Barem corectare
Clasa a X-a

1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$
   Soluție

$|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow \overline{z_i} = \dfrac{r^2}{z_i}, i = \overline{1,3}$ 2p

$0 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \dfrac{r^2}{z_1} + \dfrac{r^2}{z_2} + \dfrac{r^2}{z_3} = \dfrac{r^2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)}{z_1z_2z_3} \Rightarrow z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0$ 3p

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 0$ 2p

2. a) Să se arate că: $log_n(n+1) > log_{n+1}(n+2), \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$

b) Demonstrați că dacă $a, b, c \in (1,\infty)$, atunci $\dfrac{1}{2 + log_a b} + \dfrac{1}{2 + log_b c} + \dfrac{1}{2 + log_c a} \leq 1.$

Soluție

a) $log_n(n+1) > log_{n+1}(n+2) \Leftrightarrow lg^2(n+1) > lg(n) \cdot lg(n+2)$ 1p

Dacă $n \geq 2 \Rightarrow lg(n), lg(n+2) > 0.$ 1p

$\sqrt{lgn \cdot \lg(n+2)} < \dfrac{lgn + lg(n+2)}{2} = \dfrac{lgn(n+2)}{2} = lg\sqrt{n(n+2)} < lg\dfrac{n+n+2}{2} = lg(n+1)$ 1p

De unde obținem $lg^2(n+1) > lgn \cdot lg(n+2)$.

b) Notăm $log_a b = x, log_b c = y, log_c a = z$. Avem $x, y, z \in (0,\infty)$ și $xyz = 1$ 1p

După calcule relația $\dfrac{1}{2+x} + \dfrac{1}{2+y} + \dfrac{1}{2+z} \leq 1$ devine echivalentă cu $xy + xz + yz \geq 3$ 1p

Utilizând inegalitatea mediilor avem: $xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$ 2p

3. a) Demonstrați că $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c), \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}=\sqrt[3]{6}$.
Soluție

a) Calcul 2p
b) Ridicăm la puterea a treia și obținem, utilizând formula de la punctul a)

$$3\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)=0$$ 2p

Obținem: $x^2-x+7=0$ ce nu are soluții reale. 1p

$x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. 1p

2x+1=0 $\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ 1p

4. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n+1}{5}\right]$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.
a) Să se arate că f nu este surjectivă.
b) Determinați numerele $m\in\mathbb{N}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are soluție unică.
Gazeta Matematica 10/2023
Soluție

a) f(0)=0, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=1, f(4)=3. 1p
Dacă $n\geq 4 \Rightarrow f(n)\geq 3$, deci ecuația f(n)=2 nu are soluție, de unde obținem că f nu este surjectivă. 2p

b)

$$f(n)=\begin{cases}7k & ,n=10k, n=10k+1\\ 7k+1 & ,n=10k+2, n=10k+3\\ 7k+3 & ,n=10k+4, n=10k+5\\ 7k+4 & ,n=10k+6, n=10k+7\\ 7k+5 & ,n=10k+8\\ 7k+6 & ,n=10k+9\end{cases}$$ 2p

Ecuația are soluție unică, dacă $m\in\{7k+5, 7k+6\}, k\in\mathbb{Z}$. 2p