CLASA a VII-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

a) Arătați că egalitatea $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ are loc pentru orice numere reale x, y.

b) Fie $a = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2024^2$ și $b = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2023^2$.

Arătați că numărul $(a-b)$ este multiplu de 2025.

Barem de notare:

a) Se demonstrează egalitatea $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$	**2p**
b) $a - b = (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2024^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2023^2)$ $= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + (2024^2 - 2023^2) =$	**2p**
$= (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + \cdots + (2024-2023)(2024+2023) =$ $= 1 + 2 + 3 + \cdots + 2024 =$	**2p**
$= \frac{(1+2024)2024}{2} =$ $= 2025 \cdot 1012$ care este multiplu de 2025.	**1p**

Problema 2.

Determinați numerele naturale a și b, știind că există un unic număr natural $n \in \mathbb{N}$ pentru care $a\sqrt{b+1} < \sqrt{n} < (a+1)\sqrt{b}$.

Barem de notare:

$a\sqrt{b+1} < \sqrt{n} < (a+1)\sqrt{b}$ $a^2(b+1) < n < (a+1)^2 b$	**1p**
Deoarece n este număr natural unic, este necesar ca $a^2(b+1)$, n și $(a+1)^2 b$ să fie numere naturale consecutive, deci $a^2(b+1) + 2 = (a+1)^2 b$	**2p**
Se obține $b = \frac{a^2+2}{2a+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2a^2+4}{2a+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2a^2+a}{2a+1} + \frac{-a+4}{2a+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow a - \frac{2a-8}{2a+1} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a - \frac{2a+1}{2a+1} - \frac{9}{2a+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - 1 - \frac{9}{2a+1} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow 2a + 1 \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\} \Rightarrow a \in \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$	**1p**
Se obțin $a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow n = 1$ $a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow n = 3$ $a = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow n = 49$ care îndeplinesc cerințele.	**3p**

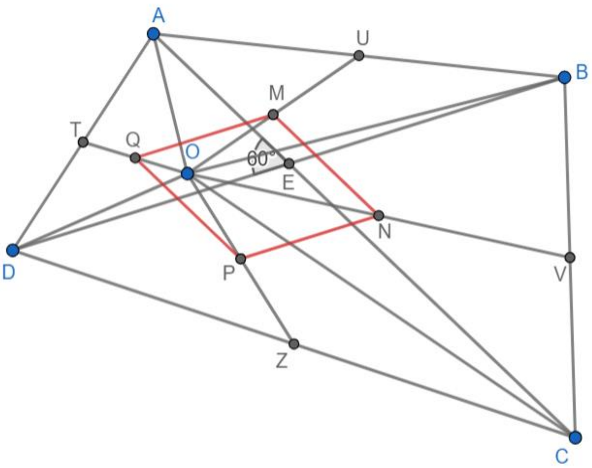
Problema 3.

Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AC \cap BD = \{E\}$, $m(\sphericalangle AED) = 60^\circ$, $AC = BD = 8$ cm. Dacă O este un punct în interiorul patrulaterului, iar punctele M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele medianelor $[OU]$, $[OV]$, $[OZ]$, $[OT]$ în triunghiurile OAB, OBC, OCD şi ODA, atunci:

a) Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este romb.

b) Calculați lungimea diagonalei MP.

Barem de notare:



a) Cum UV este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow UV = \frac{AC}{2} = 4\ cm$ şi $UV \parallel AC (1)$ Deoarece MN este linie mijlocie în $\Delta OUV \Rightarrow MN = \frac{UV}{2} = 2\ cm$ şi $MN \parallel UV (2)$ Din (1) şi (2) $\Rightarrow MN = 2\ cm$ şi $MN \parallel AC (3)$ Cum ZT este linie mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow ZT = \frac{AC}{2} = 4\ cm$ şi $ZT \parallel AC (4)$ Deoarece PQ este linie mijlocie în $\Delta OZT \Rightarrow PQ = \frac{ZT}{2} = 2\ cm$ şi $PQ \parallel ZT (5)$ Din (4) şi (5) $\Rightarrow$ $PQ = 2\ cm$ şi $PQ \parallel AC (6)$ Din (3) şi (6) $\Rightarrow MN \parallel PQ$ şi $MN = PQ = 2\ cm\ (7)$ Rezultă că $MNPQ$ este paralelogram.	**3p**
Cum VZ este linie mijlocie în $\Delta BDC \Rightarrow VZ = \frac{BD}{2} = 4\ cm$ şi $VZ \parallel BD (8)$ Deoarece NP este linie mijlocie în $\Delta OVZ \Rightarrow NP = \frac{VZ}{2} = 2\ cm$ şi $NP \parallel VZ (9)$ Din (8) şi (9) $\Rightarrow NP \parallel BD$ şi $NP = 2\ cm (10)$ Din (7) şi (10) $\Rightarrow$ paralelogramul $MNPQ$ are $MN = NP = 2\ cm$ şi este romb.	**2p**
b) Din (3) şi (10) avem că $MN \parallel AC$ şi $NP \parallel BD$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle MNP) = m(\sphericalangle AED) = 60^\circ$. Cum $MN = NP = 2\ cm$ şi $m(\sphericalangle MNP) = 60^\circ$, rezultă că ΔMNP este echilateral şi atunci $MP = MN = 2\ cm$.	**2p**

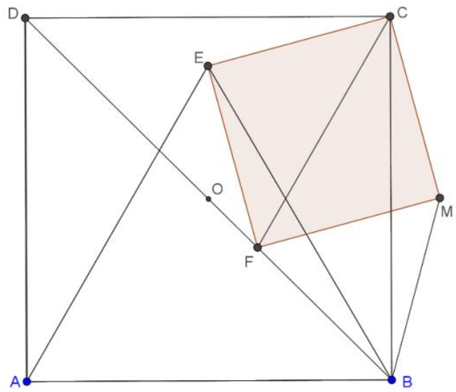
Problema 4.

În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră triunghiul ABE echilateral. Se construiește pătratul $CEFM$ astfel încât punctele F și M să fie în semiplane diferite față de dreapta BC. Arătați că:

a) Triunghiul BMF este echilateral.

b) Punctele B, F, D sunt coliniare.

Barem de notare:



a) $m(\measuredangle DAE) = m(\measuredangle DAB) - m(\measuredangle EAB) = 90° - 60° = 30°$ $m(\measuredangle CBE) = m(\measuredangle CBA) - m(\measuredangle EBA) = 90° - 60° = 30°$ $\begin{matrix}\Delta BCE \\ \Delta ADE\end{matrix}\left\{\begin{matrix} AD \equiv BC \\ AE \equiv BE \\ \measuredangle(DAE) \equiv \measuredangle CBE \end{matrix}\right\} \overset{L.U.L}{\Longrightarrow} \Delta ADE \equiv \Delta BCE \Rightarrow DE \equiv CE \Longrightarrow \Delta DEC$ isoscel	**2p**
În ΔBEC isoscel avem $m(\measuredangle CEB) = m(\measuredangle ECB) = \frac{180° - m(\measuredangle EBC)}{2} = 75°$ $\Longrightarrow m(\measuredangle DEC) = 360° - [m(\measuredangle AEB) + 2 \cdot m(\measuredangle BEC)]$ $= 360° - [60° + 2 \cdot 75°] = 150°$	**1p**
$\begin{matrix}\Delta ECD \\ \Delta MCB\end{matrix}\left\{\begin{matrix} EC \equiv MC \\ \measuredangle ECD \equiv \measuredangle MCB \\ \text{(au același complement)} \\ CD \equiv CB \end{matrix}\right. \overset{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta ECD \equiv \Delta MCB$	**1p**
$\Rightarrow \Delta MCB$ isoscel cu $m(\measuredangle CMB) = 150° \Rightarrow MB = DE = EC = FM$ $m(\measuredangle FMB) = m(\measuredangle CMB) - m(\measuredangle CMF) = 150° - 90° = 60°$ ΔFMB isoscel cu un unghi de $60° \Rightarrow \Delta FMB$ echilateral	**1p**
b) Din ΔFMB echilateral $\Rightarrow m(\measuredangle MFB) = 60°$ $m(\measuredangle DEF) = 360° - [m(\measuredangle DEC) + m(\measuredangle CEF)] = 360° - [150° + 90°] = 120°$	**1p**
Din DE=EC=EF $\Rightarrow \Delta DEF$ isoscel cu $m(\measuredangle DFE) = m(\measuredangle FDE) = \frac{180° - m(\measuredangle DEF)}{2} = 30°$ $m(\measuredangle BFM) + m(\measuredangle MFE) + m(\measuredangle EFD) = 60° + 90° + 30° = 180°$ $\Rightarrow B, F, D$ coliniare	**1p**

OBS. Orice rezolvare corectă și diferită de cea din barem se va puncta corespunzător!