

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1

Să se calculeze:

2p a) Numărul $[lg2024]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x .

5p b) Suma $S = [lg1] + [lg2] + [lg3] + \dots + [lg2024]$.

SUBIECTUL 2

2p a) Să se arate că numărul $z \in \mathbb{C}$ este real dacă și numai dacă $z = \bar{z}$.

5p b) Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Să se arate că $z = \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1z_2z_3} \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL 3

Numerele reale $a, b, c \in (1, \infty)$ sunt lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că:

$$\frac{\log_b c}{b+c-a} + \frac{\log_c a}{c+a-b} + \frac{\log_a b}{a+b-c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Suplimentul Gazetei Matematice

SUBIECTUL 4

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] + \{x\}^{2024}$.

3p a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

4p b) Demonstrați că f este inversabilă și determinați f^{-1} .

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

Notă: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7. Se cer rezolvări complete.

Succes!