Inspectoratul Școlar Județean Timiș Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a X-a

1.Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

2.a) Să se arate că: $log_n(n+1) > log_{n+1}(n+2), \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.
b) Demonstrați că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci $\frac{1}{2+log_a b} + \frac{1}{2+log_b c} + \frac{1}{2+log_c a} \leq 1$.

3. a) Demonstrați că $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{5-2x} + \sqrt[3]{x^2+x+2} + \sqrt[3]{-x^2+x-1} = \sqrt[3]{6}$.

4. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{5}\right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
a) Să se arate că f nu este surjectivă.
b) Determinați numerele $m \in \mathbb{N}$ pentru care ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.
Gazeta Matematica 10/2023

NOTĂ:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte