Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VII -a
Barem de corectare și notare

Problema 1.

a) **Fie A=$\left\{\frac{1}{1\cdot 2};\frac{1}{2\cdot 3};\dots;\frac{1}{2024\cdot 2025}\right\}$.**

Să se arate că pentru orice submulțime nevidă B inclusă în A, suma elementelor lui B nu este număr natural.

Soluție

Fie B o submulțime cu k elemente a mulțimii A, card B =k. $1\leq k\leq 2024$
Suma elementelor mulțimii B este mai mică sau egală cu suma elementelor lui A........
....1 punct

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2024\cdot 2025}$=S

S=$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}=1-\frac{1}{2025}$

S=$\frac{2024}{2025}$..1 punct

S(B)$\leq S$, unde S(B) reprezintă suma elementelor lui B.

Deci 0$< S(B)\leq\frac{2024}{2025}<1$.

De aici rezultă că S(B) nu poate fi un număr natural..1 punct

b)Arătați că există o pereche de numere naturale nenule (x, y),cu x ≠ y , astfel încât:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2024}$

Soluție

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2024}$ => $2024x+2024y=xy$ ....1 punct

=> $x=\frac{2024y}{y-2024}\in N$ ....1 punct

$(y-2024)/2024y$

$(y-2024)/(y-2024)$ => $(y-2024)/(2024y\text{-}2024^2)$

Din ultimele două relații rezultă: $(y-2024)/2024^2$ ....1 punct

Găsește o soluție folosind divizorii numărului 2024^2. De exemplu y=4048 si x= 4048 .....1 punct

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VII -a
Barem de corectare și notare

Problema 2.

Fie $\boldsymbol{a = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{64}{65}\cdot(2^{-1}+6^{-1}+12^{-1}+\cdots+4160^{-1})}}$**.**

Încadrați numărul *a* între doi întregi consecutivi.

Soluție:

$2^{-1}+6^{-1}+12^{-1}+\cdots+4160^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4160}=\frac{64}{65}$ 2p

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{64}{65}\cdot\frac{64}{65}=\frac{64}{65^2}$ ....
2p

$a=\sqrt{\frac{64}{65^2}}=\frac{8}{65}<1$ 2p

a>0 => 0<a<1 ....1p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VII -a
Barem de corectare și notare

Problema 3.

În triunghiul ABC dreptunghic, punctul D este mijlocul ipotenuzei BC. Segmentul BE este mediană în triunghiul ABD, E aparține lui AD și F este simetricul lui B față de E.

BF intersectează latura AC în punctul P.

Să se arate că:

a) Patrulaterul ADCF este romb.

b) PB=2 PD.

Soluție

a) Din F simetricul lui B față de E rezultă că E este mijlocul segmentului BF.
Dar și D este mijlocul lui BC, rezultă că ED este linie mijlocie în triunghiul BFC.
Rezultă că ED ∥ FC și ED=FC/2……………………………………………………1 punct
BE este mediană în triunghiul ABD ,rezultă că AD=2 ED
Din AD=2 ED și FC=2 ED se obține că AD= FC.
Cum ED ∥ FC rezultă că AD ∥ FC .
Se obține ADCF paralelogram…………………………………………………….1 punct
În triunghiul BAC dreptunghic cu BC ipotenuză și AD mediană , rezultă că AD=DC.
Deci patrulaterul ADCF este romb…………………………………………………1 punct

b) Din ADCF romb, rezultă că AC este mediatoarea segmentului DF.
Punctul P aparține lui AC, deci PD=PF……………………………………......1 punct
Fie AC∩ DF=$\{O\}$.Atunci AO și FE sunt mediane în triunghiul ADF.
Deci P este centrul de greutate al triunghiului ADF. Rezultă că PF=2 PE………1 punct
BE=FE=FP+PE=3 PE.
BP=BE+EP=3 EP+EP=4 EP…………………………………………………1 punct
PF=2 PE și PD=PF, deducem că PB=2 PD…………………………………..1 punct

Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Teleorman, 11 februarie 2024
Clasa a VII -a
Barem de corectare și notare

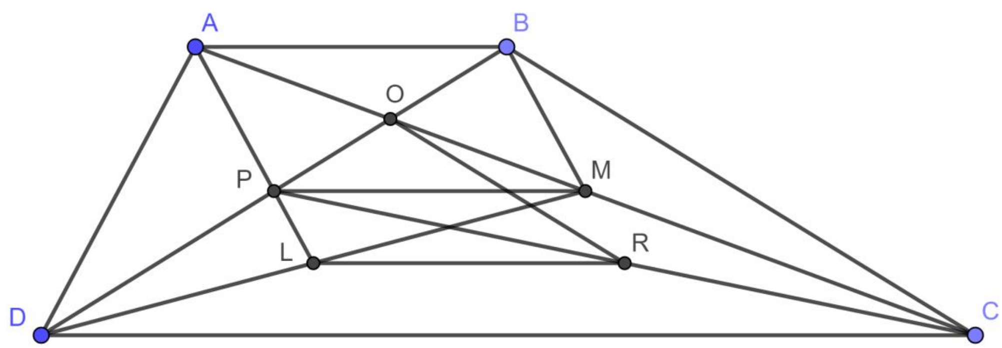
Problema 4.

Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = b$ și $CD = 3b$, $AC \cap BD = \{O\}$. Fie punctul M mijlocul diagonalei AC, P mijlocul diagonalei BD, R mijlocul segmentului [CP] și L mijlocul lui [MD].

a) Arătați că OBCR este trapez.

b) Demonstrați că punctele A,P,L sunt coliniare.

Soluție:



a) $\left.\begin{matrix}[AM] \equiv [MC] \\ [BP] \equiv [PD]\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} PM \parallel AB \\ PM = \frac{3b-b}{2} = b \end{cases}$ ………………………………………………1p

$\Rightarrow APMB$ *este paralelogram* $\Rightarrow AP \parallel BM$ ……………………………………………..…1p

$AM, PB -$ *diagonalele paralelogramului* $\Rightarrow O -$ *mijlocul* $[BP]$……………………..……...1p

$\left.\begin{matrix}O - mijlocul\ [BP] \\ R - mijlocul\ [PC]\end{matrix}\right\} \Rightarrow OR - linie\ mijlocie\ \Delta PBC \Rightarrow OR \parallel BC \Rightarrow OBCR\ trapez$ ……p

b)

$\left.\begin{matrix}L - mijlocul\ [DM] \\ P - mijlocul\ [DB]\end{matrix}\right\} \Rightarrow LP - linie\ mijlocie\ \Delta DBM \Rightarrow LP \parallel BM$ …………………1p

$AP \parallel BM\ (APMB - paralelogram)$……………………………………………..1p

Dar prin punctul P *nu se pot duce două paralele la dreapta* BM $\Rightarrow$

A, P, L *sunt coliniare* ……………………………………………………………1p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro