Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a X -a
Barem de notare și corectare

Problema 1. (7p)

Pe mulțimea numerelor reale să se rezolve inecuația:

$$\log_{2024}\left(7+4\sqrt{3}\right)^x \le \log_{2024}\left[4\left(2+\sqrt{3}\right)^x-1\right]$$

Soluție:
Din monotonia funcției logaritmice cu baza supraunitară deducem
$\left(7+4\sqrt{3}\right)^x \le 4\left(2+\sqrt{3}\right)^x-1$...2p

Cu notația $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$ inecuația devine $t^2-4t+1\le 0$ cu $t_1=2+\sqrt{3}$ si $t_2=2-\sqrt{3}$........3p

$t\in\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$ $de\ unde\ rezult$ă $x\in[-1,1]$…………… ………..2p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a X -a
Barem de notare și corectare

Problema 2. (7p)

Determinați numerele reale a pentru care $\sqrt[3]{7-a\sqrt{5}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{5}}=2$

***Soluție*:**
Ridicăm la puterea a 3-a ambii membri:

$7-a\sqrt{5}+7+a\sqrt{5}+3\sqrt[3]{7-a\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{7+a\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{7-a\sqrt{5}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{5}}\right)=8$

$\Rightarrow 14+3\sqrt[3]{49-5a^2}\cdot 2=8 \Rightarrow$ 3 p

$6\cdot\sqrt[3]{49-5a^2}=-6 \Rightarrow \sqrt[3]{49-5a^2}=-1 \Rightarrow 49-5a^2=-1 \Rightarrow 50=5a^2 \Rightarrow$

$a^2=10 \Rightarrow a\in\{-\sqrt{10},\sqrt{10}\}$ 4 p

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a X -a
Barem de notare și corectare

Problema 4. (7p)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_a[x] = [\log_a x]$, $a \in N$, a≥2.

Soluție:
Condiții de existență: $x \in [1, +\infty)$ ....1 p

$\log_a[x] = [\log_a x] = k \Longrightarrow k \in \boldsymbol{N}$ 2p

$$\begin{cases} [x] = a^k \\ k \leq \log_a x \leq k+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^k \leq x < a^k + 1 \\ a^k \leq x < a^{k+1} \end{cases}$$ 2p

$a^k + 1 \leq a^{k+1}$ pentru $a \geq 2$ și $k \in \boldsymbol{N}$ $\Longrightarrow$ 1p
$x \in \bigcup_{k\in N} [\boldsymbol{a^k}, \boldsymbol{a^k + 1})$..1p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro