Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

1. Pe mulțimea $G=(0,1)$ definim operația binară $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.
   a) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.
   b) Demonstrați că funcția $f:G\rightarrow(0,+\infty)$, definită prin $f(x)=\frac{1}{x}-1$ pentru orice x din G, este un izomorfism de grupuri de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left((0,+\infty),\cdot\right)$, unde „ $\cdot$ ” este înmulțirea numerelor reale.

Soluție:

a) $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}=\frac{xy}{xy+(x-1)(y-1)}$. Pentru $x,y\in(0,1)$ avem că $(x-1)(y-1)>0$ de unde $xy+(x-1)(y-1)>xy$ și cum $xy>0$ obținem că $x*y\in(0,1)$ ...1p

$(x*y)*z=x*(y*z)=\frac{xyz}{xyz-(x-1)(y-1)(z-1)},\forall x,y,z\in G$, deci „ $*$ ” este asociativă; iar comutativitatea legii e evidentă ...1p

Căutăm $e\in G$ astfel încât $x*e=e*x=x,\ \forall x\in G$.

$x*e=x\Leftrightarrow(x-1)(2e-1)=0,\forall x\in G\Leftrightarrow e=\frac{1}{2}$. Cum „ $*$ ” e comutativă, avem că $\frac{1}{2}$ este elementul netru al legii. ...1p

Fie $x\in G$. Căutăm $x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$.

$x*x'=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x'=1-x\in G,\ \ \forall x\in G\Rightarrow U(G)=G$ și deci $(G,*)$ este grup abelian. ...1p

b) f morfism $\Leftrightarrow f(x*y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in G$

$f(x*y)=\frac{1}{x*y}-1=\frac{xy+(x-1)(y-1)}{xy}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y}=f(x)\cdot f(y)$, deci f e morfism. ...1p

Fie $x_1,\ x_2\in G$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, deci f e injectivă ...1p

Fie $y\in(0,+\infty)$. Căutăm $x\in G$ astfel încât $f(x)=y\Leftrightarrow x=\frac{1}{1+y}\in G$, deci f e surjectivă și prin urmare f este un izomorfism de grupuri ...1p

2. Calculați $\int x^2(\mathrm{tg}^3x+\mathrm{tg}\,x)\mathrm{dx},\ \ x\in(0,1)$.

G.M.

Soluție:

$\int x^2(\mathrm{tg}^3x+\mathrm{tg}\,x)\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int x^2(\mathrm{tg}^2x)'\ \mathrm{dx}=\frac{x^2\mathrm{tg}^2x}{2}-\int x\,\mathrm{tg}^2x\ \mathrm{dx}=$ ...2p

$=\frac{x^2\mathrm{tg}^2x}{2}-\int x\,(\mathrm{tg}^2x+1)\mathrm{dx}+\int x\,\mathrm{dx}=$ ...2p

$=\frac{x^2(1+\mathrm{tg}^2x)}{2}-\int x(\mathrm{tg}\,x)'\ \mathrm{dx}=\frac{x^2(1+\mathrm{tg}^2x)}{2}-x\,\mathrm{tg}\,x+\int\mathrm{tg}\,x\,dx=$ ...2p

$=\frac{x^2(1+\mathrm{tg}^2x)}{2}-x\,\mathrm{tg}\,x-\ \ln(\cos x)+\mathcal{C}$ ...1p

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup și $f: G \to G,\ f(x) = x^3$, un morfism de grupuri de la $(G,\cdot)$ la $(G,\cdot)$.
   a) Demonstrați că $(xy)^4 = x^4y^4$ pentru orice $x, y \in G$.
   b) Dacă f este o funcție injectivă, demonstrați că $(G,\cdot)$ este abelian.

Soluție:

a) f morfism $\Leftrightarrow$ $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in G$, de unde obținem $(xy)^3 = x^3y^3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(yx)^2y = x^3y^3$ și prin simplificare la stânga cu x și la dreapta cu y, obținem $(yx)^2 = x^2y^2, , \forall x, y \in G$ și deci și $(xy)^2 = y^2x^2, \forall x, y \in G$ ...2p
Deci $(x^2)^2(y^2)^2 = (y^2x^2)^2 \Leftrightarrow x^4y^4 = ((xy)^2)^2 \Leftrightarrow x^4y^4 = (xy)^4, \forall x, y \in G$ ...2p

b) Din subpunctul anterior avem că $x^4y^4 = (xy)^4 \Leftrightarrow x^4y^4 = x(yx)^3y$ și prin simplificare la stânga cu x și la dreapta cu y, obținem $x^3y^3 = (yx)^3, \forall x, y \in G$ ...1p
Dar $x^3y^3 = (xy)^3, \forall x, y \in G$ și prin urmare $(xy)^3 = (yx)^3 \Leftrightarrow f(xy) = f(yx)$ și cum f este injectivă, obținem $xy = yx,\ \forall x, y \in G$, deci $(G,\cdot)$ este abelian ...2p

4. Fie funcția $f: [0, \pi] \to \boldsymbol{R},$ definită prin $f(x) = \frac{1}{1+3\cos^2 x}$ pentru orice x din $[0, \pi]$. Demonstrați că f admite primitive și determinați o primitivă a ei.

Soluție:

f e continuă, deci admite primitive pe $[0, \pi]$ ...1p

Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \int f(x)dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x+4} \cdot (\mathrm{tg}\, x)'\ dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, x}{2} + \mathcal{C}$ ...2p

Analog, pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \int f(x)dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, x}{2} + \mathcal{C}$ ...1p

Fie $F: [0, \pi] \to \boldsymbol{R}$ o primitivă a funcției f.

Rezultă că există $k, C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, x}{2} + C_1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ k, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, x}{2} + C_2, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$ ...1p

Cum $F\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4} + C_1$ și $F\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\frac{\pi}{4} + C_2$, din continuitatea funcției F în $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$, rezultă că $C_1 = k - \frac{\pi}{4}$ și $C_2 = k + \frac{\pi}{4}$. ...1p

Prin urmare $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, x}{2} + k - \frac{\pi}{4}, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ k, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, x}{2} + k + \frac{\pi}{4}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$. Cum F derivabilă pe $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, F continuă în $\frac{\pi}{2}$ obținem că $F_s'\left(\frac{\pi}{2}\right) = F_d'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Deci $F' = f \Rightarrow F$ e o primitivă a lui f ...1p