# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

## – ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

## Clasa a XII-a

### SUBIECTUL 1

Fie mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Arătați că:

**4p** a)$(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), +)$ este grup abelian;

**3p** b)Funcția $f: \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, dată de $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$ este un automorfism de grup.

***

### SUBIECTUL 2

Calculați

$$\int \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} dx, x \in (0, \infty)$$

*Suplimentul Gazetei Matematice*

### SUBIECTUL 3

Se consideră funcțiile $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x^2 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ și $g: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dată de $g(x) = xf(x)$.

**3p** a) Arătați că $f$ admite o primitivă ce se anulează în 0.

**4p** b) Determinați funcția $G: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ care este primitiva funcției $g$ cu proprietatea că $G(0) = \frac{4047}{2}$.

*Profesor Octavian Purcaru, Ploiești*

### SUBIECTUL 4

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $f: G \to G$ o funcţie injectivă astfel încât

$$f(x^2 \cdot f(y)) = x^{-1} \cdot f(xy), \forall x, y \in G$$

**3p** a) Să se arate că $x^2 = e, \forall x \in G$

**4p** b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

***

**Notă:** Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7. Se cer rezolvări complete.

*Succes!*