

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024**  
**CLASA a XI-a**

**H1**

**Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

**1.** Se dă matricea  $A(a) = I_2 + aB$ , unde  $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**a) (2p)** Să se arate că  $A(x) \cdot A(y) = A(xy + x + y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**b) (4p)** Să se calculeze  $A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2024)$ .

**c) (1p)** Să se calculeze  $(A(1))^{2024}$ .

**2. a) (3p)** Să se arate că oricare ar fi matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  are loc relația

$$A^2 - (a + d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_2 = O_2.$$

**b) (4p)** Se consideră matricea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  astfel încât  $\det A = 9$ . Arătați că  $\det(A^2 + 5A + 9I_2)$  este un pătrat perfect.

**3. (7p)** Se consideră funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 2024}$ , unde  $D$  este domeniul maxim de definiție al funcției,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0, b > 0$ . Știind că asimptota spre  $+\infty$  este o dreaptă paralelă cu dreapta de ecuație  $y = 4x - 2023$ , iar spre  $-\infty$  graficul funcției admite asimptota orizontală de ecuație  $y = -2$ , arătați că numerele  $a, b, c$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**4.** Evoluția unei familii de suricate, pe parcursul a 10 ani, este modelată prin funcția

$$P: [0; 10] \rightarrow \mathbb{R}, P(t) = \begin{cases} \frac{a}{(t-3)^2+1}, & t \in [0; 4] \\ \frac{b}{t-1}, & t \in (4; 10] \end{cases}, \text{ unde } a, b \text{ sunt constante reale pozitive.}$$

**a) (3p)** Aflați  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că în cel de-al doilea an numărul suricatelor este egal cu 15 și că funcția este continuă.

**b) (4p)** Pentru  $a = 30$  și  $b = 45$ , determinați intervalul de timp în care numărul suricatelor este mai mare sau egal decât 15.

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**

**3. Timp de lucru 3 ore.**