CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a XI-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se dă matricea $A(a)=\mathrm{I}_2+aB$, unde $B=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, $a\in R$.

a) (2p) Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y),\forall x,y\in R$.

b) (4p) Să se calculeze $\mathrm{A}(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2024)$.

c) (1p) Să se calculeze $(\mathrm{A}(1))^{2024}$.

Daniela Negrea, Suceava

<u>Soluție:</u>

a) Avem $B^2=B$. Rezultă că $A(x)\cdot A(y)=(I_2+xB)(I_2+yB)=I_2+yB+xB+xyB^2$
$=I_2+xB+yB+xyB=I_2+(xy+x+y)B=A(xy+x+y)$.

b) $A(\mathrm{x})\cdot A(\mathrm{y})=A(xy+x+y)=A((\mathrm{x}+1)(\mathrm{y}+1)-1)$. Demonstrăm prin inducție că are loc relația

$A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot \mathrm{A}(x_3)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1), x_i\in R, n\in N^*$.

Fie $p(n): A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot \mathrm{A}(x_3)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1), n\in N^*$

$p(1): A(x_1)=A((x_1+1)-1)$-adevărată. Presupunem că $p(k)$ este o propoziție adevărată, deci are loc

$A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_k)=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_k+1)-1)$.

Avem $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_{k+1})=(A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_k))\cdot A(x_{k+1})$

$=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_k+1)-1)\cdot A(x_{k+1})=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_{k+1}+1)-1)$. Deci $p(k+1)$ este adevărată.

$$\left.\begin{array}{l} p(1)-\textit{adevărată}\\ p(k)\to p(k+1)\end{array}\right\}\Rightarrow p(n)-\textit{adevărată}\ \forall n\in N^*.$$

Rezultă că $\mathrm{A}(1)\cdot A(2)\cdot \mathrm{A}(3)\cdot\ldots\cdot A(2024)=A(2025!-1)$

c) $(\mathrm{A}(1))^{2024}=\mathrm{A}(1)\cdot\mathrm{A}(1)\cdot\mathrm{A}(1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{A}(1)=\mathrm{A}(2^{2024}-1)$

<u>Barem</u>

a) $B\cdot B=B$	1 p
$A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y),\forall x,y\in R$	1 p
b) $A(x)\cdot A(y)=A((x+1)(y+1)-1)$	1 p
Demonstrează prin inducție $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot A(x_3)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1),x_i\in R.$	2 p
$A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2024)=A(2025!-1)$	1 p
c) $(A(1))^{2024}=A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot\ldots\cdot A(1)=A(2^{2024}-1)$	1 p

2. a) (3p) Să se arate că oricare ar fi matricea $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ are loc relația

$$A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2.$$

***

b) (4p) Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ astfel încât $\det A=9$. Arătați că $\det\left(A^2+5A+9I_2\right)$ este un pătrat perfect.

Mihaela Berindeanu, București (SGM 11/2023)

<u>Soluție:</u>

a) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & cb+d^2\end{pmatrix}$

Avem $A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & cb+d^2\end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=O_2.$

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$. Rezultă, conform punctului a, că $A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2.$

Dar $\det A=9\Rightarrow ad-bc=9\Rightarrow A^2-(a+d)\cdot A+9\cdot I_2=O_2\Rightarrow A^2+9I_2=(a+d)\cdot A.$

Avem $\det\left(A^2+5A+9I_2\right)=\det\left((a+d)\cdot A+5A\right)=\det\left((a+d+5)\cdot A\right)=(a+d+5)^2\det A=9(a+d+5)^2$
$=(3a+3d+15)^2.$

Deoarece $a,d\in\mathbf{Z}\Rightarrow 3a+3d+15\in\mathbf{Z}\Rightarrow$ $\det\left(A^2+5A+9I_2\right)$ este un pătrat perfect.

<u>Barem</u>

a) Demonstrează relația	3 p
b) $\det A=9\Rightarrow ad-bc=9\Rightarrow A^2-(a+d)\cdot A+9\cdot I_2=O_2\Rightarrow A^2+9I_2=(a+d)\cdot A.$	1 p
$\det\left(A^2+5A+9I_2\right)=\det\left((a+d)\cdot A+5A\right)=\det\left((a+d+5)\cdot A\right)=(a+d+5)^2\det A=9(a+d+5)^2$ $=(3a+3d+15)^2.$	2 p

$a,d\in\mathbf{Z}\Rightarrow 3a+3d+15\in\mathbf{Z}\Rightarrow \det\left(A^2+5A+9I_2\right)$ este un pătrat perfect.	1 p

3. (7p) Se consideră funcția $f:D\to R,\ f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+2024}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției, $a,b,c\in R, a>0, b>0$. Știind că asimptota spre $+\infty$ este o dreaptă paralelă cu dreapta de ecuație $y=4x-2023$, iar spre $-\infty$ graficul funcției admite asimptota orizontală de ecuație $y=-2$, arătați că numerele a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Mihaela Ghelbere, Suceava

<u>Soluție:</u>

Asimptota spre $+\infty$ este o dreaptă paralelă cu dreapta de ecuație $y=4x-2023$, deci graficul funcției admite asimptota oblică $y=mx+n$, unde $m=4$.

Dar $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+\sqrt{bx^2+cx+2024}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(a+\sqrt{b+\frac{c}{x}+\frac{2024}{x^2}}\right)}{x}=a+\sqrt{b}\Rightarrow a+\sqrt{b}=4$ **(1)**

$y=-2$ este asimptota orizontală spre $-\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-2$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx+2024}\right)=-2\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{a^2x^2-bx^2-cx-2024}{ax-\sqrt{bx^2+cx+2024}}=-2\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(a^2-b-\frac{c}{x}-\frac{2024}{x^2}\right)}{ax-\sqrt{x^2\left(b+\frac{c}{x}+\frac{2024}{x^2}\right)}}=-2\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(a^2-b-\frac{c}{x}-\frac{2024}{x^2}\right)}{x\left(a+\sqrt{\left(b+\frac{c}{x}+\frac{2024}{x^2}\right)}\right)}=-2\Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(a^2-b-\frac{c}{x}-\frac{2024}{x^2}\right)}{\left(a+\sqrt{\left(b+\frac{c}{x}+\frac{2024}{x^2}\right)}\right)}=-2$ .Dacă $a^2-b\neq 0,$ atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(a^2-b-\frac{c}{x}-\frac{2024}{x^2}\right)}{\left(a+\sqrt{\left(b+\frac{c}{x}+\frac{2024}{x^2}\right)}\right)}=\pm\infty$

(contradicție).

Rezultă că $a^2-b=0$ **(2)**

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-cx-2024}{ax-\sqrt{bx^2+cx+2024}}=-2\Rightarrow\dfrac{-c}{a+\sqrt{b}}=-2$ **(3)**. Rezultă, conform relației (1), că $\dfrac{-c}{4}=-2\Rightarrow c=8.$

Din (1) și (2) avem $\begin{cases}a+\sqrt{b}=4\\ a^2-b=0\end{cases}\Rightarrow a=2, b=4$

$a=2, b=4, c=8\Rightarrow b^2=ac\Rightarrow a,b,c$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

<u>Barem</u>

Asimptota spre $+\infty$ este o dreaptă paralelă cu dreapta de ecuație $y=4x-2023$, deci graficul funcției admite asimptota oblică $y=mx+n$, unde $m=4$.	1 p
Dar $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+\sqrt{bx^2+cx+2024}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\sqrt{b+\frac{c}{x}+\frac{2024}{x^2}}\right)}{x}=a+\sqrt{b}\Rightarrow$ $a+\sqrt{b}=4$ **(1)**	1 p
$y=-2$ este asimptota orizontală spre $-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx+2024}\right)=-2\Rightarrow a^2-b=0$ **(2)**	1 p
Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-cx-2024}{ax-\sqrt{bx^2+cx+2024}}=-2\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-c-\frac{2024}{x}\right)}{x\left(a+\sqrt{\left(b+\frac{c}{x}+\frac{2024}{x^2}\right)}\right)}=-2\Rightarrow$ $\frac{-c}{a+\sqrt{b}}=-2$ (**3**). Rezultă, conform relației (**1**), că $\frac{-c}{4}=-2\Rightarrow c=8$.	2 p
Din **(1)** și **(2)** avem $\begin{cases}a+\sqrt{b}=4\\a^2-b=0\end{cases}\Rightarrow a=2,b=4$ $a=2,b=4,c=8\Rightarrow b^2=ac\Rightarrow a,b,c$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.	2 p

4. Evoluția unei familii de suricate, pe parcursul a 10 ani, este modelată prin funcția

$$P:[0;10]\to\mathbb{R},\ P(t)=\begin{cases}\frac{a}{(t-3)^2+1}, & t\in[0;4]\\ \frac{b}{t-1}, & t\in(4;10]\end{cases}$$, unde a, b sunt constante reale pozitive.

a) (3p) Aflați a , $b\in\mathbb{R}$ știind că în cel de-al doilea an numărul suricatelor este egal cu 15 și că funcția este continuă.

b) (4p) Pentru $a=30$ și $b=45$, determinați intervalul de timp în care numărul suricatelor este mai mare sau egal decât 15.

Ana-Maria Lechovolea, Suceava

***<u>Soluție</u>*:**

a) Din $P(2)=15$, se obține $\frac{a}{2}=15$, de unde $a=30$.

Continuitatea funcției implică continuitatea în punctul $t=4$, de unde rezultă $l_s(4)=l_d(4)$.

Astfel, rezultă că $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$, de unde se obține $b=45$.

b) Rezolvăm inecuația $P(t) \geq 15$.

Observăm că, după 4 ani, numărul suricatelor estet mai mic decât 15, prin urmare, inecuația de rezolvat este : $\frac{30}{(t-3)^2+1} \geq 15$. Inecuația este echivalentă cu $(t-3)^2 + 1 \leq 2$, adică $\mid t-3 \mid \leq 1$, de unde rezultă că $t \in [2; 4]$.

Barem

a) $P(2) = 15$, se obține $\frac{a}{2} = 15$, de unde $a = 30$. Continuitatea funcției implică continuitatea în punctul $t = 4 \Rightarrow l_s(4) = l_d(4)$. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 45$.	3 p
b) Rezolvăm inecuația $P(t) \geq 15$. Pentru $t > 4 \Rightarrow P(t) < 15$, prin urmare, inecuația de rezolvat este: $\frac{30}{(t-3)^2+1} \geq 1$	2 p
$(t-3)^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow t \epsilon [2; 4]$	2 p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**