot \overrightarrow{OH}$ unde $x \in \boldsymbol{R}^*$

Obține că $\overrightarrow{MO_1} = x \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OO_1}$ unde pe $\overrightarrow{OO_1}$ îl deduce din relația lui Sylvester scrisă pentru triunghiul BHC:

$$\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{O_1A} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$$

$2 \cdot \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OO_1} = -\frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}}{2}$ 2p

Deci $\overrightarrow{MO_1} = x \cdot \overrightarrow{OH} - \frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}}{2}$

Analog se obțin relații analoage pentru $\overrightarrow{MO_2}$, $\overrightarrow{MO_3}$.

Adunând membru cu membru ultimele trei relații se obține:

$\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3} = 3x \cdot \overrightarrow{OH} + 2 \cdot \overrightarrow{OH} = (3x + 2) \cdot \overrightarrow{OH}$.

Deci $\vec{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OH}$ 2p