OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XI-a

1. (7p) Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$x_1=a,\ y_1=b,\ x_{n+1}=\frac{4x_n+7y_n}{11}\ \text{ și }\ y_{n+1}=\frac{7x_n+4y_n}{11},\ \text{pentru orice } n\in\mathbb{N}^*.$$

Arătați că cele două șiruri sunt convergente, au aceeași limită și determinați această limită.

Gazeta Matematică

Soluție: Adunând, apoi scăzând relațiile din ipoteză, obținem $x_{n+1}+y_{n+1}=\frac{11x_n+11y_n}{11}=x_n+y_n$ și $x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{-3x_n+3y_n}{11}=-\frac{3}{11}(x_n-y_n)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă notăm $s_n=x_n+y_n$ și $d_n=x_n-y_n$, avem $s_{n+1}=s_n$ și $d_{n+1}=-\frac{3}{11}d_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, adică șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este constant, iar șirul $(d_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică cu rația $-\frac{3}{11}$. Deducem că $s_n=a+b$ și $d_n=\left(-\frac{3}{11}\right)^{n-1}\cdot(a-b)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=a+b$ și $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$.

Pe de altă parte, din $\begin{cases}x_n+y_n=s_n\\ x_n-y_n=d_n\end{cases}$ rezultă $x_n=\frac{s_n+d_n}{2}$ și $y_n=\frac{s_n-d_n}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Acum este evident că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{a+b}{2}\in\mathbb{R}$, adică cele două șiruri sunt convergente la $\frac{a+b}{2}$.

Barem

$x_{n+1}+y_{n+1}=x_n+y_n$ și $x_{n+1}-y_{n+1}=-\frac{3}{11}(x_n-y_n)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$	2p
$s_n=a+b$ și $d_n=\left(-\frac{3}{11}\right)^{n-1}\cdot(a-b)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$	2p
$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=a+b$ și $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$	1p
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{a+b}{2}\in\mathbb{R}$	2p

2. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consider matricele $A(x)=\begin{pmatrix}5x+1 & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) (3p) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) (4p) Determinați numărul natural n știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2023)\cdot A(2024)=A(n)$.

* * *

<u>Soluție:</u> **a)** Mai întâi observăm că $A(x)=I_3+xB$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 10 & -4\end{pmatrix}$.

Pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ avem $A(x)\cdot A(y)=(I_3+xB)(I_3+yB)=I_3+xB+yB+xyB^2$ și cum $B^2=B$, deducem că $A(x)\cdot A(y)=I_3+(x+y+xy)B=A(x+y+xy)$.

b) Deoarece $x+y+xy=(x+1)(y+1)-1$, deducem că $A(x)\cdot A(y)=A((x+1)(y+1)-1)$, apoi $A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)=A((x+1)(y+1)(z+1)-1)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Folosind inducția matematică, obținem că pentru orice număr natural $n\geq 2$ și pentru orice numere reale $x_1,x_2,\ldots,x_n$ avem $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1)$.

În concluzie, avem $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2023)\cdot A(2024)=A(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2024\cdot 2025-1)$, prin urmare $n=2025!-1$.

<u>Barem</u>

a) $A(x)=I_3+xB$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 10 & -4\end{pmatrix}$	1p
Demonstrează egalitatea $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$	2p
b) Demonstrează $A(x)\cdot A(y)=A((x+1)(y+1)-1)$ și $A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)=A((x+1)(y+1)(z+1)-1)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$	1p
Demonstrează prin inducție egalitatea $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1)$	2p
Finalizare	1p

3. (7p) Se consideră $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f, g : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^m + 2}{x^n + 1}$, $g(x) = px - \sqrt{x^2 - 2x}$. Determinați numerele m, n, p știind că $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{2024}$.

* * *

<u>Soluție:</u> Remarcăm mai întâi că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m + 2}{x^n + 1} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m < n \\ 1, \text{ dacă } m = n \\ \infty, \text{ dacă } m > n \end{cases}$.

Deoarece $px - \sqrt{x^2 - 2x} = \dfrac{\left(p^2 - 1\right)x^2 + 2x}{px + \sqrt{x^2 - 2x}}$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p = 1 \\ \infty, \text{ dacă } p \geq 2 \end{cases}$.

Drept urmare, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ cu $m \neq n$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m < n \\ \infty, \text{ dacă } m > n \end{cases}$, iar dacă $m = n$ și $p = 1$ avem $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = 1$. Rămâne să studiem limita în cazul $m = n$ și $p \geq 2$.

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{x^n + 1}\right)^{x^n + 1}\right]^{\frac{px - \sqrt{x^2 - 2x}}{x^n + 1}} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n > 1 \\ e^{p-1}, \text{ dacă } n = 1 \end{cases}$.

În concluzie, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{2024}$ dacă și numai dacă $m = n = 1$ și $p = 2025$.

<u>Barem</u>

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m + 2}{x^n + 1} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m < n \\ 1, \text{ dacă } m = n \\ \infty, \text{ dacă } m > n \end{cases}$	1p
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p = 1 \\ \infty, \text{ dacă } p \geq 2 \end{cases}$	1p
oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ cu $m \neq n$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m < n \\ \infty, \text{ dacă } m > n \end{cases}$	1p
dacă $m = n$ și $p = 1$ avem $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = 1$	1p
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{x^n + 1}\right)^{x^n + 1}\right]^{\frac{px - \sqrt{x^2 - 2x}}{x^n + 1}} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n > 1 \\ e^{p-1}, \text{ dacă } n = 1 \end{cases}$	2p
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{2024} \Leftrightarrow m = n = 1$ și $p = 2025$	1p

4. a) (3p) Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \det(A + xB)$. Arătați că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \det(A) + a \cdot x + b \cdot x^2 + \det(B) \cdot x^3$.

b) (4p) Fie $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\omega^3 = -1$. Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică egalitatea $\det(A + \omega B) = 0$, arătați că $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Dan Popescu, Suceava

<u>Soluție:</u> **a)** Fie $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$. Atunci $A + xB = (a_{ij} + xb_{ij})$. Folosind succesiv proprietăți ale determinanților $\left(\text{de tipul } \begin{vmatrix} r & s+s' & t \\ u & v+v' & w \\ m & n+n' & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & s' & t \\ u & v' & w \\ m & n' & p \end{vmatrix} \right)$, obținem $\det(A + xB)$ scris ca suma a opt determinanți de ordinul trei. Dacă scoatem factorul comun *x* de pe coloane și grupăm termenii după puterile lui *x*, găsim $\det(A + xB) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3$, unde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ și

$$\alpha_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A, \qquad \alpha_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} \\ b_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \det B.$$

Rezultă $f(x) = \det(A) + a \cdot x + b \cdot x^2 + \det(B) \cdot x^3$, unde $a = \alpha_1 \in \mathbb{R}$ și $b = \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

b) Din $\omega^3 = -1$ rezultă $(\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0$ și cum $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, obținem $\omega^2 = \omega - 1$.

Deoarece $\det(A + \omega B) = 0$, avem $f(\omega) = 0$. Folosind relația de la punctul a), obținem $\det(A) - \det(B) - b + (a + b) \cdot \omega = 0$ și cum $a, b, \det(A), \det(B) \in \mathbb{R}$ rezultă $a + b = 0$.

Acum avem $\det(A + B) = f(1) = \det(A) + a + b + \det(B) = \det(A) + \det(B)$.

<u>Barem</u>

a) Justificarea egalității $f(x) = \det(A) + a \cdot x + b \cdot x^2 + \det(B) \cdot x^3$, unde $a, b \in \mathbb{R}$	3p
b) Justifică $\omega^2 = \omega - 1$	1p
Demonstrează $a + b = 0$	2p
Finalizare	1p

Notă: **Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.**