CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a X-a
H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

1. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = log_3 \frac{x^2+|x|-a}{x^2-|x|-b}$.

a) (3p) Pentru $a = 2$ și $b = 6$ să se determine D, domeniul maxim de definiție al funcției.

b) (4p) Pentru $a = b = -1$ să se determine numerele întregi n, pentru care ecuația $f(x) = n$ are soluții reale și să se afle aceste soluții.

2. a) (4p) Să se arate că numerele complexe $z_1 = i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ și $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

b) (3p) Să se arate că dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, atunci z_1, z_2, z_3 reprezintă afixele vârurilor unui triunghi echilateral.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + x$.

a) (3p) Arătați că funcția este injectivă.

b) (4p) Demonstrați că, dacă $2^{sin^2 x} - 2^{cos^2 x} = cos\, 2\, x$, atunci $|tgx|$=1.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x - \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^x$.

a) (3p) Arătați că funcția este strict crescătoare.

b) (4p) Arătați că toate soluțiile reale ale ecuației $f^{2024}(x) = |f(x)|$ sunt numere întregi.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.