CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a IX-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. a) (3p) Demonstrați că $xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2$ pentru $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) (4p) Arătați că oricare x,y,z numere strict pozitive, are loc inegalitatea:
$x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

Petrache Aurica, Suceava

Soluție: **a)** La relația $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$ adună $2(xy+yz+zx)$ de unde obținem $3(xy+yz+zx)\le x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ unde rezultă $xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

b) Din inegalitatea mediilor rezultă că pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, are loc $\sqrt{yz}\le\frac{y+z}{2}$, de unde rezultă că $x\sqrt{yz}\le\frac{x(y+z)}{2}$. Analog și pentru $y\sqrt{zx}\le\frac{y(z+x)}{2}$ și $z\sqrt{xy}\le\frac{z(x+y)}{2}$

Adunând cele trei inegalități membru cu membru obținem $x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\le xy+yz+zx.$ Dar știm că $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

Barem

a) adună $2(xy+yz+zx)$ la relația $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$	3 p
Obține $3(xy+yz+zx)\le x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ de unde obține relația	1p
b) Scrie inegalitatea mediilor $\sqrt{yz}\le\frac{y+z}{2}$, de unde $x\sqrt{yz}\le\frac{x(y+z)}{2}$ și analoagele	2 p
Adună relațiile și obține $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ de unde folosește a)	1 p

2. a) (4p) Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică de rație $r\ne0$. Să se calculeze $(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}^2+a_{k+1}a_k+a_k^2)$ și folosind eventual rezultatul să se calculeze urmatoarea sumă:
$S_n=(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)+(a_3^2+a_3a_2+a_2^2)+...+(a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2)$, exprimând rezultatul în funcție de primul termen și de rație.

b) (3p) Să se arate că numărul $N=\underbrace{99...9}_{n\ cifre}4\underbrace{00...0}_{n\ cifre}9$ este pătrat perfect.

Cenușă Remus, Suceava

Soluție: a) Fie $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n$, unde $r \in \mathbb{R}^*$ este rația progresiei arata că $\left(a_{k+1} - a_k\right)\left(a_{k+1}^2 + a_{k+1}a_k + a_k^2\right) = a_{k+1}^3 - a_k^3$ Înmulțim suma cu r, și apoi în fața fiecărui termen scriem ca $r = a_{k+1} - a_k$: $S_n = \left(a_2 - a_1\right)\left(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2\right) + \left(a_3 - a_2\right)\left(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2\right) + ... + \left(a_{n+1} - a_n\right)\left(a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2\right)$.
Astfel fiecare termen devine o diferență de cuburi: $rS_n = a_2^3 - a_1^3 + a_3^3 - a_2^3 + ... + a_{n+1}^3 - a_n^3$ sau $rS_n = a_{n+1}^3 - a_1^3$ sau $rS_n = r \cdot n \cdot \left(a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_1 + a_1^2\right)$ unde $a_{n+1} - a_1 = r \cdot n$. Deci suma este:
$S_n = n \cdot \left(3a_1^2 + 3nra_1 + a_1^2\right)$.
b) Scriem numarul $N = \underbrace{99...9}_{n\ cifre}\underbrace{00...0}_{n\ cifre} + 4\underbrace{00...0}_{n\ cifre} + 9$ unde $N = \underbrace{99...9}_{n\ cifre} \cdot 10^{n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 9$

$N = \left(10^n - 1\right) \cdot 10^{n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 9 \Rightarrow N = 10^{2n+2} - 10^{n+2} + \left(10 - 6\right) \cdot 10^{n+1} + 9$ și obtinem
$N = 10^{2n+2} - 10^{n+2} + 10^{n+2} - 6 \cdot 10^{n+1} + 9$, reducem termenii asemenea de unde rezultă
$N = \left(10^{n+1}\right)^2 - 2 \cdot 10^{n+1} \cdot 3 + 3^2$ de unde $N = \left(10^{n+1} - 3\right)^2$.

Barem

Arata că $\left(a_{k+1} - a_k\right)\left(a_{k+1}^2 + a_{k+1}a_k + a_k^2\right) = a_{k+1}^3 - a_k^3$	1 p
Inmulțește relația cu $r = a_{k+1} - a_k$ și obține $S_n = \left(a_2 - a_1\right)\left(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2\right) + \left(a_3 - a_2\right)\left(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2\right) + ... + \left(a_{n+1} - a_n\right)\left(a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2\right)$	1 p
Exprimă $rS_n = a_2^3 - a_1^3 + a_3^3 - a_2^3 + ... + a_{n+1}^3 - a_n^3$	1 p
Rezultatul $S_n = n \cdot \left(3a_1^2 + 3nra_1 + a_1^2\right)$.	1 p
b) Scrie pe $N = \left(10^n - 1\right) \cdot 10^{n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 9$	1 p
$N = 10^{2n+2} - 10^{n+2} + \left(10 - 6\right) \cdot 10^{n+1} + 9$	1 p
$N = \left(10^{n+1}\right)^2 - 2 \cdot 10^{n+1} \cdot 3 + 3^2$ și finalizare $N = \left(10^{n+1} - 3\right)^2$	1 p

3. (4p) Demonstrați urmatoarea egalitate $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ **,** $n \in \mathbb{N}^*$

Hopulele Marcela, Suceava

Soluție: Notăm P(n) enunțul dat. Pentru a demnonstra propoziția $(\forall)P(n)$ aplicăm metoda inducției matematice:
Etapa I: pentru n=1 obținem $P(1): "\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1}"$ care este propoziție adevărată.

Etapa II: Să demonstrăm implicația $P(k) \to P(k+1), k \geq 1$, adică presupunem

$P(k): \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}$ propoziție adevarată și să demonstrăm că

$P(k+1): \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}}$. Folosind $P(k)$ adevărată rezultă

$$P(k+1): \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{k}{3^k}}_{P(k)} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3(2k+3)}{4 \cdot 3^k} - \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Așadar P(k+1) este adevărată.

Cele doua etape sunt verificate , conform principiului inducției matematice rezultă ca P(n) este propoziție adevărată pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Barem

Verifică etapa I	2 p
Scrie etapa II și scrie $P(k+1): \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}}$	2 p
Demonstrează că $\frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3(2k+3)}{4 \cdot 3^k} - \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} \right)$	2 p
Demonstreaza P(k+1) și concluzia.	1 p

4. a) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătați că, oricare ar fi Q un punct din plan, are loc relația $\overrightarrow{QG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}\right)$.

b) În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{CD}$. Arătați că punctele A, C și G - centrul de greutate al triunghiului MNP sunt coliniare.

Ghelbere Mihaela, Câmpulung Moldovenesc

Rezolvare:

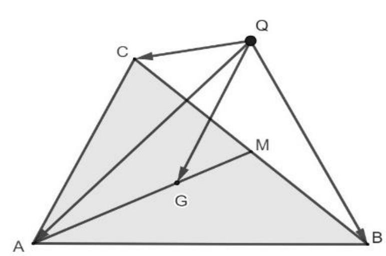
a) Fie M mijlocul segmentului AB.

G este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Avem

$$\overrightarrow{QG} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{QA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} =$$

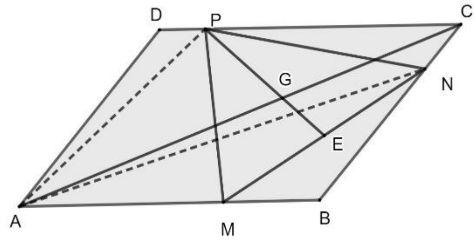
$$\overrightarrow{QA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{QA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}\right).$$



b) Conform punctului a) avem

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)$$



Conform ipotezei $\overrightarrow{NB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ și

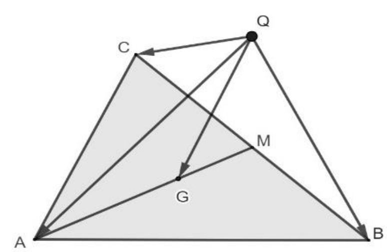
$\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{DP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Rezultă că

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}\right)$$

$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{11}{6}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{11}{18}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{11}{18}\overrightarrow{AC}\Rightarrow$

$\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari $\Rightarrow A,C,G$ sunt coliniare.

Barem

a) Fie M mijlocul segmentului AB. G este centrul de greutate al triunghiului $ABC\Rightarrow$ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. 	1p
$\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{QA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=$ $\overrightarrow{QA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{QA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QB}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QC}\right)=$ $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}\right)$.	2p
b) Desen	1p
Conform punctului a) avem $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)$ Conform ipotezei $\overrightarrow{NB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{DP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Rezultă că	3p

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}\right)$ $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{11}{6}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{11}{18}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{11}{18}\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari $\Rightarrow A,C,G$ sunt coliniare.	

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**