



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN TIMIȘ



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**16.02.2024**

**Clasa a VIII-a**

**1. a)** Arătați că dacă  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-2, 2]$  și  $z \in [-3, 3]$ , atunci:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - yz \in [0, 25] .$$

**b)** Fie  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 1$ . Demonstrați că  $x^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1) \Leftrightarrow x = [x] + \frac{1}{[x]}$ .

**2. a)** Arătați că, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , au loc inegalitățile:  $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ .

**b)** Arătați că :  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < 2$ .

**3.** Fie cubul  $ABCD A' B' C' D'$ . Pe muchiile  $BB'$  și  $CC'$  considerăm punctele M și N astfel încât suma  $AM + MN + ND'$  să fie minimă. Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele  $MN$  și  $AD'$ .  
(G.M. Nr.10/2022, enunț modificat)

**4.** Triunghiurile ACD și BCD sunt situate în plane diferite. Fie  $G_1$  centrul de greutate al triunghiului ACD și  $G_2$  centrul de greutate al triunghiului BCD. Știind că N este mijlocul segmentului  $[CD]$ ,  $M \in [AB]$  astfel încât  $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ , iar  $MN \cap AG_2 = \{E\}$ , demonstrați că  $EG_1 \parallel (BCD)$ .

NOTĂ:

- 1.Toate subiectele sunt obligatorii.
- 2.Timpul de lucru este de 3 ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.

Succes!