

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a IX-a

H2 Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. a) (3p) Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2024}}$. Demonstrați că $s \in (1, 2)$.

b) (4p) Calculați suma: $S = \sum_{k=1}^n k(2^k - 1)$.

Mihaela Niculina Moisuc, Rădăuți

Soluție: a) $s = 2 - \frac{1}{2^{2024}} \Rightarrow s \in (1, 2)$

b) Suma este : $S = \sum_{k=1}^n k \cdot (2^k - 1) = 1 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot (2^2 - 1) + 3 \cdot (2^3 - 1) + \dots + n \cdot (2^n - 1) =$
 $= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n - 1 - 2 - \dots - n$, apoi diferența
 $S - 2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} =$
 $= \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}$, astfel, $S = (n-1) \cdot 2^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} + 2$.

Barem

a) $s = 2 - \frac{1}{2^{2024}} \Rightarrow s \in (1, 2)$	3 p
b) $S = \sum_{k=1}^n k \cdot (2^k - 1) = 1 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot (2^2 - 1) + 3 \cdot (2^3 - 1) + \dots + n \cdot (2^n - 1)$ $S - 2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}$	2 p
$S = (n-1) \cdot 2^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} + 2$	2 p

2. (7p) Demonstrați că pentru orice număr real x și pentru orice număr natural nenul n are loc egalitatea:

$$\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x] + [2x] + [3x] + \dots + [nx]}{n} \right] = 0, \text{ unde } [x] \text{ este partea întreagă a lui } x.$$

Dana Busuioc, Suceava

Soluție: $\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x] + [2x] + [3x] + \dots + [nx]}{n} \right] = \left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x - \{x\} + 2x - \{2x\} + \dots + nx - \{nx\}}{n} \right]$

$$= \left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{n(n+1)x}{2n} + \frac{\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\}}{n} \right] = \left[\frac{\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\}}{n} \right] = 0, \text{ deoarece}$$

$$\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \dots, \{nx\} \in [0,1) \Rightarrow \frac{\{x\} + \{2x\} + \{3x\} + \dots + \{nx\}}{n} \in [0,1) .$$

Barem

$\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x] + [2x] + [3x] + \dots + [nx]}{n} \right] = \left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x - \{x\} + 2x - \{2x\} + \dots + nx - \{nx\}}{n} \right]$	4 p
$= \left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{n(n+1)x}{2n} + \frac{\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\}}{n} \right] = \left[\frac{\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\}}{n} \right] = 0$	
$\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \dots, \{nx\} \in [0,1) \Rightarrow \frac{\{x\} + \{2x\} + \{3x\} + \dots + \{nx\}}{n} \in [0,1)$	3 p

3. (7p) Un elev își propune ca pentru pregătirea concursului de matematică, să lucreze în fiecare zi cu 5 minute în plus față de ziua precedentă. Știind că mai sunt 15 zile până la concurs și că în ultima zi a lucrat două ore, calculați cât timp a acordat, în total, în cele 15 zile, pregătirii concursului de matematică.

Mara Moroșan, Suceava

Soluție: Notăm t_1 numărul de minute de lucru din prima zi

$$t_{15} = t_1 + 14 \cdot 5 \Rightarrow t_{15} = t_1 + 70 = 120 \Rightarrow t_1 = 50$$

$$T = t_1 + t_2 + \dots + t_{15} = \frac{(t_1 + t_{15})15}{2} = 1275 \text{ (minute)}$$

$$T = 21 \text{ ore și } 15 \text{ minute}$$

Barem

$t_{15} = t_1 + 14 \cdot 5 \Rightarrow t_{15} = t_1 + 70 = 120 \Rightarrow t_1 = 50$	3 p
$T = t_1 + t_2 + \dots + t_{15} = \frac{(t_1 + t_{15})15}{2} = 1275 \text{ (minute)}$ $T = 21 \text{ ore și } 15 \text{ minute}$	4 p

4. Pe laturile (AB) , (BC) , (CD) și (DA) ale patrulaterului convex $ABCD$ se consideră punctele M , N , P , Q astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PD} = \frac{QD}{QA} = a$.

a) (3p) Dacă $a=1$ și O este un punct oarecare în plan, demonstrați că $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$

b) (4p) Demonstrați că : $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{DM} = \vec{0}$

Mara Moroșan, Suceava

Soluție: a) $a=1 \Rightarrow M, N, P, Q$, mijloacele laturilor (AB) , (BC) , (CD) respectiv $(DA) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \text{ și } \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

b) $M \in (AB)$ și

$$\frac{MA}{MB} = a \Rightarrow \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{a}{a+1}\overrightarrow{AB} \text{ și analoagele.}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{AB} = \\ &= \frac{2a+1}{a+1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Barem

<p>a) $a=1 \Rightarrow M, N, P, Q$, mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD) respectiv $(DA) \Rightarrow$</p> $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \text{ și } \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \Rightarrow$ $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$	3 p
<p>b) $M \in (AB)$ și</p> $\frac{MA}{MB} = a \Rightarrow \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{a}{a+1}\overrightarrow{AB} \text{ și analoagele.}$	2 p
$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{AB} = \\ &= \frac{2a+1}{a+1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0} \end{aligned}$	2 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.