CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a XII-a
H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiecte propuse de *Marinela Cristina Cimpoeșu*, Suceava

1. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se introduce legea $*$ definită astfel:

$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$, pentru orice $x,y\in G$.

a) (1p) Arătați că $*$ este lege de compoziție internă;

b) (4p) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian;

c) (2p) Determinați numerele reale a și b astfel încât funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to G$, dată prin $f(x)=\sqrt{ax+b}$, să fie izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

Soluție: **a)** $\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}>1\Leftrightarrow x^2y^2-x^2-y^2+2>1\Leftrightarrow(x^2-1)(y^2-1)>0$, adevărat deoarece $x>1$ și $y>1$. Așadar, pentru orice $x,y\in G\Rightarrow x*y\in G$, deci $*$ este lege de compoziție internă.

b) Se verifică, prin calcul imediat, că $x*y=y*x$, pentru orice $x,y\in G$, adică legea $*$ este comutativă.

Se verifică, prin calcul, că $(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice $x,y,z\in G$, adică legea $*$ este asociativă.

Se arată că există $e\in G$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice $x\in G$. Din comutativitate rezultă că $x*e=e*x$, pentru orice $x\in G$, iar din $x*e=x$, pentru orice $x\in G$, rezultă că $\sqrt{x^2e^2-x^2-e^2+2}=x$. Prin ridicare la pătrat și efectuând calculele aferente vom găsi că $x^2e^2-x^2-e^2+2=x^2\Leftrightarrow(x^2-1)(e^2-2)=0$. Deoarece $x>1$, rezultă că $e=\pm\sqrt{2}$. Convine doar $e=\sqrt{2}$ Adică legea admite ca element neutru pe $e=\sqrt{2}$.

Pentru orice $x\in G$ se arată că există $x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$. Din comutativitate rezultă că $x*x'=x'*x$, iar din $x'*x=e$ rezultă că $\sqrt{(x')^2x^2-(x')^2-x^2+2}=e$. Prin ridicare la pătrat și efectuând calculele aferente vom găsi că $(x')^2(x^2-1)=x^2$. Deoarece $x>1$, rezultă că $x'=\pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Convine doar $x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Adică legea admite ca elemente simetrizabile, numerele de forma $x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

c) Din faptul că f este izomorfism rezultă că f este morfism și bijecție.

f este morfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$ dacă și numai dacă (1) $f(xy)=f(x)*f(y)$ pentru orice $x,y\in G$. Relația (1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{axy+b}=\sqrt{(ax+b)(ay+b)-(ax+b)-(ay+b)+2}$. Prin ridicare la pătrat și efectuând calculele aferente vom găsi că $axy+b=a^2xy+(ab-a)x+(ab-a)y+b^2-2b+2$.

Din identificarea coeficienților nedeterminați va rezulta că $a=b=1$. Rezultă că $f(x)=\sqrt{x+1}$. Se verifică imediat că f este bijecție.

Barem

a) Verificare $*$ este lege de compoziție internă	1 p
b) Verificare asociativitate Verificare comutativitate Determină elementul neutru $e=\sqrt{2}$ Determină elementele simetrizabile $x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, pentru orice $x\in G$	1 p 1 p 1 p 1 p
c) f este morfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$ dacă și numai dacă (1) $f(xy)=f(x)*f(y)$ pentru orice $x,y\in G$. Relația (1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{axy+b}=\sqrt{(ax+b)(ay+b)-(ax+b)-(ay+b)+2}$. De unde vom găsi că $axy+b=a^2xy+(ab-a)x+(ab-a)y+b^2-2b+2$. Găsește $a=b=1$ și verifică f este bijecție	1 p 1 p

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea $H=\{A^n,\ n\in\mathbb{N}^*\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

a) (2p) Determinați mulțimea H;

b) (2p) Arătați că H este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor;

c) (3p) Determinați numerele naturale n și x cu proprietatea că $A^n=xI_3$.

Soluție: **a)** Se determină $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ și $A^3=I_3$. Deci $H=\{A,A^2,I_3\}$.

b) Prin calcul direct, se arată că produsul a oricăror două matrice din mulțimea H este tot o matrice din H. Așadar, H este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Pentru $n=1$, relația $A^n=xI_3$ devine $A=xI_3$ care nu e verificată. Pentru $n=2$, relația $A^n=xI_3$ devine și $A^2=xI_3$ care nu e verificată. Pentru $n=3$, relația $A^n=xI_3$ devine și $I_3=xI_3$ care este verificată doar când $x=1$.

Barem

a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ și $A^3=I_3$ $H=\{A,A^2,I_3\}$	1 p 1 p

b) se arată că produsul a oricăror două matrice din mulțimea H este tot o matrice din H. Așadar, H este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor	2 p
c) Pentru $n=1$, relația $A^n = xI_3$ devine $A = xI_3$ care nu e verificată. Pentru $n=2$, relația $A^n = xI_3$ devine și $A^2 = xI_3$ care nu e verificată. Pentru $n=3$, relația $A^n = xI_3$ devine și $I_3 = xI_3$ care este verificată doar când $x=1$.	1 p 1 p 1 p

3. a) (3p) Arătați că există numerele reale m și n astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\dfrac{mx+n}{x+2}$ să verifice relația $f(x)+f'(x)=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$;

b) (4p) Calculați $\int \dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$, unde $x\in(-2,+\infty)$.

Soluție: **a)** $f'(x)=\dfrac{2m-n}{(x+2)^2}$. Atunci $f(x)+f'(x)=\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \dfrac{mx+n}{x+2}+\dfrac{2m-n}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \Leftrightarrow$ $mx^2+(2m+n)x+2m+n \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-2 \end{cases}$.

b) $\int \dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = \int\left[f(x)+f'(x)\right]e^x dx = \int f(x)e^x dx + \int f'(x)e^x dx = \int f(x)e^x dx + f(x)e^x$ $-\int f(x)e^x dx = f(x)e^x + C = \dfrac{x-2}{x+2}e^x + C$.

Barem

a) $f'(x)=\dfrac{2m-n}{(x+2)^2}$, unde $x\in(-2,+\infty)$ $f(x)+f'(x)=\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \dfrac{mx+n}{x+2}+\dfrac{2m-n}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \Leftrightarrow mx^2+(2m+n)x+2m+n$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-2 \end{cases}$	1 p 1 p 1 p
b) din **a)** rezultă că $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$ $\int \dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = \int\left[f(x)+f'(x)\right]e^x dx =$ $= \int f(x)e^x dx + \int f'(x)e^x dx = \int f(x)e^x dx + f(x)e^x - \int f(x)e^x dx =$ $= f(x)e^x + C = \dfrac{x-2}{x+2}e^x + C$	1 p 1 p 1 p 1 p

4. 4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}2^x & ,x<0\\ \sqrt{x}+1, & x\geq 0\end{cases}$.

a) (2p) Arătați că f admite primitive pe mulțimea numerelor reale;

b) (3p) Calculați $\int_{-4}^{4} f(x)dx$;

c) (2p) Folosind eventual inegalitatea $\sqrt{x}\geq x, \forall x\in[0,1]$, arătați că $\int_0^1 f^{2024}(x)\,dx \geq \frac{2^{2025}-1}{2025}$.

Soluție: **a)** Se arată că f este funcție continuă pe mulțimea numerelor reale, deci f admite primitive pe mulțimea numerelor reale.

b) $\int_{-4}^{4} f(x)dx=\int_{-4}^{0} 2^x dx+\int_0^4\left(\sqrt{x}+1\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-4}^{0}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4+x\Big|_0^4=\frac{1}{16\ln 2}+\frac{28}{3}$.

c) $\int_0^1 f^{2024}(x)dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^{2024}dx\geq\int_0^1(x+1)^{2024}dx=\frac{2^{2025}-1}{2025}$

Barem

a) Arată că f este funcție continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$	2 p
b) $\int_{-4}^{4} f(x)dx=\int_{-4}^{0} 2^x dx+\int_0^4\left(\sqrt{x}+1\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big\|_{-4}^{0}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big\|_0^4+x\Big\|_0^4=$	2 p
$=\frac{15}{16\ln 2}+\frac{28}{3}$	1 p
c) $\int_0^1 f^{2024}(x)dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^{2024}dx\geq\int_0^1(x+1)^{2024}dx=$	1 p
$=\frac{2^{2025}-1}{2025}$	1 p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**