CLASA a VIII-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Se consideră numerele reale pozitive x şi y care verifică relaţia

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2023} \qquad (*)$$

a) Ce valoare are numărul y, dacă $x=4046$?

b) Arătaţi că numărul $A=\sqrt{\left(\frac{x}{7}-289\right)\left(\frac{y}{7}-289\right)}$ este pătrat perfect, pentru orice numere reale pozitive x și y care verifică relația (*).

Barem de notare:

a)	$\frac{1}{y}=\frac{1}{2023}-\frac{1}{4046}$	**1p**
	$\frac{1}{y}=\frac{1}{4046}$	**1p**
	$y=4046$	**1p**
b)	$xy=2023(x+y)$	**1p**
	$A=\sqrt{\frac{xy}{49}-\frac{289}{7}(x+y)+289^2}$	**1p**
	$A=\sqrt{\frac{2023(x+y)}{49}-\frac{289}{7}(x+y)+289^2}$ $A=\sqrt{\frac{289(x+y)}{7}-\frac{289}{7}(x+y)+289^2}$	**1p**
	$A=289=17^2$	**1p**

Problema 2.

a) Se consideră numărul $x=\sqrt{8-2\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$.
Calculaţi $(x^2+2x+2)^{11}-24$.

b) Determinați cifrele nenule a și b, cu $a<b$, pentru care $\sqrt{\overline{0,a(b)}+\overline{0,b(a)}}$ este număr rațional.

Barem de notare:

a)	$x^2 = (8-2\sqrt{7}) + (8+2\sqrt{7}) - 2\sqrt{8^2-(2\sqrt{7})^2}$	**1p**
	$x^2 = 4$	**1p**
	$\sqrt{8-2\sqrt{7}} < \sqrt{8+2\sqrt{7}} \Rightarrow x<0 \Rightarrow x=-2$	**1p**
	$(x^2+2x+2)^{11} - 24 = [x(x+2)+2]^{11} - 24 = 2^{11} - 24 = 2024$	**1p**
b)	$\sqrt{\overline{0,a(b)} + \overline{0,b(a)}} = \sqrt{\frac{\overline{ab}-a}{90} + \frac{\overline{ba}-b}{90}} = \sqrt{\frac{10a+b-a+10b+a-b}{90}}$ $= \sqrt{\frac{10(a+b)}{90}} = \frac{\sqrt{a+b}}{3}$	**1p**
	Acest număr este rațional dacă $a+b$ este pătrat perfect, adică 1,4,9,16	**1p**
	Cum $a<b$, cifre nenule şi diferite de 9 $=> (a,b) \in \{(1,3),(1,8),(2,7),(3,6),(4,5)\}$	**1p**

Problema 3.

Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu muchia AB de lungime 6 cm și muchia SA de lungime 12 cm. Se construiesc bisectoarele $[BM$ şi $[BN$ ale unghiurilor $\widehat{SBC}$, respectiv $\widehat{SBA}$, cu $M \in (SC)$ și $N \in (SA)$.
a) Demonstrați că $MN||(ABC)$.
b) Calculați lungimea segmentului MN.

Barem de notare:

a)	$\sphericalangle SBC \equiv \sphericalangle SBA$ și $BM \equiv BN => \triangle BMC \equiv \triangle BNA\ (L.U.L)$ $=> MC \equiv NA\ (1)$ $SC \equiv SA => SM \equiv SN (2)$	**1p**
	Din (1), (2) $=> \frac{SM}{MC} = \frac{SN}{NA}$	**1p**

	$(prin\ Rec. Thales\ ) => \left.\begin{matrix} MN \vert\vert AC \\ AC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} => MN \parallel (ABC)$	**1p**
b)	În $\triangle SBC$, prin T. bisectoarei $=> \frac{MC}{SM} = \frac{BC}{BS} => \frac{12-SM}{SM} = \frac{6}{12}$ $=> SM = 8\ cm$	**1p**
	$AC = l\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ cm$	**1p**
	Din $MN \parallel AC$, prin T. F.A $=> \frac{MN}{AC} = \frac{SM}{SC}$	**1p**
	$\frac{MN}{6\sqrt{2}} = \frac{8}{12} => MN = 4\sqrt{2}\ cm.$	**1p**

Problema 4.

Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 8$ cm şi muchia laterală $AA' = 8\sqrt{2}$ cm.

a) Aflaţi lungimea segmentului BC'.

b) Demonstraţi că $BC \perp AO$, unde $\{O\} = BC' \cap B'C$.

c) Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele BC' şi $A'C$.

Barem de notare:

a)	Din Teorema lui Pitagora în $\triangle BCC' \Rightarrow BC' = 8\sqrt{3}cm$	**2p**
b)	Fie E mijlocul (BC) $OE \perp BC, AE \perp BC \Rightarrow BC \perp (AOE)$	**1p**
	$AO \subset (AOE) \Rightarrow BC \perp AO$	**1p**
c)	Fie $D \in AC$ astfel încât $AC = CD$ $A'C'DC$ paralelogram $\Rightarrow C'D \vert\vert A'C$ şi $\prec (BC'; A'C) = \prec (BC', C'D) = \prec (BC'$	**1p**
	$\triangle BCD$ isoscel, cu $\prec BCD = 120°, BC = CD = 8cm \Rightarrow BD = 8\sqrt{3cm}$	**1p**
	$\triangle BC'D$ echilateral $\Rightarrow m(\prec BC'D) = 60°$	**1p**

OBS. Orice rezolvare corectă și diferită de cea din barem se va puncta corespunzător!