CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a XI-a

H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1.Considerăm matricea: $A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

a) **(2p)** Să se arate că: $A^3+8\cdot I_2=O_2$

b) **(3p)** Determinați inversa matricei A^5

c) **(2p)** Determinați A^{2025}

prof. Lucaci Aurica

Soluție:

a) Prin calcul obținem: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=-8\cdot I_2\Rightarrow A^3+8\cdot I_2=O_2$.

b) Folosind relaţia de la punctul a) obţinem:

$$A^6=\left(A^3\right)^2=\left(-8\cdot I_2\right)^2=64\cdot I_2\Rightarrow A^5\cdot\left(\frac{1}{64}\cdot A\right)=\left(\frac{1}{64}\cdot A\right)\cdot A^5=I_2\Rightarrow\left(A^5\right)^{-1}=\frac{1}{64}A=\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & \frac{-\sqrt{3}}{64} \\ \frac{\sqrt{3}}{64} & \frac{1}{64} \end{pmatrix}.$$

c) $A^{2025}=\left(A^3\right)^{675}=\left(-8\cdot I_2\right)^{675}=-2^{2025}\cdot I_2=\begin{pmatrix} -2^{2025} & 0 \\ 0 & -2^{2025} \end{pmatrix}$.

Barem

a)	Demonstrează că $A^2=\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$	1 p
	Demonstrează că $A^3+8\cdot I_2=O_2$	1p
b)	Demonstrează că $A^5\cdot\left(\frac{1}{64}\cdot A\right)=\left(\frac{1}{64}\cdot A\right)\cdot A^5=I_2$	2p
	Demonstrează că $\left(A^5\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & \frac{-\sqrt{3}}{64} \\ \frac{\sqrt{3}}{64} & \frac{1}{64} \end{pmatrix}$	1p
c)	Demonstrează că $A^{2025}=\begin{pmatrix} -2^{2025} & 0 \\ 0 & -2^{2025} \end{pmatrix}$	2p

2. (7p) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[x^3+3x\right]}{\left[x\right]^3+3\left[x\right]}$, unde $\left[a\right]$ este partea întreagă a lui a .

prof. Moisuc Niculina Mihaela

Soluție: Condițiile de parte întreagă duc la : $x^3+3x-1<\left[x^3+3x\right]\le x^3+3x$ $\quad(1)$

și $(x-1)^3+3(x-1)<[x]^3+3[x]\le x^3+3x \Rightarrow \frac{1}{x^3+3x}\le\frac{1}{[x]^3+3[x]}<\frac{1}{(x-1)^3+3(x-1)},\forall x>1$ $\quad(2)$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem $\frac{x^3+3x-1}{x^3+3x}<\frac{\left[x^3+3x\right]}{[x]^3+3[x]}<\frac{x^3+3x}{(x-1)^3+3(x-1)},\forall x>1$ $\quad(3)$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-1}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x}{(x-1)^3+3(x-1)}=1$,din relaţia (3),conform Criteriului ,,Cleştelui"

obținem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[x^3+3x\right]}{[x]^3+3[x]}=1$.

Barem

	Demonstrează că $\frac{x^3+3x-1}{x^3+3x}<\frac{\left[x^3+3x\right]}{[x]^3+3[x]}<\frac{x^3+3x}{(x-1)^3+3(x-1)},\forall x>1$	3p
	Demonstrează că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-1}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x}{(x-1)^3+3(x-1)}=1$	2p
	Finalizare	2p

3.Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3}{2x^2+3}+\frac{2}{3x^2+2}$ și numerele distincte $a,b,c\in(0,\infty)$.

Se cere:

a) **(4p)** Demonstrați că $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2,\forall x\in(0,\infty)$

b) **(3p)** Demonstrați că punctele $A\left(f(a),f\left(\frac{1}{a}\right)\right),B\left(f(b),f\left(\frac{1}{b}\right)\right),C\left(f(c),f\left(\frac{1}{c}\right)\right)$ sunt coliniare.

prof. Bursuc Ion

Soluție

a) Prin calcul direct obține: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2x^2+3}+\frac{2}{3x^2+2}+\frac{3}{\frac{2}{x^2}+3}+\frac{2}{\frac{3}{x^2}+2}=$

$$\frac{3}{2x^2+3}+\frac{2}{3x^2+2}+\frac{3x^2}{2+3x^2}+\frac{2x^2}{3+2x^2}=\left(\frac{3}{2x^2+3}+\frac{2x^2}{3+2x^2}\right)+\left(\frac{2}{3x^2+2}+\frac{3x^2}{2+3x^2}\right)=2,\forall x\in(0,\infty)$$

b) Punctele $A\left(f(a),f\left(\frac{1}{a}\right)\right),B\left(f(b),f\left(\frac{1}{b}\right)\right),C\left(f(c),f\left(\frac{1}{c}\right)\right)$ sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\Delta=\begin{vmatrix} f(a) & f\left(\frac{1}{a}\right) & 1\\ f(b) & f\left(\frac{1}{b}\right) & 1\\ f(c) & f\left(\frac{1}{c}\right) & 1\end{vmatrix}=0.$$

Folosind proprietățile determinanților obținem $\Delta=\begin{vmatrix} f(a) & f\left(\frac{1}{a}\right)+f(a) & 1 \\ f(b) & f\left(\frac{1}{b}\right)+f(b) & 1 \\ f(c) & f\left(\frac{1}{c}\right)+f(c) & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(a) & 2 & 1 \\ f(b) & 2 & 1 \\ f(c) & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

Barem

a)	Demonstrează că $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2, \forall x\in(0,\infty)$	4p
b)	Scrie condiţia de coliniaritate $\Delta=0$	1p
	Demonstrează că $\Delta=0$	2p

4.(7p) Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=a\sqrt{x^2+x}-b\sqrt{x^2+1}$ cu $a,b\in\mathbb{R}^*$.Determinaţi a şi b ştiind că dreapta de ecuaţie $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Soluţie

Determinăm numerele reale a şi b astfel încât dreapta de ecuaţie $y=mx+n$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ şi să coincidă cu dreapta de ecuaţie $y=x+1$. Vom obţine

$$1=m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\sqrt{x^2+x}-b\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{1+\frac{1}{x}}-b\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=a-b.$$

$$1=n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{x^2+x}-(a-1)\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(a\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a(x-1)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\frac{a}{2}\Rightarrow a=2,b=1$$

Barem

	Pune condiţia $1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow a-b=1$	2p
	Pune condiţia $1=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)\Leftrightarrow\frac{a}{2}=1$	4p
	Finalizare	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.