

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024

CLASA a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 4(x + y)^2 + 1$.
- a) (2p) Arătați că $0 * 1 = -3$.
- b) (2p) Arătați că $x * (-1) \leq 2x$, pentru orice număr real x .
- c) (3p) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.
2. (7p) Pe mulțimea $M = (0, \infty)$ se dă legea de compoziție asociativă "*" cu proprietatea că $x * y * z = \frac{xyz}{xy + yz + zx}$, pentru orice $x, y, z \in M$. Arătați că $x * y = \frac{xy}{x + y}$, pentru orice $x, y \in M$.
3. (7p) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n-1} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1 - x^{2n}}} dx$.
4. (7p) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue, cu $g(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ și $\int_a^b f(x) dx = -\int_a^b g(x) dx$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim $I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)} dx$ și $J_n = I_{2n+1} + I_{2n}$. Arătați că toți termenii șirului $(J_n)_{n \geq 1}$ au același semn.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.