

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a V-a

1. (2p) a) Scrieți 2024 ca un produs de trei factori mai mari ca 1, astfel încât unul dintre factori să fie cub perfect.
 (5p) b) Arătați că restul împărțirii numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 500 + 4777$ la 2024 este pătrat perfect și cub perfect.

Claudia Marchitan, Suceava

Soluție. a) $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

b) Îl vom scrie pe A sub forma $A = 2024 \cdot c + r$, cu $0 \leq r < 2024$.

Cum $2024 = 8 \cdot 253$, atunci avem:

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot \dots \cdot 253 \cdot \dots \cdot 500 + 2024 \cdot 2 + 729 = 2024 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 252 \cdot 254 \cdot \dots \cdot 500 + 2024 \cdot 2 + 729 = 2024 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 252 \cdot 254 \cdot \dots \cdot 500 + 2) + 729$$

Deci $r = 729$.

$$r = 729 = 27^2 \text{ pătrat perfect}$$

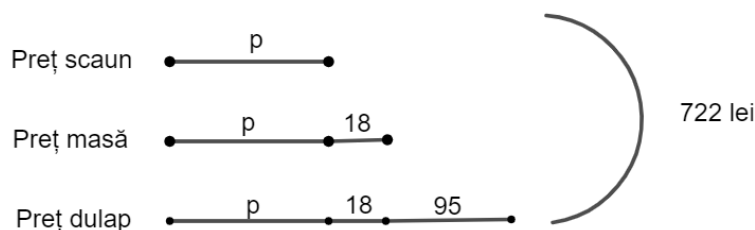
$$r = 729 = 9^3 \text{ cub perfect}$$

Barem.

| | |
|---|----|
| a) $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ | 2p |
| b) $A = 2024 \cdot c + r$, cu $0 \leq r < 2024$. | 1p |
| Aduce A la forma $A = 2024 \cdot c + 729$ | 2p |
| $r = 729 = 27^2$ pătrat perfect | 1p |
| $r = 729 = 9^3$ cub perfect | 1p |

2. (7p) Într-o școală se schimbă mobilierul și se cumpără 6 dulapuri, 52 mese și 100 de scaune noi. O masă, un scaun și un dulap costă 722 lei. Dacă masa este cu 95 de lei mai ieftină decât un dulap, iar un scaun costă cu 18 lei mai puțin decât o masă, calculați suma de bani necesară achiziționării întregului mobilier.

Soluție.



$$\text{Avem } 3 \cdot p + 18 \cdot 2 + 95 = 722 \Rightarrow 3 \cdot p + 131 = 722 \Rightarrow 3 \cdot p = 591 \Rightarrow p = 197.$$

Un scaun costă 197 lei.

O masă costă $197 + 18 = 215$ lei.

Un dulap costă $215 + 95 = 310$ lei.

Suma necesară achiziționării întregului mobilier este de

$$6 \cdot 310 + 52 \cdot 215 + 100 \cdot 197 = 1860 + 11180 + 19700 = 32740 \text{ lei.}$$

Barem.

| | |
|--|----|
| <p>Preț scaun p</p> <p>Preț masă $p + 18$</p> <p>Preț dulap $p + 18 + 95$</p> <p>722 lei</p> | 3p |
| $3 \cdot p + 18 \cdot 2 + 95 = 722 \Rightarrow 3 \cdot p + 131 = 722 \Rightarrow 3 \cdot p = 591 \Rightarrow p = 197$ | 1p |
| Un scaun costă 197 lei. O masă costă $197 + 18 = 215$ lei. Un dulap costă $215 + 95 = 310$ lei. | 2p |
| Suma necesară achiziționării întregului mobilier este de $6 \cdot 310 + 52 \cdot 215 + 100 \cdot 197 = 1860 + 11180 + 19700 = 32740$ lei. | 1p |

3. (7p) Aflați numerele naturale \overline{abcd} , dacă $7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^d = 2023$.

Supliment Gazeta Matematică Nr.10/2023

Soluție. a, b, c, d cifre, cu $a \neq 0$.

$7^d \leq 2023 \Rightarrow d$ poate fi 0, 1, 2 sau 3.

Dacă $d = 0 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^0 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 2022$, dar 2022 nu se împarte exact la 7.

Dacă $d = 1 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^1 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 2016 \Rightarrow \overline{abc} + 7 = 288 \Rightarrow \overline{abc} = 281$.

Dacă $d = 2 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^2 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 1974 \Rightarrow \overline{abc} + 7 = 282 \Rightarrow \overline{abc} = 275$.

Dacă $d = 3 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^3 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 1680 \Rightarrow \overline{abc} + 7 = 240 \Rightarrow \overline{abc} = 233$.

Deci, numerele căutate \overline{abcd} sunt 2811, 2752 și 2333.

Barem.

| | |
|--|----|
| a, b, c, d cifre, cu $a \neq 0$. $7^d \leq 2023 \Rightarrow d$ poate fi 0, 1, 2 sau 3. | 2p |
| Dacă $d = 0 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^0 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 2022$, dar 2022 nu se împarte exact la 7. | 1p |
| Dacă $d = 1 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^1 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 2016 \Rightarrow \overline{abc} + 7 = 288 \Rightarrow \overline{abc} = 281$. | 1p |
| Dacă $d = 2 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^2 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 1974 \Rightarrow \overline{abc} + 7 = 282 \Rightarrow \overline{abc} = 275$. | 1p |
| Dacă $d = 3 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^3 = 2023 \Rightarrow 7 \cdot (\overline{abc} + 7) = 1680 \Rightarrow \overline{abc} + 7 = 240 \Rightarrow \overline{abc} = 233$. | 1p |
| Deci, numerele căutate \overline{abcd} sunt 2811, 2752 și 2333. | 1p |

4. Se dă numărul $n = 24681012 \dots 20222024$, format prin scrierea alăturată a numerelor naturale pare de la 2 la 2024.

(2p) a) Aflați din câte cifre este format numărul n .

(5p) b) Aflați de câte ori este folosită cifra 7 în scrierea numărului n .

Ana Marcela Popa, Rădăuți

Soluție. a) În scrierea numărului n s-au scris 4 numere pare de o cifră, 45 numere pare de două cifre, 450 numere pare de trei cifre și 513 numere pare de patru cifre.

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 450 + 4 \cdot 513 = 4 + 90 + 1350 + 2052 = 3496.$$

Numărul natural n are 3496 cifre

b) Firul călăuzitor în această numărare este dat de apariția cifrei 7 pe poziția zecilor și pe poziția sutelor (pe poziția unităților și a miilor nu apare 7).

Pe poziția zecilor cifra 7 se folosește pentru scrierea numerelor:

(0) 70, 72, 74, 76, 78 (sunt 5 numere);

170, 172, 174, 176, 178 (sunt 5 numere);

270, 272, ..., 278 (sunt 5 numere);

.....

1970, 1972, ..., 1978 (sunt 5 numere);

Numerele evidențiate, citite pe verticală de sus în jos, sunt numere naturale consecutive care ne arată că avem 20 rânduri a câte 5 numere fiecare, adică 100 de numere pentru care se folosește cifra 7 pe poziția zecilor.

Pe poziția sutelor cifra 7 se va utiliza pentru a scrie următoarele numere:

700, 702, 704, ..., 796, 798. (sunt 50 de numere)

1700, 1702, ..., 1796, 1798. (sunt 50 de numere)

Sunt 100 de numere pentru care se folosește cifra 7 pe poziția sutelor.

În concluzie, se vor folosi $100 + 100 = 200$ de cifre de 7 pentru a scrie toate numerele naturale naturale pare de la 2 la 2024 .

Barem.

| | |
|---|----|
| <p>a) În scrierea numărului n s-au scris 4 numere pare de o cifra, 45 numere pare de două cifre, 450 numere pare de trei cifre și 513 numere pare de patru cifre.</p> <p>$1 \cdot 4 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 450 + 4 \cdot 513 = 3496$. Numărul natural n are 3496 cifre</p> | 2p |
| <p>b) Pe poziția zecilor cifra 7 se folosește pentru scrierea numerelor:</p> <p>70, 72, 74, 76, 78 (sunt 5 numere);</p> <p>170, 172, 174, 176, 178 (sunt 5 numere);</p> <p>270, 272, ..., 278 (sunt 5 numere);</p> <p>.....</p> <p>1970, 1972, ..., 1978 (sunt 5 numere);</p> <p>Avem 20 rânduri a câte 5 numere fiecare, adică 100 de numere pentru care se folosește cifra 7 pe poziția zecilor.</p> | 2p |
| <p>Pe poziția sutelor cifra 7 se va utiliza pentru a scrie următoarele numere:</p> <p>700, 702, 704, ..., 796, 798. (sunt 50 de numere)</p> <p>1700, 1702, ..., 1796, 1798. (sunt 50 de numere)</p> <p>Sunt 100 de numere pentru care se folosește cifra 7 pe poziția sutelor</p> | 2p |
| <p>În concluzie, se vor folosi $100 + 100 = 200$ de cifre de 7 pentru a scrie toate numerele naturale naturale pare de la 2 la 2024 .</p> <p>Cifra 7 apare pe poziția zecilor și pe poziția sutelor (pe poziția unităților și a miilor nu apare)</p> | 1p |

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.