Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a IX -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.
Fie a, b, c numere strict pozitive. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$

Soluție:

a) Trecând în membrul stâng, se ajunge la
$(a-b)^2(a+b) \geq 0$ ……………………………......................3p

b) Folosind inegalitatea precedentă, se ajunge la

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b)+abc} +$$
$$+\frac{1}{bc(b+c)+abc} + \frac{1}{ca(c+a)+abc} = \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)} =$$
$$\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab} + + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{1}{abc}$$ ……………………4p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a IX -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 2.
Să se rezolve ecuația $[x+\{x\}]=[2x-\{x\}]$, $x\in\mathbb{R}$, unde $[x]$, $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară pentru numărul real x.

Soluție:
Folosind egalitatea $x=[x]+\{x\}$, ecuația se mai scrie $\big[[x]+2\{x\}\big]=[2[x]+\{x\}]$ sau $[x]+[2\{x\}]=2[x]+[\{x\}]$………………… 2p

Rezultă $[x]=[2\{x\}]$…………………………………………………1p

Dacă $\{x\}\in[0,\frac{1}{2})$, ecuația devine $[x]=0$, deci $x\in[0,\frac{1}{2})$ soluție……1p

Dacă $\{x\}\in[\frac{1}{2},1)$, ecuația devine $[x]=1$, deci $x\in[\frac{3}{2},2)$ soluție……1p

Soluția este $x\in[0,\frac{1}{2})\cup[\frac{3}{2},2)$ …………………………………….. 2p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a IX -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir neconstant pentru care $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=\frac{a_{n+1}}{3}$, $\forall n \in N^*$. Demonstrați că șirul definit prin $b_n=\frac{a_n}{n}$, $n \geq 1$ este o progresie aritmetică.

Soluție:

Pentru $n=1$, avem $a_2=3\,a_1$ și $b_1=a_1$. Pentru $n=2$, avem

$a_3=6\,a_1$ și $b_2=\frac{3}{2}a_1$ 2p

Arătăm prin inducție că $a_n=\frac{n(n+1)}{2}a_1$, pentru $n\geq 1$. Presupunem propoziția adevărată pentru $1,2,\dots,n$ și demonstrăm pentru $n+1$. 2p

Rezultă că $b_n=\frac{a_n}{n}=\frac{n+1}{2}a_1$, și se obține progresie aritmetică cu rația $r=\frac{1}{2}a_1$ 3p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a IX -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 4.

Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, T astfel încât $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BT}+2\overrightarrow{NT}=\vec{0}$, unde $N \in AC$ și $\{T\}=AM \cap BN$. Demonstrați că $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$.

Soluție:

Din $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ avem M mijlocul lui (BC) și $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ 2p

Din $N \in AC$ rezultă că există $k \in R$ astfel încât $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$ 2p

Din $\overrightarrow{BT}+2\overrightarrow{NT}=\vec{0}$ avem $\overrightarrow{BT}=2\overrightarrow{TN}$ și $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AN})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2k\overrightarrow{AC})$ 2p

Cum $\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AM}$ sunt coliniari obținem $k=\frac{1}{2}$, adică N mijlocul lui (AC)

Rezultă că $2\overrightarrow{TN}=\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TC}$ de unde $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ 1p