Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024
Clasa a VI-a

SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

1. *Pe parcursul anului 2022, la un magazin de jucării s-au vândut 235 de roboți. În fiecare lună, numărul roboților vânduți a fost 16, 20 sau 25. Determinați numărul de luni în care s-au vândut exact 20 de roboți.*
(G.M. nr. 6-7-8/2023)

Notăm cu a numărul de luni în care s-au vândut 16 roboți, cu b numărul de luni în care s-au vândut 20 roboți și cu c numărul de luni în care s-au vândut 25 roboți. Astfel obținem $a+b+c = 12$ și $16a+20b+25c = 235$ .... **(1p)**
Deoarece $20b$, $25c$ și 235 sunt multipli lui 5 deducem că $16a$ este multiplu al lui 5.. **(1p)**
Cum 16 și 5 sunt prime între ele deducem că a este multiplu al lui 5, iar $a+b+c=12 \Rightarrow a\in\{0; 5; 10\}$.............. **(1p)**
Cazurile $a = 0$ și $a = 10$ nu convin, deci $a = 5$ .... **(1p)**
În acest caz opținem $b+c = 7$ și $20b+25c = 235 - 80 \Leftrightarrow 4b+5c = 31$... **(1p)**
Deci $31 - 4b$ este multiplu de 5, situație care convine doar pentru $b = 4$ și $c = 3$ .... **(1p)**
În concluzie, în 4 luni ale anului s-au vândut exact 20 roboți.. **(1p)**

2. *Considerăm unghiurile* ∢XOY *și* ∢YOZ, *adiacente și suplementare. Pe semidreapta* (OY *fixăm un punct* P. *Paralela prin* P *la bisectoarea lui* ∢XOY *intersectează semidreapta* (OZ *în punctul* M.
a) Arătați că ∢OPM≡∢OMP.
b) *Arătați că bisectoarea lui* ∢YOZ *este perpendiculară pe dreapta* PM.

Figura conform enunțului.. **(1p)**

a) Notăm cu (OA bisectoarea unghiului ∢XOY⇒∢AOX≡∢AOP (1) .... **(1p)**
Din OA∥PM și OP secantă⇒∢AOP≡∢OPM (alt. int.) (2) .... **(1p)**
Din OA∥PM și XM secantă⇒∢AOX≡∢PMO (coresp.) (3) .... **(1p)**
Din (1), (2) și (3) prin tranzitivitate se deduce că ∢OPM≡∢OMP.. **(1p)**

b) Notăm cu C intersecția dintre PM și bisectoarea lui ∢YOZ
Folosind definiția bisectoarei unui unghi deducem că m(∢AOC) = 90^o, sumă dintre jumătățile unghiurilor suplementare ∢XOY și ∢YOZ .... **(1p)**
Din OA∥PM și OC secantă⇒∢AOC=∢OCM =90^o (alt. int.) ⇒ OC ⊥ PM................................. **(1p)**

3. *Doi prieteni au plecat în excursie cu o companie aeriană având împreună 60 kg de bagaje. Prețul biletului eliberat de această companie aeriană dă dreptul la transportarea gratuită a unui număr maxim fixat de kilograme, pasagerii urmând să plătească o taxă suplimentară pentru fiecare kilogram pe care bagajul lor îl are în plus. Pentru depășirea cantităților admise cele două persoane au plătit suplimentar 40 de lei, respectiv 72 de lei, sumele acestea fiind direct proporționale cu numărul kilogramelor de bagaj în plus. Dacă o persoană ar fi călătorit singură, luând cele 60 kg de bagaj, atunci ar fi plătit 296 de lei pentru cantitatea de bagaj în plus. Care este numărul maxim de kilograme pe care le poate transporta o persoană fără să plătească taxe suplimentare la acea companie aeriană?*

Notăm cu x numărul maxim de kg acceptate de compania aeriană, fără a plăti taxe suplimentare, cu a şi b numărul kilogramelor de bagaj al fiecăruia din cei doi prieteni.

Se poate exprima numărul kilogramelor de bagaj pentru care se plătesc taxe astfel: $a-x$ şi $b-x$ pentru fiecare persoană, iar în cazul când ar circula doar o singură persoană, $60-x$ .... **(1p)**

Relaţiile care se pot scrie între aceste numere, folosind ipotezele problemei sunt:

$a+b=60$; $(a-x)\cdot p=40$; $(b-x)\cdot p=72$; $(60-x)\cdot p=296$ sau $\frac{40}{a-x}=\frac{72}{b-x}=\frac{296}{60-x}=p$,

unde p reprezintă taxa pentru fiecare kg de bagaj în plus, mărime constantă.. **(1p)**

Dacă se adună numărătorii şi numitorii primelor două rapoarte sau a celor trei rapoarte egale din şir, se obţine un raport egal cu cele din şir .... **(1p)**

Scrierea uneia din ecuaţii, cu necunoscuta x, de exemplu, $\frac{60-2x}{112}=\frac{60-x}{296}$ .... **(2p)**

Rezolvarea ecuaţiei şi finalizarea $x=23$, răspuns 23 kg .... **(2p)**

4. *Pe un cerc C(O; R) considerăm în ordinea rotirii acelor de ceasornic punctele $A_1; A_2; A_3; \ldots; A_{2n}$ astfel încât A_i și A_{n+i} să fie diametral opuse pentru orice $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$.*

a) *Pentru n=5 arătați că punctele date determină pe cerc cel puțin două arce cu măsura mai mică sau egală cu 36^o.*

b) *Dacă M și P sunt respectiv mijloacele arcelor $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ și $\overset{\frown}{A_{n+i}A_{n+i+1}}$ demonstrați că M și P sunt puncte diametral opuse pentru orice $i \in \{1; 2; \ldots; n-1\}$.*

a) Dacă $n=5$ avem punctele $A_1; A_2; A_3; \ldots; A_{10}$ și diametrele (A_1A_6); (A_2A_7); (A_3A_8); (A_4A_9); (A_5A_{10}).
Pe cercul dat putem considera tot în ordinea rotirii acelor de ceasornic punctele $P_1; P_2; P_3; \ldots; P_{10}$ astfel încât P_1 coincide cu A_1 și $\overset{\frown}{P_1P_2}=\overset{\frown}{P_2P_3}=\ldots=\overset{\frown}{P_9P_{10}}=\overset{\frown}{P_{10}P_1}=36^o$ .... **(1p)**

Prin aplicarea principiului cutiei există cel puțin un arc închis $\overset{\frown}{P_xP_{x+1}}$ de 36^o care conține două puncte consecutive dintre $A_1; A_2; \ldots; A_{10}$ .... **(1p)**

Am demonstrat că există un arc cu măsura mai mică cel mult egală cu 36^o și în acest caz avem unghiul la centru corespunzător are aceeași măsură, iar prin aplicarea proprietății unghiurilor opuse la vârf obținem și un arc opus de aceeași măsură. .... **(1p)**

<u>*Soluție alternativă*</u>: prin reducere la absurd putem presupune că toate arcele disjuncte $\overset{\frown}{A_1A_2}; \overset{\frown}{A_2A_3}; \ldots\ \overset{\frown}{A_9A_{10}}; \overset{\frown}{A_{10}A_1}$ determinate de punctele date au măsurile mai mari decât 36^o, iar prin însumare obținem mai mult decât 360^o ceea ce intră în contradicție cu suma tuturor măsurilor arcelor disjuncte ale unui cerc. Deci presupunerea făcută este falsă. Astfel obținem cel puțin un arc cu măsura mai mică sau egală cu 36^o.
De aici prin raționament similar celui din prima soluție se obține o măsură egală și pentru arcul opus.

b) Deoarece arcele $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ și $\overset{\frown}{A_{n+i}A_{n+i+1}}$ sunt delimitate de diametrele (A_iA_{n+i}) și $(A_{i+1}A_{n+i+1})$ deducem prin aplicarea proprietății unghiurilor opuse la vârf că acestea au aceeași măsură .... **(1p)**

Mjloacele arcelor date determină astfel egalitatea $\overset{\frown}{A_iM}=\overset{\frown}{MA_{i+1}}=\overset{\frown}{A_{n+i}P}=\overset{\frown}{PA_{n+i+1}}$ .... **(1p)**

De aici obținem congruența corespunzătoare a unghiurilor la centru $\widehat{A_iOM} \equiv \widehat{A_{n+i}OP}$ .... **(1p)**

Avem (A_iA_{n+i}) diametru și $\widehat{A_iOM} \equiv \widehat{A_{n+i}OP}$, iar prin aplicarea reciprocei teoremei unghiurilor opuse la vârf obținem că M, O , P sunt coliniare, adică M și P diametral opuse .... **(1p)**