OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1

Să se calculeze

(2p) a) Numărul $[lg2024]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui *x*.

(5p) b) Suma S=$[lg1] + [lg2] + [lg3] + \ldots + [lg2024]$.

Soluție:

a)$[lg2024]$=*3,* deoarece $2024 \in [1000, 10000)$ ***2p***

b)$[lgk]$=0 pentru $k \in \{1, 2, \ldots 9\}$ ***1p***

$[lgk]$=1 pentru $k \in \{10, 11, \ldots 99\}$ ***1p***

$[lgk]$=2 pentru $k \in \{100, 101, \ldots 999\}$ ***1p***

$[lgk]$=*3* pentru $k \in \{1000, 1001, \ldots, 2024\}$ ***1p***

S_1=0+1$\cdot 90 + 2 \cdot 900$+3$\cdot$ 1025 =4965 ***1p***

SUBIECTUL 2

2p a) Să se arate că numărul $z \in \mathbb{C}$ este real dacă şi numai dacă $z = \overline{z}$.

5p b) Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Să se arate că $z = \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1z_2z_3} \in \mathbb{R}$.

Soluţie

a) Fie $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. **2p**

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ **1p**

$$\bar{z} = \frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3)(\bar{z}_3 + \bar{z}_1)}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3} =$$ **2p**

$$= \frac{\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1}\right)}{\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3}} = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}{z_1 z_2 z_3} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$ **2p**

SUBIECTUL 3

Numerele reale *a, b, c* $\in (1, \infty)$ sunt lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că:

$$\frac{log_b c}{b + c - a} + \frac{log_c a}{c + a - b} + \frac{log_a b}{a + b - c} \geq \frac{9}{a + b + c}$$

Suplimentul Gazetei Matematice

Soluție:

Cum *a, b, c* sunt lungimile laturilor unui triunghi, avem $b + c - a > 0$, $a + c - b > 0$, $a + b - c > 0$ ***1p***

Aplicăm inegalitatea mediilor ($M_a \geq M_g$, apoi $M_g \geq M_h$)

$$\frac{\frac{log_b c}{b + c - a} + \frac{log_c a}{c + a - b} + \frac{log_a b}{a + b - c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{log_b c}{b + c - a} \cdot \frac{log_c a}{c + a - b} \cdot \frac{log_a b}{a + b - c}}$$ ***2p***

$$\underset{log_b c \cdot log_c a \cdot log_a b = 1}{=} \sqrt[3]{\frac{1}{b + c - a} \cdot \frac{1}{c + a - b} \cdot \frac{1}{a + b - c}}$$ ***1p***

$$\geq \frac{3}{(b + c - a) + (c + a - b) + (a + b - c)} = \frac{3}{a + b + c}$$ ***2p***

Deci $\frac{log_b c}{b+c-a} + \frac{log_c a}{c+a-b} + \frac{log_a b}{a+b-c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

1p

I.S.J. Prahova

SUBIECTUL 4

Fie funcția $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] + \{x\}^{2024}$.

3p a)Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe ℝ.
4p b)Demonstrați că f este inversabilă și determinați f^{-1}.

Soluție:

a) Fie $x, y \in \mathbb{R}\ cu\ x < y$

$$f(y) - f(x) = [y] + \{y\}^{2024} - [x] - \{x\}^{2024}$$
$$= [y] - [x] + \{y\}^{2024} - \{x\}^{2024}$$ **1p**

Dacă $[y] > [x] \Rightarrow [y] - [x] \geq 1\ și\ \{y\}^{2024} - \{x\}^{2024} \in (-1,1) \Rightarrow f(y) > f(x)$ **1p**

$[y] = [x] \Rightarrow \{y\} > \{x\} \Rightarrow \{y\}^{2024} > \{x\}^{2024} \Rightarrow f(y) > f(x)$ **1p**

Deci f este strict crescătoare pe ℝ

b) Funcţia f este strict crescătoare pe ℝ, de unde rezultă că este injectivă. **1p**

Fie $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y \Rightarrow [y] + \{y\} = [x] + \{x\}^{2024} \Rightarrow [x] = [y]\ și\ \{x\} = \sqrt[2024]{\{y\}} \Rightarrow x = [y] + \sqrt[2024]{\{y\}} \Rightarrow$ f surjectivă. **1p**

f injectivă şi surjetivă ⇒ f bijectivă ⇒ f inversabilă şi **2p**

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = [x] + \sqrt[2024]{\{x\}}$$

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.

I.S.J. Prahova