OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.

a) (2p) Arătați că $0*1=-3$.

b) (2p) Arătați că $x*(-1)\le 2x$, pentru orice număr real *x*.

c) (3p) Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $m*n=1$.

Bacalaureat – iunie 2023

<u>Soluție:</u> a) $0*1=0^2\cdot 1^2-4\cdot(0+1)^2+1=0-4+1=-3$.

b) $x*(-1)=-3x^2+8x-3=-3(x-1)^2+2x\le 2x$, pentru orice număr real *x*.

c) $m*n=1\Leftrightarrow (m-2)(n-2)=4$. Cum $m,n\in\mathbb{N}^*$, cu $m\le n$, obținem soluțiile $(3,6),(4,4)$.

<u>Barem</u>

Obține $0*1=-3$	2 p
Obține $x*(-1)=-3(x-1)^2+2x\le 2x, \forall\, x\in\mathbb{R}$	2 p
Obține $(m-2)(n-2)=4$	2 p
Finalizare $(m,n)\in\{(3,6),(4,4)\}$	1 p

2. (7p) Pe mulțimea $M=(0,\infty)$ se dă legea de compoziție asociativă ”$*$” cu proprietatea că $x*y*z=\dfrac{xyz}{xy+yz+zx}$, pentru orice $x,y,z\in M$. Arătați că $x*y=\dfrac{xy}{x+y}$, pentru orice $x,y\in M$.

Gazeta Matematică 6-7-8/2023

<u>Soluție:</u> Observăm întâi că $x*x*x=\dfrac{x}{3}$, pentru orice $x\in M$. Fie $x,y\in M$ oarecare și $z=x*y$.

Pe de o parte, $z*z*z=\dfrac{z}{3}$, iar pe de altă parte

$$z*z*z=x*y*z*x*y=\frac{xyz}{xy+yz+zx}*x*y=\frac{\dfrac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot x\cdot y}{\dfrac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot x+\dfrac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot y+xy}=\frac{xyz}{xy+2yz+2zx}.$$

Egalând cele două scrieri obținem că $z=\dfrac{xy}{x+y}$, de unde $x*y=\dfrac{xy}{x+y}$, pentru orice $x,y\in M$.

Barem

Observă că $x*x*x=\frac{x}{3}$, pentru orice $x\in M$	2 p
Obține $z*z*z=\frac{z}{3}$, pentru $z=x*y$	1 p
Obține $z*z*z=\frac{xyz}{xy+2yz+2zx}$	3 p
Finalizare $x*y=\frac{xy}{x+y}$, pentru orice $x,y\in M$	1 p

3. (7p) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx$.

Anca Andrei, Suceava

Soluția1: Cum $0\le\arcsin x\le\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}, \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, rezultă că:

$$0\le n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=\frac{\pi}{6}\cdot\arcsin x^n\Big|_0^{1/2}=\frac{\pi}{6}\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}=0$ rezultă din teorema cleștelui că $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=0$.

Barem

Precizează că $0\le\arcsin x\le\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}, \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$	2 p
Deduce că $0\le n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx$	2 p
Obține că $0\le n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}$	2 p
Finalizare $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=0$	1 p

Soluția2: $n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\arcsin x^n\right)'\arcsin x dx=\frac{\pi}{6}\arcsin\frac{1}{2^n}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx \le$

$\frac{\pi}{6}\arcsin\frac{1}{2^n}-\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x^n dx\le \frac{\pi}{6}\arcsin\frac{1}{2^n}-\int_0^{\frac{1}{2}}x^n dx= \frac{\pi}{6}\arcsin\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}$.

Atunci $0\le n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}\arcsin\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}$ și obținem $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=0$.

Barem

$n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\arcsin x^n\right)'\arcsin x dx=\frac{\pi}{6}\arcsin\frac{1}{2^n}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$	2 p
$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx\ge\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x^n dx\ge\int_0^{\frac{1}{2}}x^n dx=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}$	3 p
Obține $0\le n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{n-1}\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}\arcsin\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx=0$	2 p

4. (7p) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcții continue, cu $g(x)\ne 0,\forall x\in[a,b]$ și $\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b g(x)dx$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ definim $I_n=\int_a^b\frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)}dx$ și $J_n=I_{2n+1}+I_{2n}$. Arătați că toți termenii șirului $(J_n)_{n\ge1}$ au același semn.

Marius Marchitan, Suceava

Soluție: Cum $g(x)\ne 0,\forall x\in[a,b]$ și g este continuă rezultă că g are semn constant pe intervalul $[a,b]$.

De asemenea, $J_n=\int_a^b\left(\frac{f^{2n+2}(x)}{g^{2n+1}(x)}+\frac{f^{2n+1}(x)}{g^{2n}(x)}\right)dx=\int_a^b\frac{f^{2n+1}(x)}{g^{2n+1}(x)}\left(f(x)+g(x)\right)dx+\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=$

$=\int_a^b\left(\frac{f^{2n+1}(x)}{g^{2n+1}(x)}+1\right)\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b\frac{f^{2n+1}(x)+g^{2n+1}(x)}{g^{2n+1}(x)}\cdot\left(f(x)+g(x)\right)dx=$

$=\int_a^b\frac{\left(f^{2n}(x)-f^{2n-1}(x)g(x)+\ldots-f(x)g^{2n-1}(x)+g^{2n}(x)\right)\left(f(x)+g(x)\right)^2}{g^{2n+1}(x)}dx$.

Ținând cont de faptul că $h(x)=f^{2n}(x)-f^{2n-1}(x)g(x)+\ldots-f(x)g^{2n-1}(x)+g^{2n}(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$ (vom arăta în cele ce urmează), $\left(f(x)+g(x)\right)^2\geq 0,\forall x\in[a,b]$ și că g^{2n+1} are semn constant pe intervalul $[a,b]$, același cu *g*, deducem că J_n are același semn cu *g* pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru a arăta că $h(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$ putem scrie

$$2h(x)=f^{2n}(x)+\left(f^{2n}(x)-2f^{2n-1}(x)g(x)+f^{2n-2}(x)g^2(x)\right)+\ldots+\left(f^{2k}(x)g^{2n-2k}(x)-\right.$$
$$\left.-2f^{2k-1}(x)g^{2n-2k+1}(x)+f(x)^{2k-2}g^{2n-2k+2}(x)\right)+\ldots+\left(f^2(x)g^{2n-2}(x)-2f(x)g^{2n-1}(x)+g^{2n}(x)\right)$$
$$+g^{2n}(x)=f^{2n}(x)+\left(f^n(x)+f^{n-1}(x)g(x)\right)^2+\ldots+\left(f^k(x)g^{n-k}(x)+f^{k-1}(x)g^{n-k+1}(x)\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+\left(f(x)g^{n-1}(x)+g^n(x)\right)^2+g^{2n}(x)\geq 0,\forall x\in[a,b].$$

Alternativ, se poate folosi polinomul $p=X^{2n}-X^{2n-1}+X^{2n-2}-\ldots+X^2-X+1$ ale cărui rădăcini sunt rădăcinile de ordin $2n+1$ ale lui -1 diferite de -1 $\left(X^{2n+1}+1=(X+1)\cdot p\right)$ și care sunt complexe nereale, distincte, conjugate două câte două, etc.

Barem

Precizează că *g* are semn constant pe intervalul $[a,b]$	1 p
$J_n=\int_a^b\frac{\left(f^{2n}(x)-f^{2n-1}(x)g(x)+\ldots-f(x)g^{2n-1}(x)+g^{2n}(x)\right)\left(f(x)+g(x)\right)^2}{g^{2n+1}(x)}dx$	3 p
$h(x)=f^{2n}(x)-f^{2n-1}(x)g(x)+\ldots-f(x)g^{2n-1}(x)+g^{2n}(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$	2 p
Finalizare	1 p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**