CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a XII-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. (7p) Se consideră funcţia, $f:\mathrm{R}\to R$, $f(x)=\begin{cases} x^3, x\le 0 \\ x+\sqrt{x}, x>0 \end{cases}$.

Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe R şi calculaţi apoi primitiva cu proprietatea că $F(1)=2$.

Moisuc Niculina Mihaela, Rădăuți

Barem

Cum orice funcție continuă admite primitive se demonstrează continuitatea funcției pe R	**1p**
$\int f(x)dx=\begin{cases} \frac{x^4}{4}+C_1, x\le 0 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C_2, x>0 \end{cases}$	**3 p**
$\int f(x)dx=\begin{cases} \frac{x^4}{4}+C, x\le 0 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C, x>0 \end{cases}$	**2p**
Se impune ca $F(1)=2\Rightarrow\int f(x)dx=\begin{cases} \frac{x^4}{4}+\frac{5}{6}, x\le 0 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\frac{5}{6}, x>0 \end{cases}$.	**1 p**

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to R,\ f(\mathrm{x})=\ln\mathrm{x}+\frac{1}{x}$.

a) (2p) Să se determine $a,b\in R$ știind că funcția $F:(1,+\infty)\to R, \mathrm{F(x)}=(\mathrm{x}+\mathrm{a})\ln\mathrm{x}+\mathrm{bx}+2024$ este o primitivă a funcției f.

b) (1p) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(1,+\infty)$.

c) (4p) Să se calculeze $\int f(\mathrm{e}^x)\cdot x dx$.

Niță Daniela Elena, Suceava

Barem

a)F primitivă a funcției f $\Rightarrow F'(\mathrm{x})=\mathrm{f(x)}\Rightarrow \ln\mathrm{x}+\frac{x+a}{x}+b=\ln x+\frac{1}{x}\Rightarrow$	**1p**
$\frac{x+a}{x}+b=\frac{1}{x}\Rightarrow(1+b)x+a=1, \forall x\in(1,+\infty)\Rightarrow \mathrm{a}=1, \mathrm{b}=-1$	**1p**

b) Fie $F:(1,+\infty)\to R$ o primitivă a funcției f atunci F este derivabilă, $F'(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ și $F''(\mathrm{x})=\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ $F''(\mathrm{x})=\dfrac{x-1}{x^2}>0, \forall x\in(1,+\infty)$ deci F convexă pe $(1,+\infty)$	**1p**
$\int f(\mathrm{e}^x)\cdot xdx=\int\left(\ln e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)\cdot xdx$ c) $=\int\left(x+e^{-x}\right)\cdot xdx=\int x^2dx+\int e^{-x}\cdot xdx=\dfrac{x^3}{3}-e^{-x}\cdot x+\int e^{-x}dx$ $=\dfrac{x^3}{3}-e^{-x}\cdot x-e^{-x}+C$	**1p** **2p** **1p**

3. Pe mulțimea $G=(-4,4)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{16(x+y)}{16+xy}$ care formează cu G o structură de grup abelian.

a) (2p) Calculați $\left(-\dfrac{1}{10}\right)\circ\left(-\dfrac{1}{9}\right)\circ\ldots\circ\dfrac{1}{9}\circ\dfrac{1}{10}$.

b) (5p) Știind că funcția $f:G\to R$ este primitiva funcției $h:(-4,4)\to R, h(x)=\dfrac{1}{16-x^2}$ a cărei grafic conține punctul $A\left(2,\dfrac{\ln 3}{8}\right)$, demonstrați că f este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(\mathrm{R},+)$.

Ghelbere Mihaela, Câmpulung Moldovenesc

Barem:

a) $(-x)\circ x=0, \forall x\in(-4,4)$ $(G,\circ)$ este grup abelian, deci legea de compoziție este asociativă și comutativă, de unde rezultă că $\left(-\dfrac{1}{10}\right)\circ\left(-\dfrac{1}{9}\right)\circ\ldots\circ\dfrac{1}{9}\circ\dfrac{1}{10}=\left(\left(-\dfrac{1}{10}\right)\circ\dfrac{1}{10}\right)\circ\left(\left(-\dfrac{1}{9}\right)\circ\dfrac{1}{9}\right)\circ\ldots\left((-1)\circ 1\right)=\underbrace{0\circ 0\circ\ldots\circ 0}_{de 10 ori}=0.$	**2p**
b) $\int\dfrac{1}{16-x^2}dx=-\int\dfrac{1}{x^2-16}dx=-\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{4-x}{4+x}+\mathrm{C}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{4-x}{4+x}+k, k\in R.$ $f(2)=\dfrac{\ln 3}{8}\Rightarrow -\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{3}+k=\dfrac{\ln 3}{8}\Rightarrow k=0\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{4-x}{4+x}.$	**1p**
$f(x\circ y)=-\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{16+xy-4x-4y}{16+xy+4x+4y}.$ $f(x)+f(y)=-\dfrac{1}{8}\left(\ln\dfrac{4-x}{4+x}+\ln\dfrac{4-y}{4+x}\right)=-\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{16+xy-4x-4y}{16+xy+4x+4y}.$ f este morfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathrm{R},+)$. **(1)**	**2p**
f este primitiva funcției $h\Rightarrow f'(x)=h(x), \forall x\in(-4,4)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{16-x^2}.$ Deoarece $x\in(-4,4)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$ este funcție strict crescătoare pe $(-4,4)\Rightarrow f$ este funcție injectivă. **(2)**	**1p**

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to -4\\x>-4}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\x<4}} f(x)=\infty$ și f este funcție continuă pe $(-4,4)$ rezultă că $\operatorname{Im} f=R \Rightarrow f$ este funcție surjectivă. **(3)** Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă că f este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(\mathrm{R},+)$.	**1p**

4. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{aI_2+bA / a,b\in Z\}$ unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) (2p) Demonstrați că G este parte stabilă a mulțimii $\mathrm{M}_2(R)$ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

b) (5p) Determinați matricele $X,Y\in G, X\neq O_2, Y\neq O_2$ cu $X\cdot Y=O_2$ unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Niță Daniela Elena și Țui Andreea, Suceava

Barem :

a) $X=aI_2+bA, Y=cI_2+dA \Rightarrow X+Y=(a+c)I_2+(b+d)A\in G$	**0,5p**
Se observă că $A^2=A$ $X=aI_2+bA, Y=cI_2+dA \Rightarrow X\cdot Y=acI_2+(ad+bc+bd)A\in G$	**0,5 p** **1p**
b) $X=aI_2+bA, Y=cI_2+dA \Rightarrow X\cdot Y=acI_2+(ad+bc+bd)A=0I_2+0A$ $\Rightarrow ac=0$ și $ad+bc+bd=0$ $a=0\Rightarrow b(\mathrm{c}+\mathrm{d})=0, \mathrm{b}\neq 0\Rightarrow \mathrm{c}+\mathrm{d}=0\Rightarrow \mathrm{d}=-\mathrm{c}\Rightarrow \mathrm{X}=bA, Y=cI_2-cA$ $c=0\Rightarrow d(\mathrm{a}+\mathrm{b})=0, \mathrm{d}\neq 0\Rightarrow \mathrm{b}=-\mathrm{a}\Rightarrow \mathrm{X}=\mathrm{aI}_2-aA, Y=dA$	**1p** **2p** **2p**

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**