

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a IX-a

1. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația: $\left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-[x]}.$

2. a) Fie $a, b \in \mathbf{R}^*$. Deduceți valoarea minimă a expresiei $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}.$

b) Dacă $a, b > 0$, demonstrați că $\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2}\right)^3 + \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq 54.$

3. Câte cvadruplete ordonate (a,b,c,d) de numere naturale satisfac simultan relațiile:

$$a + b + c + d = 12 \text{ și } |a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2 \cdot |ac - bd| ?$$

4. Fie O și H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC . Notăm cu O_1, O_2 și O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC , HAC respectiv HAB . Arătați că pentru orice punct $M \in OH$, vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3}$ este coliniar cu vectorul \overrightarrow{OH} .

(GMB nr 4 / 2023)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.