CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*"
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a X-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se consideră expresia $E(x)=\log_2\frac{3+x}{3-x}$, $x\in(-3;3)$.

a) (3p) Arătați că $E(x)+E(y)=E\left(\frac{9x+9y}{9+xy}\right)$.

b) (4p) Calculați suma:

$$E\left(-\frac{1}{2024}\right)+E\left(-\frac{1}{2023}\right)+E\left(-\frac{1}{2022}\right)+...+E\left(\frac{1}{2022}\right)+E\left(\frac{1}{2023}\right)+E\left(\frac{1}{2024}\right)$$ și arătați că este un număr natural.

Lechovolea Ana-Maria, Câmpulung Moldovenesc

Barem

a. $E\left(\frac{9x+9y}{9+xy}\right)=\log_2\frac{3+\frac{9x+9y}{9+xy}}{3-\frac{9x+9y}{9+xy}}=\log_2\frac{27+3xy+9x+9y}{27+3xy-9x-9y}=\log_2\frac{9+xy+3x+3y}{9+xy-3x-3y}=$ (1p) $\log_2\frac{(3+x)(3+y)}{(3-x)(3-y)}=\log_2\frac{3+x}{3-x}+\log_2\frac{3+y}{3-y}=E(x)+E(y)$ (2p)	3 p
b) Se arată că $E(x)+E(-x)=E(0)$	2 p
Suma dată este egală cu $E(0)=\log_2 1=0\in\mathbb{N}$.	2 p

2. (7p) Se consideră expresia $E(x)=\left(x^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{8}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1)$.

Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $E(n)\geq 2024$

Moisuc Niculina Mihaela, Rădăuți

Soluție:

Expresia devine: $E(x)=\left(x^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{8}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1)==\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1)$

$=\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1)=(x-1)(x+1)=x^2-1$, pentru care $n^2\geq 2025$ și soluția problemei este $n=45$.

Barem

E(x)=$\left(\left(x^{\frac{1}{8}}\right)^2-1^2\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1)$=$\left(\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2-1^2\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1)$=	4 p
=$\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1)=(x-1)(x+1)=x^2-1$	2 p
$E(n)=n^2-1 \Rightarrow n^2 \geq 2025$ și soluția problemei este $n=45$.	1p

3. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Demonstrați că dacă $\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} \in \mathbb{R}$, atunci $|z|=1$.

Pogorevici Aura Loreta, Fălticeni

Barem

$\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}=\overline{\left(\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}\right)} \Leftrightarrow \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}=\frac{\overline{z^2}-\overline{z}+1}{\overline{z^2}+\overline{z}+1} \Leftrightarrow$	2p
$\Leftrightarrow z^2\overline{z^2}+z^2\overline{z}+z^2-z\overline{z^2}-z\overline{z}-z+\overline{z^2}+\overline{z}+1=$ $=z^2\overline{z^2}-z^2\overline{z}+z^2+z\overline{z^2}-z\overline{z}+z+\overline{z^2}-\overline{z}+1 \Leftrightarrow$	1p
$\Leftrightarrow z^2\overline{z}-z\overline{z^2}-z+\overline{z}=-z^2\overline{z}+z\overline{z^2}+z-\overline{z} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z-\overline{z}+z\overline{z^2}-z^2\overline{z}=0 \Leftrightarrow (z-\overline{z})-z\overline{z}(z-\overline{z})=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (z-\overline{z})(1-z\overline{z})=0$	2p
Dar $z-\overline{z} \neq 0 \Rightarrow 1-z\overline{z}=0 \Rightarrow z\overline{z}=1 \Rightarrow \|z\|^2=1 \Rightarrow \|z\|=1$	2p

4. Andrei și Ioana joacă un joc astfel: Ioana trebuie să aleagă un număr natural n iar Andrei un număr real stict pozitiv, x. Știind că A=13-$\log_3 x^2$ sau B=$\log_9 27x$ este cel puțin egal cu n și Andrei îi dăruiește Ioanei o cutie cu 2^n bomboane, ce număr trebuie să aleagă Ioana pentru a primi cât mai multe bomboane?

Ignat Letiția, Gura Humorului

Barem

A=13-$\log_3 x^2 \geq n \Rightarrow \log_3 x^2 \leq 13-n \Rightarrow x^2 \leq 3^{13-n} \Rightarrow x \leq 3^{\frac{13-n}{2}}$	2p
B=$\log_9 27x \geq n \Rightarrow 27x \geq 9^n \Rightarrow x \geq 9^{n-3} \Rightarrow x \geq 3^{2n-6}$	2p
Deoarece x$\in \left(0,3^{\frac{13-n}{2}}\right] \cup \left[3^{2n-6},\infty\right)=(0,\infty) \Rightarrow 3^{2n-6} \leq x \leq 3^{\frac{13-n}{2}}$.	1p
Deci 2n-6$\leq \frac{13-n}{2} \Rightarrow$ 4n-12$\leq 13-n \Rightarrow$5n$\leq 25 \Rightarrow n \leq 5$. Deoarece funcția f : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, f(n)=$2^n$ este crescătoare, Ioana va alege valoarea n=5 pentru a primi 2^5 =32 bomboane.	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.