CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a XII-a

H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

1. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se introduce legea $*$ definită astfel:

$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$, pentru orice $x,y\in G$.

a) (1p) Arătați că $*$ este lege de compoziție internă;

b) (4p) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian;

c) (2p) Determinați numerele reale a și b astfel încât funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to G$, dată prin $f(x)=\sqrt{ax+b}$ să fie izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ și mulțimea $H=\{A^n,\ n\in\mathbb{N}^*\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

a) (2p) Determinați mulțimea H;

b) (2p) Arătați că H este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor;

c) (3p) Determinați numerele naturale n și x cu proprietatea că $A^n=xI_3$.

3. a) (3p) Arătați că există numerele reale m și n astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\dfrac{mx+n}{x+2}$ să verifice relația $f(x)+f'(x)=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$;

b) (4p) Calculați $\displaystyle\int\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$, unde $x\in(-2,+\infty)$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}2^x & ,x<0\\ \sqrt{x}+1, & x\ge 0\end{cases}$.

a) (2p) Arătați că f admite primitive pe mulțimea numerelor reale;

b) (3p) Calculați $\displaystyle\int_{-4}^{4}f(x)dx$;

c) (2p) Folosind eventual inegalitatea $\sqrt{x}\ge x,\forall x\in[0,1]$, arătați că $\displaystyle\int_0^1 f^{2024}(x)dx\ge\frac{2^{2025}-1}{2025}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.