OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a VI-a

1. Fie $\measuredangle AOB$, un unghi alungit. . De aceeași parte a dreptei AB, pornind de la A spre B, se consideră punctele M, N și P. Unghiurile, $\measuredangle AOM$, $\measuredangle MON$, $\measuredangle NOP$ și $\measuredangle POB$ au măsurile exprimate în grade sexagesimale astfel: $\measuredangle AOM = x, \measuredangle MON = x+n, \measuredangle NOP = x+2n, \measuredangle POB = x+3n,$ unde x și $n \in \mathrm{N}^*$.

a) (3p) Arătați că $\measuredangle MOP = 90^0$.

b) (4p) Aflați cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua x. În fiecare din aceste cazuri să se afle măsurile unghiurilor $\measuredangle AOM$, $\measuredangle MON$, $\measuredangle NOP$ și $\measuredangle POB$.

Gazeta Matematică, prelucrare

<u>Soluție</u>

a)

$$\measuredangle AOM + \measuredangle MON + \measuredangle NOP + \measuredangle POB = 180^0 \Rightarrow x + x + n + x + 2n + x + 3n = 180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 6n = 180^0 \Rightarrow 2x + 3n = 90^0.$$

$$\measuredangle MOP = \measuredangle MON + \measuredangle NOP = x + n + x + 2n = 2x + 3n = 90^0.$$

b)

$2x + 3n = 90^0 \Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow 3n \in \{6,12,18,...,84\}$

x este minim dacă $3n$ este maxim $\Rightarrow 3n = 84 \Rightarrow n = 28 \Rightarrow 2x + 84 = 90 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3^0$.

x este maxim dacă $3n$ este minim $\Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow 2x + 6 = 90 \Rightarrow 2x = 84 \Rightarrow x = 42^0$.

Deci, $x = 3^0$ este x minim și $x = 42^0$ este x maxim.

Dacă $x = 3^0 \Rightarrow \measuredangle AOM = 3^0, \measuredangle MON = 3^0 + 28^0 = 31^0, \measuredangle NOP = 3^0 + 2 \cdot 28^0 = 3^0 + 56^0 = 59^0,$ $\measuredangle POB = 3^0 + 3 \cdot 28^0 = 3^0 + 84^0 = 87^0.$

Dacă $x = 42^0 \Rightarrow \measuredangle AOM = 42^0, \measuredangle MON = 42^0 + 2^0 = 44^0, \measuredangle NOP = 42^0 + 2 \cdot 2^0 = 46^0,$ $\measuredangle POB = 42^0 + 3 \cdot 2^0 = 48^0.$

<u>Barem</u>

a) $\measuredangle AOM + \measuredangle MON + \measuredangle NOP + \measuredangle POB = 180^0$ $2x + 3n = 90^0$ $\measuredangle MOP = \measuredangle MON + \measuredangle NOP = x + n + x + 2n = 2x + 3n = 90^0$	1p 1p 1p
b) Determină x minim, $x = 3^0$ Determină x maxim, $x = 42^0$	1 p 1p
$x = 3^0 \Rightarrow \measuredangle AOM = 3^0, \measuredangle MON = 31^0, \measuredangle NOP = 59^0, \measuredangle POB = 87^0.$ $x = 42^0 \Rightarrow \measuredangle AOM = 42^0, \measuredangle MON = 44^0, \measuredangle NOP = 46^0, \measuredangle POB = 48^0.$	1 p 1p

2. Un număr N se numește **deficient**, dacă $S < N$, unde S este suma divizorilor numărului N, mai mici decât N. De exemplu: 8 este număr **deficient** deoarece $S=1+2+4<8$.

a) (3p) Arătați că numerele 6 și 36 nu sunt numere **deficiente**.

b) (4p) Arătați că numerele 2023 și 7^{2023} sunt numere **deficiente**.

Dorina Cionca, Suceava

Soluție:

a)Un număr N, nu este **deficient** dacă $S \geq N$,unde S este suma divizorilor numărului N, mai mici decât N.

$D_6 = \{1,2,3,6\} \Rightarrow S = 1+2+3 = 6 \Rightarrow 6$ nu este **deficient**.

$D_{36} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\} \Rightarrow S = 1+2+3+4+6+9+12+18 = 55 > 36 \Rightarrow 36$ nu este **deficient**.

b) Descompunerea în factori primi a numărului $2023 = 7 \cdot 17^2$

$D_{2023} = \{1; 7; 17; 119; 289; 2023\}$

Suma divizorilor numărului 2023, mai mici ca 2023 este:

S=$1 + 7 + 17 + 119 + 289 = 433 \Leftrightarrow 433 < 2023 \Rightarrow$ 2023 este număr **deficient.**

7 este număr prim $\Rightarrow$ mulțimea divizorilor lui 7^{2023} este:

$D_{7^{2023}} = \{1; 7; 7^2; 7^3; 7^4; \ldots; 7^{2022}; 7^{2023}\} \Rightarrow$ Suma divizorilor săi din care se exclude numărul însuși este: S= $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2022} = \frac{7^{2023}-1}{6} < 7^{2023} \Rightarrow 7^{2023}$ este număr **deficient**.

Barem:

a)Intuiește când un număr nu este **deficient**. Arată că 6 nu este **deficient** Arată că 36 nu este **deficient**	1p 1p 1p
b) $D_{2023} = \{1; 7; 17; 119; 289; 2023\}$ Arată că 2023 este **deficient**.	1 p 1p
$D_{2023} = \{1; 7; 17; 119; 289; 2023\}$ Arată că 7^{2023} este **deficient**.	1 p 1p

3. a) (3p) Pe un rând, într-o livadă, se plantează 21 de arbuști, astfel încât, distanța, dintre oricare doi arbuști, este un număr natural. Dacă distanța dintre primul arbust și ultimul arbust este de 209 metri să se arate că avem distanțe egale, între arbuști alăturați..

b) (4p) Dacă același număr de arbuști s-ar planta pe un cerc, de centru O, și de rază suficient de mare, să se arate că există doi arbuști, în pozițiile A și B, pe cerc, asfel încât $\measuredangle AOB \leq 18^0$.

Vasile Solcanu , Bogdănești

Soluție

a) Notăm cu $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots, A_{21}$ pozițiile, arbuștilor pe teren, care sunt puncte coliniare, în această ordine. Avem 20 de distanțe între arbuști vecini, care sunt numere naturale nenule. Presupunem că nu avem distante egale. Fie:1,2,3,4,......,20, cele mai mici 20 de numere naturale, nenule, diferite. Atunci $A_1A_{21} = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots.. + A_{20}A_{21}$ =1+2+3+4+......+20=210 $>$ 209. Cum, distanțele sunt nenule, rezultă că avem distanțe egale între arbuști vecini.

b) Împărțim cercul în 20 de arce egale, fiecare, cu $360^0 : 20 = 18^0$ (cutiile). Deoarece noi avem 21 de arbuști (bilele),conform principiului cutiei, vor fi doi arbuști, ale căror poziții pe cerc le notăm cu A și B, pe același arc (cutie), cu $AB \le 18^0 \Rightarrow \measuredangle AOB = AB \le 18^0$.

Barem

a) $A_1A_{21} = A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{20}A_{21} =$ =1+2+3+4+......+20=210 $>$ 209 Concluzia	1p 1p 1p
b) Împărțim cercul în 20 de arce egale, fiecare, cu $360^0 : 20 = 18^0$ (cutiile) A și B sunt pe același arc	1 p 1p
$AB \le 18^0$ $\measuredangle AOB = AB \le 18^0$	1 p 1p

4. Fie mulțimea $A = \{2024; 20024; 200024; ....; 200....0024\}$ formată din 2024 de numere naturale, scrise în ordine crescătoare, unde fiecare număr, începând cu al doilea, are un zero în plus față de precedentul său .

a) (3p) Descompuneți în produs de factori primi numărul 2024 și calculați cel mai mare divizor comun, al numerelor mulțimii A.

b)(4p) Cu elementele mulțimii A, în ordinea dată, prin alăturare, formăm numărul natural $N = 202420024200024.......20000....0024$. Calculați numărul cifrelor numărului N și calculați suma primelor 2024 de cifre ale numărului N.

Dan Popescu, Suceava și Vasile Solcanu, Bogdănești

Soluție:

a) $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

$2000...024 = 2000...000 + 24$

$\left.\begin{array}{l} 2000...000 \vdots 8 \\ 24 \vdots 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 2000...024 \vdots 8$

Rezultă că toate numerele din mulțimea A sunt divizibile cu 8.

Dar, 20024 nu este divizibil cu 11, nici cu 23, divizori ai numărului 2024. Rezultă 11 și 23 nu pot fi divizori comuni pentru toate numerele din A. Deci, c.m.m.d.c = 8.

b) Al n-lea număr din mulțimea A este format din n de 0 și cifrele 2,2,4, deci are n + 3 cifre. Atunci, numărul de cifre ale lui N este:

$(1+3)+(2+3)+(3+3)+.......+(2024+3) = 1+2+3+.......+2024+3\cdot 2024 =$

$(1+2024)\cdot 2024 : 2 + 3\cdot 2024 = 2025\cdot 1012 + 6\cdot 1012 == 1012\cdot 2031 = 2055372.$

Suma cifrelor primelor n numere alăturate este: $(1+3)+(2+3)+(3+3)+.......+(n+3) = n(n+1):2+3n$

$n(n+1):2+3n \le 2024 \Rightarrow n(n+1)+6n \le 4048 \Rightarrow n(n+7) \le 4048 \Rightarrow n \le 60$.

Pentru $n = 60 \Rightarrow n(n+1):2+3n = 60\cdot 61:2+180 = 1830+180 = 2010$.

2024=2010+14.

Rezultă că a 2024-a cifră a numărului N este a 14-a cifră a celui de al 61-lea număr, din A, alăturat, care este 0, din grupul 2000...0 (13 de 0). Observăm că suma cifrelor fiecărui număr alăturat, din A, este: 2+0+2+4=8. Suma cifrelor căutată este, deci, $60\cdot 8 + 2 = 482$.

Barem

a) $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ Arată că toate numerele din A sunt divizibile cu 8 Dovedește că că c.m.m.d.c = 8.	1p 1p 1p
b) Găsește o regulă de a calcula numărul cifrelor numărului N Numărul cifrelor egală cu 2055372	1 p 1p
A 2024-a a numărului N este a 14-a cifră a celui de al 61-lea număr, din A, alăturat Suma cifrelor căutată este $60 \cdot 8 + 2 = 482$.	1 p 1p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**