Inspectoratul Școlar Județean Timiș Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a XI-a MI

Subiectul I:

a) Calculați determinantul: $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} y & x & y-x \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}$, cu $x,y\in\mathbb{R}$, scriind rezultatul sub formă de produs;

b) Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B=aA^3+xA^2+(a-x)A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Demonstrați că $a\cdot\det(B)\geq 0,\ \ \forall a,x\in\mathbb{R}$.

Barem de notare:

a) Folosește proprietățile determinanților și ajunge, prin însumare de linii/coloane , la
$\Delta(x,y)=2y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}$ 1p
Finalizare $\Delta(x,y)=2y(3x^3-3xy+y^2),\ x,y\in\mathbb{R}$ 2p

b) Calculează $A^3=I_3$ 1p
Determină $B=\begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}$ și folosește subpunctul a) pentru
detB=$2a(3x^3-3xa+a^2)$ 1p
Prelucrează $a\cdot detB$=$2a^2\left[3\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}\right]\geq 0,\forall a,x\in\mathbb{R}$ 2p

Rezolvare completă:

1. a) $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} y & x & y-x \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}\overset{(L_1+L_2+L_3\to L_1)}{=}\begin{vmatrix} 2y & 2y & 2y \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}=$

$=2y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}\overset{\begin{pmatrix} c_2-c_1\to c_2 \\ c_3-c_1\to c_3 \end{pmatrix}}{=}2y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y-x & y & 2x-y \\ x & y-2x & y-x \end{vmatrix}=$

$=2y\begin{vmatrix} x & 2x-y \\ y-2x & y-x \end{vmatrix}$=$2y(xy-x^2-2xy+y^2+4x^2-2xy)$=$2y(3x^2-3xy+y^2)$.

b)$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$B = aA^3 + xA^2 + (a-x)A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-x \\ a-x & 0 & 0 \\ 0 & a-x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}.$$

Det B$= \begin{vmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{vmatrix} \overset{a)}{=} 2a^2(3x^2 - 3xa + a^2) = 2a^2\left[3 \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3a^2}{4} + a^2\right] =$

$2a^2\left[3\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right] \geq 0, \forall a, x \in \mathbb{R}.$

Subiectul al II-lea:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $det(A - x \cdot I_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$;

b) Dacă $Tr(A) = 2$ și $\det(A) = 3$, demonstrați că: $2 \cdot det(A^2 + I_2) - det(A^2 + 3I_2) = 4$.

Barem de notare:

a) Prin calcul direct: $A - x \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$...1p

Finalizare $det(A - x \cdot I_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$........................2p

b) Din Teorema Cayley-Hamilton: $A^2 - TrA \cdot A + det\, A \cdot I_2 = O_2$, deduce $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$, iar prin trecere la determinant obține $det(A^2 + I_2) = 8$............2p

Analog deduce $A^2 + 3I_2 = 2A$, de unde $det(A^2 + 3I_2) = 12$.

Înlocuiește in egalitatea din enunț și obține: $2 \cdot 8 - 12 = 4$, ceea ce trebuia demonstrat...........2p

Rezolvare completă:

a) $A - x \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$.

$det(A - x \cdot I_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = ad - ax - dx + x^2 - bc =$

$= x^2 - (a+d)x + ad - bc, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Din Relația Cayley-Hamilton avem:

$$A^2 - Tr\, A \cdot A + det\, A \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 - 2A + 3 \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = 2A - 3i_2 \Rightarrow$$

$A^2 + I_2 = 2A - 2I_2 \Rightarrow A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$ (*).

Trec la determinant in (*) și se obține:

$det(A^2+I_2) = 2^2 \cdot det(A-I_2) \overset{a)}{=} 2^2(1-2\cdot 1+3) = 8.$

Analog, $A^2 = 2A-3I_2 \Rightarrow A^2+3I_2 = 2A \Rightarrow det(A^2+3I_2) \quad = 2^2 \cdot det\,A = 4\cdot 3 = 12.$

Înlocuiesc în egalitatea din enunț și obțin: $2\cdot 8-12 = 4$, ceea ce trebuia demonstrat.

Subiectul al III-lea:

a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right)$.

Barem de notare:

a) Obține $\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right] = an$. 1p

Folosește $\{x\} = x-[x]$ 1p

Amplifică cu conjugata expresiei $\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}-an$ 1p

Finalizează limita și obține $\frac{2a-1}{2a}$ 1p

b) Scrie limita ca $\lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}-\pi n\right)$ ……………………….1p

Amplifică cu conjugate expresiei $\pi\sqrt{n^2+2n+2}-\pi n$. …………………1p

Obține limita 0 ……………………………………………………………..1p

Rezolvare completă:

a) $\{x\} = x-[x], \forall x \in \boldsymbol{R}$.

Calculăm $\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right]$:

$$\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right] = \left[\sqrt{a^2n^2+2an+1-n}\right] = \left[\sqrt{(an+1)^2-n}\right].$$

Cum $an < \sqrt{(an+1)^2-n} < an+1 \Rightarrow \left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right] = an.$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}-an\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a^2n^2+(2a-1)n+1-a^2n^2}{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}+an} = \frac{2a-1}{2a}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2} - \pi n\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} sin^2\left(\pi \cdot \frac{n^2+2n+2-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}\right) = \lim_{n\to\infty} sin^2 \frac{2n\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)} = 0.$$

Subiectul al IV-lea:

a) Să se arate că $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca $\frac{(1-\varepsilon)\pi}{n} < \sin\frac{\pi}{n} < \frac{(1+\varepsilon)\pi}{n}, \forall\, n \geq N_\varepsilon$.

b) Folosind eventual rezultatul precedent, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\frac{\pi}{k} = \pi \ln 2$.

Barem de notare:

a) Aplică criteriul de convergență cu ε pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$ 1p

Obține inegalitatea din enunț 2p

b) Însumează inegalitățile de la a) ……………………………………………… 1p

Trece la limită și obține $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} sin\frac{\pi}{k} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\pi}{k}$ 1p

Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\pi}{k}$ și obține $\pi\, ln\, 2$ 2p

Rezolvare completă:

a) Se cunoaște că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$.

Din criteriul de convergență cu ε, rezultă: $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca $\left|\frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - 1\right| < \varepsilon, \forall n > N_\varepsilon$.

Adică $\left|sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right| < \varepsilon \cdot \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon\pi}{n} < sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} < \frac{\varepsilon\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{(1-\epsilon)\pi}{n} < sin\frac{\pi}{n} < \frac{(1+\epsilon)\pi}{n}$.

b) Notăm $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + + \frac{1}{n} - ln\, n$.

Prin însumarea relației de la punctul a) de la $n+1$ la 2n se obține:

$\sum_{n+1}^{2n} \frac{(1-\varepsilon)\pi}{k} < \sum_{k=n+1}^{2n} sin\frac{\pi}{k} < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(1+\varepsilon)\pi}{k}$.

Trecând la limită și ținând cont că ε a fost ales arbitrar, se obține:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n} sin\frac{\pi}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\pi}{k} = \lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} =$$

$$= \pi\lim_{n\to\infty}(c_{2n} + ln\,2n - c_n - ln\,n) = \lim_{n\to\infty}(c_{2n} - c_n + ln\frac{2n}{n}) = \pi\, ln\,2.$$