Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a XI-a MI

Subiectul I:

a) Calculați determinantul: $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} y & x & y-x \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}$, cu $x,y\in\mathbb{R}$, scriind rezultatul sub formă de produs;

b) Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B=aA^3+xA^2+(a-x)A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Demonstrați că $a\cdot\det(B)\geq 0,\ \ \forall a,x\in\mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea:

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $det(A-x\cdot I_2)=x^2-(a+d)x+ad-bc,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$;

b) Dacă $Tr(A)=2$ și $\det(A)=3$, demonstrați că: $2\cdot det(A^2+I_2)-det(A^2+3I_2)=4$.

Subiectul al III-lea:

a) Fie $a\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right)$.

Subiectul al IV-lea:

a) Să se arate că $\forall\varepsilon>0,\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, astfel ca $\frac{(1-\varepsilon)\pi}{n}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{(1+\varepsilon)\pi}{n},\ \forall\, n\geq N_\varepsilon$.

b) Folosind eventual rezultatul precedent, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}=\pi\ln 2$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.