OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –
Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{5})=\{a+b\sqrt{5}\ /\ a,b\in\mathbb{Q}\}$. Arătați că:

4p a)$(\mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ +)$ este grup abelian;

3p b)Funcția $f:\mathbb{Q}(\sqrt{5})\to\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, dată de $f(a+b\sqrt{5})=a-b\sqrt{5}$ este un automorfism de grup.

Soluție:

$a)$ $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ parte stabilă în raport cu "+" ***1p***

"+" este asociativă și comutativă pe $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ***1p***

Elementul neutru este $0\in\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ***1p***

Orice element din $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ are un opus tot în $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ***1p***

b) f morfism: $f\left((a_1+b_1\sqrt{5})+(a_2+b_2\sqrt{5})\right)=f\left((a_1+b_1\sqrt{5})\right)+f\left((a_2+b_2\sqrt{5})\right)$ ***1p***

f injectivă ***1p***

f surjectivă ***1p***

SUBIECTUL 2

Calculați $\int\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx,\ x\in(0,\infty)$

Suplimentul Gazetei Matematice

Fie I$=\int \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx = \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ***1p***

Notăm $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ***2p***

$I_t = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+t}}dt = \int \frac{2t+1-1}{\sqrt{t^2+t}}dt = \int \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t}}dt - \int \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}dt$

$I_t = 2\int \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}dt - \int \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}dt = 2\sqrt{t^2+t} - ln\left(2t+1+2\sqrt{t^2+t}\right) + \mathcal{C}$ ***3p***

$I = 2 \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} - ln\left(2\sqrt{x}+1+2\sqrt{x+\sqrt{x}}\right) + \mathcal{C}$ ***1p***

SUBIECTUL 3

Se consideră funcțiile $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ și $g: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dată de $g(x) = xf(x)$.

3p a) Arătați că *f* admite o primitivă ce se anulează în 0.

4p b) Determinați funcția *G*: $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ care este primitiva funcției *g* cu proprietatea că $G(0) = \frac{4047}{2}$.

Profesor Octavian Purcaru, Ploiești

Soluție:

a) Cum *f* este continuă, o primitivă a sa este $F: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ ***2p***

$F(0) = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$ ***1p***

b) $g(x) = x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$, calculăm $\int x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}dx$;

Notăm $x^2 = t$; avem $I_t = \frac{1}{2}\int t\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt = \frac{1}{2}\int t\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt =$ ***1p***

$= -\frac{1}{2}\int (1+t)\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{1}{2}\int (1+t)\left(\sqrt{1-t^2}\right)' dt =$ ***1p***

$=-\frac{1}{2}(1+\mathrm{t})\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)dt=\frac{1}{4}(-\mathrm{t}-2)\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{4}\arcsin t+C$ ***1p***

Deci $G(x)=\frac{1}{4}(-x^2-2)\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{4}arcsinx^2+c;$ avem $G(0)=\frac{-1}{2}+c$, deci c=2024, $G(x)=\frac{1}{4}(-x^2-2)\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{4}arcsinx^2$ +2024 ***1p***

SUBIECTUL 4

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $f\colon G\to G$ o funcţie injectivă astfel încât

$$f(x^2\cdot f(y))=x^{-1}\cdot f(xy),\forall x,y\in G$$

(3p) a) Să se arate că $x^2=e,\forall x\in G$

(4p) b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

***

Soluție:

a) Pentru $x=e\Rightarrow f\left(e^2\cdot f(y)\right)=e^{-1}f(ey)\Rightarrow$ ***2p***
$f\left(f(y)\right)=f(y)$, f injectivă $\Rightarrow f(y)=y,\forall y\in G$
Avem $f(x^2y)=x^2y, f(xy)=xy,\forall x,y\in G$ ***1p***
Se deduce $x^2y=x^{-1}xy\Rightarrow x^2=e,\forall x\in G$ ***1p***

b) $\forall x,y\in G\Rightarrow x^2=e, y^2=e,(xy)^2=e$ ***1p***

Obținem $x^2y^2=(xy)^2\Leftrightarrow xxyy=xyxy,\forall x,y\in G$, de unde deducem folosind regulile de simplificare la stânga și la dreapta $xy=yx$, $\forall x,y\in G\Rightarrow(G,\cdot)$ este grup abelian ***2p***

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.