Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a IX -a
Subiecte

Problema 1. (7p)

Fie a, b, c numere strict pozitive. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$

Problema 2. (7p)

Să se rezolve ecuația $[x + \{x\}] = [2x - \{x\}]$, $x \in \mathbb{R}$, unde $[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară pentru numărul real x.

Problema 3. (7p)

Fie $(a_n)_{n\geq1}$ un șir neconstant pentru care $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$, $\forall\, n \in N^*$.

Demonstrați că șirul definit prin $b_n = \frac{a_n}{n}$, $n \geq 1$ este o progresie aritmetică.

Problema 4. (7p)

Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, T astfel încât $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BT} + 2\overrightarrow{NT} = \vec{0}$, unde $N \in AC$ și $\{T\} = AM \cap BN$. Demonstrați că $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.

Notă: **Timp de lucru: 3 ore.**
Toate subiectele sunt obligatorii.
Nu se acordă puncte din oficiu.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro