CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a IX-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

1. a) (3p) Demonstrați că $xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2$ pentru $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) (4p) Arătați că oricare x,y,z numere strict pozitive, are loc inegalitatea:

$$x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

2. a) (4p) Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică de ratie $r\ne0$. Să se calculeze $(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}^2+a_{k+1}a_k+a_k^2)$ și folosind eventual rezultatul să se calculeze următoarea sumă:

$$S_n=(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)+(a_3^2+a_3a_2+a_2^2)+\ldots+(a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2),$$ exprimând rezultatul în funcție de primul termen si de rație.

b) (3p) Sa se arate ca numarul $N=\underbrace{99...9}_{n\ cifre}4\underbrace{00...0}_{n\ cifre}9$ este pătrat perfect.

3. (7p) Demonstrați următoarea egalitate $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot3^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

4. a) **(3p)** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătați că, oricare ar fi Q un punct din plan, are loc relația $\overrightarrow{QG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}\right)$.

b) **(4p)** În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M,N,P astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{CD}.$ Arătați că punctele A,C și G - centrul de greutate al triunghiului MNP sunt coliniare.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.