Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VIII -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. (7p)

Să se determine numerele reale, a, b cu a<b știind că intervalul (a,b) conține un singur număr întreg și $|b-a-2| = a^2+b^2-4b+\frac{9}{2}$.

SOLUȚIE

Intervalul (a, b) are un singur număr întreg

$k-1 < a < k < b < k+1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b-a < 2$........................1p

$b-a-2 < 0 \Rightarrow |b-a-2| = a-b+2$..............................1p

$a-b+2 = a^2+b^2-4b+\frac{9}{2} \Leftrightarrow a^2-a+b^2-3b+\frac{9}{2}-2=0$ 2p

$a^2-a+\frac{1}{4}+b^2-3b+\frac{9}{4}=0$...1p

a $=\frac{1}{2}$ și b $=\frac{3}{2}$ 2p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VIII -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 2. (7p)

Fie $E(x,y,z)= x^2+4y^2+9z^2+2x-12y-24z-1999$, $x,y,z \in R$.

a) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(y)=4y^2-12y+2033$;

b) Determinați intervalele în care sunt situate numerele reale x,y,z știind că $E(x,y,z)=0$.

c)Arătați că valoarea maximă a expresiei $F(x, y, z)=x+y+z$, pentru valorile din intervalele obținute la punctul b) este situată în intervalul (84;85) .

SOLUȚIE :

a)$E(y)=4y^2-12y+9 +2033-9= (2y-3)^2 +2024$ ……………….....……1p

Finalizare $(2y-3)^2 \geq 0$, deci $E_{min}(y)=2024$………….……………1p

b) $(x^2+2x+1) +(4y^2-12y+9)+(9z^2-24z+16)=2025$……………………………………………..……1p

$(x+1)^2 +(2y-3)^2+(3z-4)^2=45^2$………………………………..……………………..1p

$(x+1)^2\geq 0$, $\rightarrow (x+1)^2 \leq 45^2$ $\rightarrow x\in[-46;44]$

$(2y-3)^2\geq 0$, $\rightarrow (2y-3)^2 \leq 45^2 \rightarrow y\in[-21;24]$

$(3z-4)^2\geq 0$, $\rightarrow (3z-4)^2\leq 45^2 \rightarrow z\in[-41/3;49/3]$……………………………………..……..........……2p

c) $E_{max} = 44+24+49/3=84,(3) \in(84;85)$………………………………………………… …….….1p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VIII -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 3. (7p)

Fie ABCD un tetraedru cu T și S mijloacele muchiilor AC și respectiv AD.

a)Dacă AC≡AD și BT≡SB, demonstrați că AB ⊥ CD .

b)Fie E și F centrele de greutate ale triunghiurilor BTS, respectiv BCD. Arătați că punctele A,E și F nu pot fi coliniare.

Soluție :

a). AC≡AD $=> \Delta ACD$ isoscel => Mediana AM este și înălțime =>

$\left.\begin{array}{c} AM \perp CD \\ \text{dar TS este linie mijlocie în } \Delta ACD \end{array}\right\} => AM$ și TS se înjumătățesc într-un punct Q și AM⊥TS (1)

BT≡BS $=> \Delta BTS$ *isoscel*, BQ mediană=>BQ ⊥ TS (2)........................ (2p)

Din (1) și (2) => TS ⊥ (ABQ) => $\left.\begin{array}{c} TS \perp AB \\ \text{dar } TS \parallel CD \end{array}\right\}$ =>AB⊥ CD .... (1p)

b). Dacă F este centru de greutate în $\Delta BCD \; => \frac{BF}{BM} = \frac{2}{3}$

Dacă E este centru de greutate în $\Delta BTS \; => \frac{BF}{BQ} = \frac{2}{3}$ .... (2p)

$=> \frac{BF}{BM} = \frac{BF}{BQ}$ și atunci conform reciprocei teoremei lui Thales obținem că EF II QM.

Cum $A \in QM \; => EF \nparallel AM \; =>$ A,E,F necoliniare .... (2p)

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VIII -a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 4. (7p)

În cubul ABCDA'B'C'D' notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor AB, B'C', respectiv DD'. Se dă AB = 10 cm.

a) Calculaţi aria triunghiului MNP.
b) Arătaţi că D'B⊥ AC
c) Arătaţi că (A'BC)⊥ (B'AD).

Soluție :

a) ΔMNP echilateral

$A_{\Delta MNP} = \frac{MN^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\Delta MNP} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm^2..2p

b) $AC \perp (DD'B),\ D'B \subset (DD'B) \Rightarrow AC \perp D'B \Rightarrow D'B \perp AC$..................2p

a) $AC \perp B'B$..1p

$\left.\begin{matrix} AC \perp BD \\ AC \perp B'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (B'BD)$ 1p

şi $AC \subset (AB'C) \Rightarrow (AB'C) \perp (B'BD)$..1p

Str. Carpaţi nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro