Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XI -a
Subiecte

Problema 1. (7p)

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3\{\mathbb{R}\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Arătați că $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3$.

b) Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Problema 2. (7p)

Se consideră determinantul

$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$, unde a, b, c sunt numere reale.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(x,1,-2) = 0$;

b) Să se arate că, dacă $a,b,c > 0$ și $ab + bc + ca \leq 3abc$, atunci $D(a,b,c) \geq 27$.

Problema 3. (7p)

Se consideră șirul (a_n), $n \geq 2$, dat de relația $a_n = n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+1}{k^2+k}$

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) Pentru șirul $(b_n)_n, n \geq 2$, dat de $b_n = {a_n}^{n-\sqrt{n}}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Problema 4. (7p)

În sistemul ortogonal *xOy* fie punctele A(2, 0), B(6, 0), C(4, 4).

a) Determinați mulțimea punctelor M din interiorul triunghiului ABC pentru care $\mathcal{A}_{[ACM]} = \mathcal{A}_{[BCM]}$.

b) Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

Notă: **Timp de lucru: 3 ore.**
Toate subiectele sunt obligatorii.
Nu se acordă puncte din oficiu.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro