Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XI -a
Barem de corectare și notare

Problema 1.

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3\{\mathbb{R}\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a). Arătați că $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3$.
b). Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Soluție:

a).$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 1p

$A^2 - 5A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= O_3$ $\dots\dots\dots\dots.1p$

b). Din a). avem că $A^2 = 5A - 4I_3$. Considerăm două șiruri $(a_n)_{n\geq 1}$; $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$A^n = a_nA + b_nI_3$ $cu\ a_1 = 1; a_2 = 5$ ș$i\ b_1 = 0;\ b_2 = -4$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 1p$

$A^{n+1} = (a_nA + b_nI_3)\cdot A = a_nA^2 + b_nA = a_n(5A - 4I_3) + b_nA = (5a_n + b_n)A - 4a_nI_3$

$Dar\quad A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}, \forall n \geq 1$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.1p

$a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$ are ecuația caracteristică $r^2 - 5r + 4 = 0$, $\Delta = 25 - 16 = 9$ $r_1 = 1$ și $r_2 = 4$ 1p

$cum\ a_n = ar_1^n + br_2^n, avem\ a_n = a + b\cdot 4^n\ din\ \ a_1 = 1$ ș$i\ a_2 = 5 \rightarrow a = -\frac{1}{3}$ș$i\ b = \frac{1}{3}$

Deci $a_n = \frac{4^n-1}{3}$, $b_n = -\frac{4}{3}(4^{n-1} - 1)$, $n \geq 1 \Rightarrow A^n = \frac{4^n-1}{3}A - \frac{4}{3}(4^{n-1} - 1)I_3$ $\dots\dots\dots\dots$..2p

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XI -a
Barem de corectare și notare

Problema 2.

Se consideră determinantul

$$D(a,b,c)=\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix},$$

unde a,b,c sunt numere reale.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(x,1,-2)=0$;

b) Să se arate că, dacă $a,b,c>0$ și $ab+bc+ca\le 3abc$, atunci

$D(a,b,c)\ge 27$.

Soluție:

a) $D(x,1,-2)=\begin{vmatrix} x+1 & 2x & 2x \\ 2 & -x+3 & 2 \\ -4 & -4 & -x-3 \end{vmatrix}$ 1p

$$D(x,1,-2)\overset{L_2+L_3\to L_1}{=}\begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ 2 & -x+3 & 2 \\ -4 & -4 & -x-3 \end{vmatrix}=(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -x+3 & 2 \\ -4 & -4 & -x-3 \end{vmatrix}$$
..............................1p

$$D(x,1,-2)\overset{-C_1+C_2\to C_2;\,-C_1+C_3\to C_3}{=}(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -x+1 & 0 \\ -4 & 0 & -x+1 \end{vmatrix}=(x-1)^3$$ 1p

$(x-1)^3=0$ de unde se obține soluția unică $x=1$; .... 1 p

b) $D(a,b,c)\overset{L_2+L_3\to L_1}{=}\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}\overset{-C_1+C_2\to C_2;\,-C_1+C_3\to C_3}{=}$$

$$(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$ .... 1 p

Din $3abc\ge ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ rezultă că $abc\ge 1$. .... 1 p

Dar $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\ge 1$, deci $(a+b+c)^3\ge 27$. Astfel rezultă că $D(a,b,c)\ge 27$. 1p

Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024

Clasa a XI -a

Barem de corectare și notare

Problema 3. **Se consideră șirul (a_n), $n \geq 2$, dat de relația** $a_n = n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+1}{k^2+k}$

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) Pentru șirul (b_n),$n \geq 2$, dat de $b_n = a_n^{\,n-\sqrt{n}}$. **Calculați** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Soluție:

a) $a_n = n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+1}{k^2+k} = n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k^2+k}{k^2+k} + \frac{1}{k(k+1)}\right) = n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

.... 2p

$a_n = n+1-n+1-1+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ 2p

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\left(\frac{n-\sqrt{n}}{n}\right)}$ 2p

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n}} = \mathrm{e}$ 1p

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a XI -a
Barem de corectare și notare

Problema 4. În sistemul ortogonal xOy ,fie punctele A(2,0),B(6,0),C(4,4).

a). Determinați mulțimea punctelor M din interiorul triunghiului ABC pentru care $\mathcal{A}_{[ACM]} = \mathcal{A}_{[BCM]}$.

b). Determinați ortocentrul triunghiului ABC.

***Soluție*:**

a) Fie M(x, y) atunci avem $\mathcal{A}_{[ACM]} = \mathcal{A}_{[BCM]}$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}\right\|$$

..........1p

$|8+4y-4x-2y| = |24+4y-4x-6y| \Rightarrow M$ *aparține dreptei d de ecuație* $y = 4$ *sau dreptei d de ecuație* $x = 4$ 1p

$d \cap Int\Delta ABC = [CD]$ *unde* $D(4,0)$ *este mijlocul segmentului*$[AB]$..........1p

$d' \cap Int\Delta ABC = C$. Deci mulțimea punctelor din plan formează segmentul $[CD]$..........1p

b). $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad y = 0$

$\rightarrow$ *Inalțimea corespunzătoare laturii AB este dreapta verticală de ecuație* $x = 4$.......1p

$$AC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 2x - 4 \text{ cu panta } m = 2 \Rightarrow m_h = -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ *Inalțimea corespunzătoare laturii AC este dreapta de ecuație* $y = -\frac{1}{2}x + 3$..........1p

$\rightarrow$ *Ortocentrul triunghiului ABC este* $h_c \cap h_b = H(4,1)$..........1p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro