CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 17 FEBRUARIE 2024
CLASA a X-a

H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = log_3 \frac{x^2+|x|-a}{x^2-|x|-b}$.
a) (3p) Pentru $a=2$ și $b=6$ să se determine domeniul maxim de definiție al funcției.
b) (4p) Pentru $a=b=-1$ să se determine numerele întregi n, pentru care $f(x)=n$ are soluții reale și să se afle aceste soluții.

Moisuc Niculina Mihaela, Rădăuți

Soluție: **a)** Pentru $x>0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}>0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}>0 \Rightarrow \frac{(x-1)}{(x-3)}>0 \Rightarrow x \in (0,1) \cup (3,+\infty)$;

pentru $x<0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}>0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}>0 \Rightarrow \frac{(x+1)}{(x+3)}>0 \Rightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (-1,0)$;

pentru $x=0 \Rightarrow \frac{x^2+|x|-2}{x^2-|x|-6}=\frac{1}{3}>0$.

Reunind soluțiile obținem domeniul maxim de definiție $D=(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

b) Egalitatea $f(x)=n$ se scrie $\frac{x^2+|x|+1}{x^2-|x|+1}=3^n \Rightarrow x^2+|x|+1=3^n(x^2-|x|+1) \Rightarrow$

$(3^n-1)|x|^2-(3^n+1)|x|+3^n-1=0$, ecuație care are soluții reale dacă $\Delta \geq 0$,

$\Delta=(3^n+1)^2-4(3^n-1)^2=(3-3^n)(3^{n+1}-1), (3-3^n)(3^{n+1}-1)\geq 0 \Rightarrow n \in [-1,1], n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{-1,0,1\}$

Pentru $n=-1$ se obține ecuația $\frac{x^2+|x|+1}{x^2-|x|+1}=\frac{1}{3}$, care nu are soluții reale.

Pentru $n=0$, ecuația devine $\frac{x^2+|x|+1}{x^2-|x|+1}=1$, cu soluția reală $x=0$.

Pentru $n=1$, ecuația $\frac{x^2+|x|+1}{x^2-|x|+1}=3$ are soluția $|x|=1$, de unde $x \in \{-1,1\}$.

Prin urmare $f(x)=n$ are soluții reale dacă $n \in \{0,1\}$, cu soluțiile $x=0$,dacă $n=0$,și $x \in \{-1,1\}$, dacă $n=1$.

Barem

a) $x>0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}>0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}>0 \Rightarrow \frac{(x-1)}{(x-3)}>0 \Rightarrow x \in (0,1) \cup (3,+\infty)$	1 p

$x<0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}>0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}>0 \Rightarrow \frac{(x+1)}{(x+3)}>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-1,0)$	1 p
$x=0 \Rightarrow \frac{x^2+\lvert x\rvert-2}{x^2-\lvert x\rvert-6}=\frac{1}{3}>0 \Rightarrow D=(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$	1p
b) $f(x)=n \Rightarrow \frac{x^2+\lvert x\rvert+1}{x^2-\lvert x\rvert+1}=3^n \Rightarrow (3^n-1)\lvert x\rvert^2-(3^n+1)\lvert x\rvert+3^n-1=0$	1p
$(3^n-1)\lvert x\rvert^2-(3^n+1)\lvert x\rvert+3^n-1=0$, ecuație care are soluții reale dacă $\Delta\geq 0$	1p
$\Delta=(3^n+1)^2-4(3^n-1)^2=(3-3^n)(3^{n+1}-1)$ $(3-3^n)(3^{n+1}-1)\geq 0 \Rightarrow n\in[-1,1], n\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow n\in\{-1,0,1\}$	1p
Finalizare $n\in\{0,1\}$, cu $x=0$ pentru $n=0$ și $x\in\{-1,1\}$ pentru $n=1$	1p

2. a) (4p) Să se arate că numerele complexe $z_1=i$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ și $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

b) (3p) Să se arate că dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $z_1+z_2+z_3=0$, atunci z_1, z_2, z_3 reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

***

Soluție:

a) Se calculează $|z_1-z_2|=\left|i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$ și analoagele $|z_2-z_3|=\sqrt{3}, |z_3-z_1|=\sqrt{3}$, $\Rightarrow |z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3} \Rightarrow$ triunghiul este echilateral.

b) $|z_1|=1 \Rightarrow |z_1|^2=1 \Rightarrow z_1\cdot\overline{z_1}=1 \Rightarrow \overline{z_1}=\frac{1}{z_1}, \overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$ și $\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$. Din $z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow \overline{z_1+z_2+z_3}=0$ $\Rightarrow \overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0 \Rightarrow \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0 \Rightarrow \frac{z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}=0 \Rightarrow z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2=0$.

Din $z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow (z_1+z_2+z_3)^2=0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3)=0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ $\Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3=0 \Rightarrow z_1, z_2, z_3$ reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Barem

a) $\lvert z_1-z_2\rvert=\sqrt{3}$, $\lvert z_2-z_3\rvert=\sqrt{3}, \lvert z_3-z_1\rvert=\sqrt{3}$ $\Rightarrow \lvert z_1-z_2\rvert=\lvert z_2-z_3\rvert=\lvert z_3-z_1\rvert=\sqrt{3} \Rightarrow$ triunghiul este echilateral.	3 p 1p
b) $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}, \overline{z_2}=\frac{1}{z_2}, \overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$	1 p

$\overline{z_1+z_2+z_3}=0 \Rightarrow \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0 \Rightarrow z_2 \cdot z_3+z_1 \cdot z_3+z_1 \cdot z_2=0$	1p
$z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow (z_1+z_2+z_3)^2=0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_2 \cdot z_3+z_1 \cdot z_3+z_1 \cdot z_2)=0 \Rightarrow$ $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0 \Rightarrow z_2 \cdot z_3+z_1 \cdot z_3+z_1 \cdot z_2=z_1^2+z_2^2+z_3^2=0 \Rightarrow z_1,z_2,z_3$ reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.	1p

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+x$.

a) (3p) Arătați că funcția este injectivă.

b) (4p) Demonstrați că, dacă $2^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}=\cos 2x$, atunci $|tgx|=1$.

Carp Dorina, Câmpulung Moldovenesc

Soluție:

a) $f(x)=2^x+x=f_1(x)+f_2(x)$, unde $f_1:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f_1(x)=2^x$, $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=x$ sunt strict crescătoare $\Rightarrow f(x)$ este strict crescătoare $\Rightarrow f(x)$ este injectivă.

b) $2^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+\sin^2 x=2^{\cos^2 x}+\cos^2 x \Leftrightarrow f(\sin^2 x)=f(\cos^2 x)$. Cum f este injectivă , avem $\sin^2 x=\cos^2 x$ și de aici $|tgx|=1$.

Barem

a) $f(x)=2^x+x=f_1(x)+f_2(x)$, unde $f_1:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f_1(x)=2^x$, $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=x$ sunt strict crescătoare $\Rightarrow f(x)$ este strict crescătoare $\Rightarrow f(x)$ este injectivă.	3 p
b) $2^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+\sin^2 x=2^{\cos^2 x}+\cos^2 x \Leftrightarrow$ $f(\sin^2 x)=f(\cos^2 x)$	2 p
f este injectivă $\Rightarrow \sin^2 x=\cos^2 x \Rightarrow |tgx|=1$.	2 p

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x-\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^x$.

a) (3p) Arătați că funcția este strict crescătoare.

b) (4p) Arătați că toate soluțiile reale ale ecuației $f^{2024}(x)=|f(x)|$ sunt numere întregi.

Carp Cezar, Câmpulung Moldovenesc

Soluție:

a) $f(x)=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x-\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^x=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x}$.

Funcțiile $f_1:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f_1(x)=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x$ și $f_2:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f_2(x)=-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x}$ sunt strict crescătoare , deci $f(x)$ este strict crescătoare .

b) $f^{2024}(x)=|f(x)| \Rightarrow \left|f^{2024}(x)\right|=|f(x)| \Rightarrow |f(x)|\left(|f(x)|^{2023}-1\right)=0 \Rightarrow f(x)\ \in\{0,1,-1\}$.

Ecuația $f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x-\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^x=0$, cu soluția $x=0$, număr întreg.

Ecuația $f(x)=1$, utilizând substituția $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x=t$, $t>0$, devine $t-\frac{1}{t}=1$, cu soluția pozitivă $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cum $t_1^3=\sqrt{5}+2$, rezultă soluția $x=1$, număr întreg.

Ecuația $f(x)=-1$, prin substituția $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x=t$, $t>0$ devine $t-\frac{1}{t}=-1$, care are soluția pozitivă $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Cum $t_1^3=\sqrt{5}-2$ obținem $x=-1$, număr întreg.

Barem

a) $f(x)=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x-\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^x=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x}=f_1(x)+f_2(x)$	1 p
$f_1(x)=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x$, $f_2(x)=-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x}$ sunt strict crescătoare $\Rightarrow f(x)$ este strict crescătoare	2 p
b) $f^{2024}(x)=\lvert f(x)\rvert \Rightarrow \lvert f^{2024}(x)\rvert=\lvert f(x)\rvert \Rightarrow \lvert f(x)\rvert\left(\lvert f(x)\rvert^{2023}-1\right)=0 \Rightarrow f(x)=0$ sau $\lvert f(x)\rvert^{2023}=1 \Rightarrow f(x) \in\{0,1,-1\}$.	1 p
$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x-\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^x=0$, cu soluția $x=0$, număr întreg.	1 p
$f(x)=1$, utilizând substituția $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x=t$, $t>0$, devine $t-\frac{1}{t}=1$, cu soluția pozitivă $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cum $t_1^3=\sqrt{5}+2$, rezultă soluția $x=1$, număr întreg.	1 p
$f(x)=-1$, prin substituția $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^x=t$, $t>0$ devine $t-\frac{1}{t}=-1$, cu soluția pozitivă $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Cum $t_1^3=\sqrt{5}-2$ obținem $x=-1$, număr întreg. Deci soluțiile ecuației date sunt numerele întregi 0,1 și -1.	1 p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**