

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024**  
**CLASA a XII-a**

**H1**

**Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

**1. (7p)** Se consideră funcția,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ .

Demonstrați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$  și calculați apoi primitiva cu proprietatea că  $F(1) = 2$ .

**2.** Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ .

**a) (2p)** Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că funcția  $F: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = (x+a)\ln x + bx + 2024$  este o primitivă a funcției  $f$ .

**b) (1p)** Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe  $(1, +\infty)$ .

**c) (4p)** Să se calculeze  $\int f(e^x) \cdot x dx$ .

**3. (7p)** Pe mulțimea  $G = (-4, 4)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \frac{16(x+y)}{16+xy}$  care formează cu  $G$  o structură de grup abelian.

**a) (2p)** Calculați  $\left(-\frac{1}{10}\right) \circ \left(-\frac{1}{9}\right) \circ \dots \circ \frac{1}{9} \circ \frac{1}{10}$ .

**b) (5p)** Știind că funcția  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  este primitiva funcției  $h: (-4, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{1}{16-x^2}$  a cărei grafic conține punctul  $A\left(2, \frac{\ln 3}{8}\right)$ , demonstrați că  $f$  este un izomorfism între grupurile  $(G, \circ)$  și  $(\mathbb{R}, +)$ .

**4.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  unde  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**a) (2p)** Demonstrați că  $G$  este parte stabilă a mulțimii  $M_2(\mathbb{R})$  în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

**b) (5p)** Determinați matricele  $X, Y \in G$ ,  $X \neq O_2, Y \neq O_2$  cu  $X \cdot Y = O_2$  unde  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**

**3. Timp de lucru 3 ore.**