OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. a) (3p) Determinaţi valoarea minimă a expresiei $x^2+3x+\frac{41}{4}$, oricare ar fi x număr real.

b) (4p) Dacă x este număr real, arătați că $\frac{1}{x^2+3x+\frac{41}{4}}+\frac{1}{x^2+x+3}+\frac{1}{x^2+4x+27}<\frac{1077}{2024}$.

Ana Marcela Popa, Rădăuți

Soluție:

a) Avem $x^2+3x+\frac{41}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+8$. Din $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$, pentru orice x număr real, deducem că

$x^2+3x+\frac{41}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+8\geq 8$. Valoarea minimă a expresiei $x^2+3x+\frac{41}{4}$ este 8.

b) Din a) avem $x^2+3x+\frac{41}{4}\geq 8$, cu egalitate dacă $x=-\frac{3}{2}$, deducem că $\frac{1}{x^2+3x+\frac{41}{4}}\leq\frac{1}{8}$.

Din $x^2+x+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geq\frac{11}{4}$, egalitatea are loc dacă $x=-\frac{1}{2}$. Deducem că $\frac{1}{x^2+x+3}\leq\frac{4}{11}$.

Din $x^2+4x+27=(x+2)^2+23\geq 23$, egalitatea are loc dacă $x=-2$. Deducem că $\frac{1}{x^2+4x+27}\leq\frac{1}{23}$.

Adunând inegalitățile și observând că egalitățile nu se pot realiza simultan, obținem

$\frac{1}{x^2+3x+\frac{41}{4}}+\frac{1}{x^2+x+3}+\frac{1}{x^2+4x+27}<\frac{1077}{2024}$.

Barem:

a) $x^2+3x+\frac{41}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+8$	1 p
Din $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$, pentru orice x număr real, deducem că $x^2+3x+\frac{41}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+8\geq 8$.	1 p
Valoarea minimă a expresiei $x^2+3x+\frac{41}{4}$ este 8.	1 p

b) Din $x^2+x+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geq\frac{11}{4}$, egalitatea are loc dacă x = $-\frac{1}{2}$. Deducem că $\frac{1}{x^2+x+3}\leq\frac{4}{11}$. (1)	1 p
Din $x^2 + 4x + 27 = (x + 2)^2 + 23 \geq 23$, egalitatea are loc dacă x = - 2. Deducem că $\frac{1}{x^2+4x+27}\leq\frac{1}{23}$. (2)	1 p
Din a), deducem că $\frac{1}{x^2+3x+\frac{41}{4}}\leq\frac{1}{8}$ (3), egalitatea are loc dacă x = $-\frac{3}{2}$. Observ că egalitățile din (1), (2) și (3) nu se pot realiza simultan.	1 p
Adunând inegalitățile (1), (2) și (3) pentru care egalitățile nu se pot realiza simultan, obținem $\frac{1}{x^2+3x+\frac{41}{4}}+\frac{1}{x^2+x+3}+\frac{1}{x^2+4x+27}<\frac{1077}{2024}$.	1 p

2. (7p) Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}$ și $x=2024^{a+b-2c}, y=2024^{b+c-2a}, z=2024^{c+a-2b}$. Demostrați că:

$$\sqrt{\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}}=1.$$

Gabriela Gogan, Mălini

Soluție:

Cum $x\cdot y\cdot z=2024^{a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b}=2024^0$, obținem $x\cdot y\cdot z=1$.

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}=$$

$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1$, de unde $\sqrt{\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}}=1$.

Barem:

$x\cdot y\cdot z=2024^{a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b}=2024^0$	1 p
$x\cdot y\cdot z=1$	1 p
$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}=$	1 p
Înlocuim $x\cdot y\cdot z=1$	1 p
$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=$	1 p
$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1$	1 p
$\sqrt{\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}}=1$	1 p

3. **(7p)** Se consideră cubul *ABCDA'B'C'D'*, centrul *O* al feței *ABCD*, iar punctele *M* și *N* sunt mijloacele muchiilor *AB*, respectiv *BC*. Arătați că dreptele *D'B, A'N, C'M și B'O* sunt concurente.

Supliment Gazeta Matematică Nr. 10/2023

Soluție:

D'B' || OB, fie D'B $\cap$ B'O=$\{P\}$ conform T.F.A. ΔPOB ~ ΔPB'D' $\Rightarrow \frac{OP}{B'P}=\frac{BP}{D'P}=\frac{OB}{D'B'}=\frac{1}{2}$ (1)

A'D' || BN, fie A'N $\cap$ D'B=$\{Q\}$ conform T.F.A. ΔQNB ~ ΔQA'D' $\Rightarrow \frac{QN}{QA'}=\frac{BQ}{D'Q}=\frac{NB}{A'D'}=\frac{1}{2}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{BP}{D'P}=\frac{BQ}{D'Q}$ și cum există un singur punct interior segmentului BD' care împarte segmentul în același raport $\Rightarrow$ P=Q $\Rightarrow$ D'B, B'O și A'N sunt concurente.

MB || D'C', fie D'B $\cap$ C'M=$\{T\}$ conform T.F.A. ΔTMB ~ ΔTC'D' $\Rightarrow \frac{TM}{TC'}=\frac{BT}{D'T}=\frac{MB}{C'D'}=\frac{1}{2}$ (3)

Din (1) și (3) $\Rightarrow \frac{BP}{D'P}=\frac{BT}{D'T}$ și cum există un singur punct interior segmentului BD' care împarte segmentul în același raport $\Rightarrow$ P=T $\Rightarrow$ D'B, B'O și C'M sunt concurente.

Deci, P=Q=T $\Rightarrow$ dreptele *D'B, A'N, C'M și B'O* sunt concurente.

Barem:

D'B' || OB, fie D'B $\cap$ B'O=$\{P\}$ conform T.F.A. ΔPOB ~ ΔPB'D' $\Rightarrow \frac{OP}{B'P}=\frac{BP}{D'P}=\frac{OB}{D'B'}=\frac{1}{2}$ (1)	2 p
A'D' || BN, fie A'N $\cap$ D'B=$\{Q\}$ conform T.F.A. ΔQNB ~ ΔQA'D' $\Rightarrow \frac{QN}{QA'}=\frac{BQ}{D'Q}=\frac{NB}{A'D'}=\frac{1}{2}$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{BP}{D'P}=\frac{BQ}{D'Q}$ și cum există un singur punct interior segmentului BD' care împarte segmentul în același raport $\Rightarrow$ P=Q $\Rightarrow$ D'B, B'O și A'N sunt concurente	2 p
MB || D'C', fie D'B $\cap$ C'M=$\{T\}$ conform T.F.A. ΔTMB ~ ΔTC'D' $\Rightarrow \frac{TM}{TC'}=\frac{BT}{D'T}=\frac{MB}{C'D'}=\frac{1}{2}$ (3) Din (1) și (3) $\Rightarrow \frac{BP}{D'P}=\frac{BT}{D'T}$ și cum există un singur punct interior segmentului BD' care împarte segmentul în același raport $\Rightarrow$ P=T $\Rightarrow$ D'B, B'O și C'M sunt concurente	2 p
P=Q=T $\Rightarrow$ dreptele *D'B, A'N, C'M și B'O* sunt concurente.	1 p

4. Pe planul rombului *ABCD*, cu $AC = 8\sqrt{3}$ *cm* și $\sphericalangle ABC = 120^o$, se ridică perpendicularele *BM* și *DN*, situate de o parte și de alta a planului *(ABC)*, *BM = 6cm* și *DN = 8cm*.

(3p) a) Arătați că *AC* este perpendiculară pe planul *(MON)*, unde *O* este punctul de intersecție al diagonalelor rombului *ABCD*.

(4p) b) Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele *MC* și *AN*.

Gabriela Sascău, Rădăuți

Soluție: **a)** Cum ABCD romb $\Rightarrow DB \perp AC$. Din $ND \perp (ABC)$, $DO \perp AC$, DO, $AC \subset (ABC)$, conform teoremei celor trei perpendiculare $NO \perp AC$. Analog, $MB \perp (ABC)$, $BO \perp AC$, BO, $AC \subset (ABC)$, conform teoremei celor trei perpendiculare $MO \perp AC$.

Deci, $NO \perp AC$, $MO \perp AC$ și $NO \cap MO = \{O\} \Rightarrow AC \perp (MON)$.

b) ABCD romb $\Rightarrow$ BD bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABD = 120^o:2=60^o$, iar AD=AB, deci ΔABD este echilateral cu înălțimea AO=AC:2= $4\sqrt{3}$ cm, deci AB = 8cm.

Construim $PA \perp (ABC)$, PA = MB. Cum $MB \perp (ABC)$, $PA \perp (ABC) \Rightarrow PA \parallel MB$ și PA = MB, deci PMBA paralelogram $\Rightarrow$ PM=AB și $PM \parallel AB$ și cum ABCD romb $\Rightarrow$ AB=CD, $AB \parallel CD$, deci, PM=CD și $PM \parallel CD \Rightarrow$ PMCD paralelogram $\Rightarrow PD \parallel MC \Rightarrow \sphericalangle(MC, AN) = \sphericalangle(PD, AN) = \sphericalangle DQN$, unde $PD \cap AN = \{Q\}$. Din $DN \perp (ABC)$, $PA \perp (ABC) \Rightarrow PA \parallel DN$ și în ΔQDN conform T.F.A. $\Delta QPA \sim \Delta QDN \Rightarrow \frac{QP}{QD} = \frac{QA}{QN} = \frac{PA}{DN} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{QP}{PD} = \frac{QA}{AN} = 3$ (1). Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ΔPAD și $\Delta AND \Rightarrow$ PD=10 cm, AN= $8\sqrt{2}$ cm, iar conform (1) avem QP=30 cm, QA= $24\sqrt{2}$ cm. Cum ΔAND dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAN=45^o$, cum $\sphericalangle PAD=90^o$ $\Rightarrow \sphericalangle QAP=45^o$, deci $A_{QAP} = PA \cdot QA \cdot \sin \sphericalangle QAP:2=72$ cm^2, de unde $\sin \sphericalangle PQA = \frac{2A_{APQ}}{PQ \cdot AQ} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Barem:

a) ABCD romb $\Rightarrow DB \perp AC$ $ND \perp (ABC)$, $DO \perp AC$, DO, $AC \subset (ABC)$, conform teoremei celor trei perpendiculare $NO \perp AC$	1 p
$MB \perp (ABC)$, $BO \perp AC$, BO, $AC \subset (ABC)$, conform teoremei celor trei perpendiculare $MO \perp AC$	1 p
$NO \perp AC$, $MO \perp AC$, $NO \cap MO = \{O\} \Rightarrow AC \perp (MON)$	1 p
b) ABCD romb $\Rightarrow$ BD bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABD = 120^o:2=60^o$, iar AD=AB, deci ΔABD este echilateral cu înălțimea AO=AC:2= $4\sqrt{3}$ cm, deci AB = 8cm.	1 p
Construim $PA \perp (ABC)$, PA = MB. Cum $MB \perp (ABC)$, $PA \perp (ABC) \Rightarrow PA \parallel MB$ și PA = MB, deci PMBA paralelogram $\Rightarrow$ PM=AB și $PM \parallel AB$ și cum ABCD romb $\Rightarrow$ AB=CD, $AB \parallel CD$, deci, PM=CD și $PM \parallel CD \Rightarrow$ PMCD paralelogram $\Rightarrow PD \parallel MC \Rightarrow \sphericalangle(MC, AN) = \sphericalangle(PD, AN) = \sphericalangle DQN$, unde $PD \cap AN = \{Q\}$	1 p
$DN \perp (ABC)$, $PA \perp (ABC) \Rightarrow PA \parallel DN$ și în ΔQDN conform T.F.A. $\Delta QPA \sim \Delta QDN \Rightarrow$ $\frac{QP}{QD} = \frac{QA}{QN} = \frac{PA}{DN} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{QP}{PD} = \frac{QA}{AN} = 3$ (1). Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ΔPAD și $\Delta AND \Rightarrow$ PD=10 cm, AN= $8\sqrt{2}$ cm, iar conform (1) avem QP=30 cm, QA= $24\sqrt{2}$ cm.	1 p
ΔAND dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAN=45^o$, cum $\sphericalangle PAD=90^o \Rightarrow \sphericalangle QAP=45^o$. $A_{QAP} = PA \cdot QA \cdot \sin \sphericalangle QAP:2=72$ cm^2, de unde $\sin \sphericalangle PQA = \frac{2A_{APQ}}{PQ \cdot AQ} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.	1 p

Notă: **Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.**