BAREM DE CORECTARE și NOTARE

I. Fie numărul $a = 16^{506} - 4^{1009} - 2^{2024^0} \cdot 8^{672}$.

a) Arătați că a este multiplu de 125.

b) Determinați ultimele 4 cifre ale numărului a.

c) Scrieți numărul a ca o sumă de două pătrate perfecte.

Soluție:

a) $a = 2^{2024} - 2^{2018} - 2 \cdot 2^{2016} = 2^{2024} - 2^{2018} - 2^{2017}$ …………..……………….......1p

$a = 2^{2017} \cdot (2^7 - 2^1 - 2^0) = 2^{2017} \cdot 125 \Rightarrow a \vdots 125$ ……………………………………..1p

$b)$ $a = 2^{2014} \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^{2014} \cdot 1000$ ………………………………………………………1p

Ultima cifră a numărului 2^{2014} este 4, deci ultimele patru cifre ale numărului a sunt: 4,0,0,0…2p

b) $a = (2^{1007})^2 \cdot 1000 = (2^{1007})^2 \cdot (10^2 + 30^2)$ ……………………………………… 1p

$a = (2^{1007} \cdot 10)^2 + (2^{1007} \cdot 30)^2$ ……………………………………………... 1p

II. a) Suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 26.

Calculați suma cifrelor numărului $n = \overline{abc} + 1$. Analizați toate situațiile posibile.

b) Determinați numerele $\overline{xyz}$ știind că $\overline{xyz} = 10 \cdot (x + y + z)^2$.

Soluție:

a) Dacă $a + b + c = 26$ și a, b și c sunt cifre atunci două dintre ele sunt 9 iar una 8....1p

Sunt trei posibilități:

Dacă $\overline{abc} = 998$ atunci $\overline{abc} + 1 = 999$ are suma cifrelor 27.

Dacă $\overline{abc} = 989$ atunci $\overline{abc} + 1 = 990$ are suma cifrelor 18.

Dacă $\overline{abc} = 899$ atunci $\overline{abc} + 1 = 900$ are suma cifrelor 9

Deci, suma cifrelor poate fi: 27, 18 sau 9. ....2p

b) Deduce că 10 divide $\overline{xyz}$, deci *z=0* 1p

Egalitatea devine $\overline{xy} = (x + y)^2$ 1p

Deduce că x=8 și *y=1* 1p

Finalizare, numărul $\overline{xyz}$ este 810. ....1p

III. Determinați suma numerelor naturale cuprinse între 1504 și 2007, care prin împărțire la 28 dau restul 5, iar prin împărțire la 35 dau restul 12.

Gazeta Matematică nr.6-7-8/2023

Soluție: Fie *n* număr natural care satisface condițiile problemei.

$n = 28c_1 + 5 \Rightarrow 5n = 140c_1 + 25$ 1p

$n = 35c_2 + 12 \Rightarrow 4n = 140c_2 + 48$ 1p

$5n - 4n = 140c_1 - 140c_2 + 25 - 48$

$\boldsymbol{n} = 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) + 140 + 25 - 48$

$\boldsymbol{n} = 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) + 117$ (1) ...2p

Cum $1504 < n < 2007$, deduce că $1387 < 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) < 1890$ (2) 1p

Multiplii lui 140 cuprinși între 1387 și 1890 sunt: 1400, 1540, 1680 și 1820 (3) 1p

Din relațiile (1), (2), (3) deduce valorile posibile ale lui *n*, respectiv numerele: 1517, 1657, 1797, și 1937, a căror sumă este 6908. ....1p

IV.

a) Numerele 35, 48, 61, 73, 98, 82, 69, 19, 56 și 44 sunt grupate în perechi astfel încât suma numerelor fiecărei perechi este aceeași. Care este numărul pereche cu 48?

b) Mihai are într-o cutie 26 bile roșii și 29 bile verzi. El se joacă scoțând de fiecare dată două bile din cutie. Dacă acestea au aceeași culoare, pune înapoi în cutie o bilă roșie, dacă au culori diferite pune înapoi în cutie o bilă verde. Repetă mișcarea până ce în cutie mai rămâne o singură bilă. Ce culoare va avea această bilă? Justificați răspunsul.

Soluție:

a) Suma numerelor date este 585, ...1p
iar suma numerelor dintr-o pereche este $585 : 5 = 117$ 1p
Numărul în pereche cu 48 este $117 - 48 = 69.$ 1p

b) Extrăgând două bile roșii, pune înapoi o bilă roșie, deci numărul bilelor roșii ar scădea cu una, al bilelor verzi nu s-ar modifica. 1p
Extrăgând două bile verzi, pune înapoi o bilă roșie, deci numărul bilelor verzi ar scădea cu două, al bilelor roșii ar crește cu una..1p
Extrăgând două bile de culori diferite, pune înapoi o bilă verde, deci bilelor verzi nu s-ar modifica iar numărul bilelor roșii ar scădea cu una, ...1p
Dacă prin repetare numărul bilelor roșii își schimbă paritatea, numărul bilelor verzi va avea mereu aceeași paritate; la final trebuie să rămânem cu o bilă și cum numărul de bile verzi este mereu impar, bila rămasă trebuie să fie verde...1p