Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XII -a
Barem de corectare și notare

Problema 1. (7p)

Pe mulțimea $(0,+\infty)$ se consideră legea de compoziție internă, notată „ $*$ ”, având proprietățile: $(x+1)*x=1, \forall x\in(0,+\infty)$ și $(x\cdot y)*z=x\cdot(y*z), \forall x,y,z\in(0,+\infty)$. Să se calculeze $\sqrt{2}*\left(\sqrt{2}+1\right)$ și să studieze asociativitatea și existența elementului neutru pentru legea „ $*$ ”.

***Soluție*:**

Fie $x,y\in(0,+\infty)$, atunci avem: $x*y=\left(\frac{x}{y+1}\cdot(y+1)\right)*y=$
$\frac{x}{y+1}\left((y+1)*y\right)=\frac{x}{y+1}$...3p

Rezultă atunci că avem: $\sqrt{2}*\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})+1}=\sqrt{2}-1$.

Avem: $(x*y)*z=\frac{x}{y+1}*z=\frac{x}{(y+1)(z+1)}$ și $x*(y*z)=x*\frac{y}{z+1}=\frac{x\cdot(z+1)}{y+z+1}$. Este acum evident că există numere reale $x,y,z\in(0,+\infty)$ pentru care avem relația: $(x*y)*z\neq x*(y*z)$ ceea ce arată că legea de compoziție nu este asociativă. Dacă operația „ $*$ ” ar avea un element neutru notat e ar rezulta că $\frac{x}{e+1}=x, (\forall)x\in(0,+\infty)$de unde rezultă că $e=0\notin(0,+\infty)$. Prin urmare legea de compoziție din enunț nu admite element neutru......................... 4p

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XII -a
Barem de corectare și notare

Problema 2. (7p)

Fie G=(-1,1). Pentru orice x, y$\in G$, notăm x$\circ$y =$\frac{x+y}{1+xy}$.
a) Arătați că (G,$\circ$) este grup abelian și este izomorf cu grupul ((0,+∞), $\cdot$) .
b) Calculați $\frac{1}{3}\circ\frac{1}{5}\circ\frac{1}{7}\circ........\circ\frac{1}{2025}$.

***Soluție*:**
a) Dacă x, y$\in$ G atunci x$\circ$y $\in$G..1p

Axiomele grupului 2p

f:G$\rightarrow(0,\infty)$, f(x)=$\frac{1-x}{1+x}$ este izomorfism 2p

b) f(z)= $f\left(\frac{1}{3}\circ\frac{1}{5}\circ\frac{1}{7}\circ........\circ\frac{1}{2025}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{5}\right).......f\left(\frac{1}{2025}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}..........\frac{1012}{1013}=\frac{1}{1013}$.

Deci $\frac{1-z}{1+z}=\frac{1}{1013}$. Rezultă că z=$\frac{506}{507}$..2p

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XII -a
Barem de corectare și notare

Problema 3. (7p)

Pe un interval *I* din domeniul maxim de definiție să se calculeze o primitivă pentru funcția $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \rightarrow \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1+sinx}}{\mathbf{1+cosx}} \cdot \boldsymbol{e^x}$.

***Soluție*:**

Fie $I \subset \left((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ un interval din domeniul de definiție al funcției f.

Avem: $\int \frac{1+sinx}{1+cosx} \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot e^x + \int e^x \cdot tg\frac{x}{2} \cdot dx + \frac{1}{2}\int e^x \cdot tg^2\frac{x}{2} dx$. Pe baza alegerii intervalului I rezultă că $\frac{x}{2} \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$ și deci în domeniul de definiție al funcției tg...4p

Deoarece $\int e^x \cdot tg\frac{x}{2} \cdot dx = e^x \cdot tg\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int e^x \cdot \left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right) dx$ rezultă că $F(x) = e^x \cdot tg\frac{x}{2} + c$ este o primitivă pentru f 3p

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XII -a
Barem de corectare și notare

Problema 4. (7p)

Calculați:
$$I=\int_0^{10}\frac{(5-x)^1+(5-x)^3+(5-x)^5+\ldots+(5-x)^{2023}}{1+(5-x)^2+(5-x)^4+\ldots+(5-x)^{2024}}dx.$$

Soluție:

Facem substituția t=10-x $\Longrightarrow$ dt=-dx……………………………………...2p

5-x = t-5…………………………………………………………………1p

x=0 $\Longrightarrow$ t=10

x=10 $\Longrightarrow$ t=0………………………………………………………………1p

$$I=-\int_0^{10}\frac{(t-5)^1+(t-5)^3+\ldots+(t-5)^{2023}}{1+(t-5)^2+(t-5)^4+\ldots+(t-5)^{2024}}dt$$

$$I=-\int_{10}^{0}\frac{(5-t)^1+(5-t)^3+\ldots+(5-t)^{2023}}{1+(5-t)^2+(5-t)^4+\ldots(5-t)^{2024}}dt$$ ………………………………………2p

Obținem I = -I
$\Longrightarrow$ I=0…………………………………………………….................1p