OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1

Se consideră numărul

$$\mathrm{A}(m) = (m^{2024} + 2024m^2 + 5)(m^{2024} + 2024m^2 - 1) + 9, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

5p a) Arătați că oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$, numărul $\mathrm{A}(m)$ este pătrat perfect.

2p b) Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul?

***

Soluție:

a) Putem nota $(m^{2024} + 2024m^2 + 5)$=*t;* ***1p***

expresia devine $t(t-6)$+9=$t^2 - 6t + 9$= ***2p***

=$(t-3)^2$=$(m^{2024} + 2024m^2 + 2)^2$ care este pătrat perfect ***2p***

b) Avem $m^{2024} + 2024m^2 \geq 0$ oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$ ***1p***

așadar $\mathrm{A}(m) \geq (0+2)^2$, deci valoarea minimă este 4. ***1p***

SUBIECTUL 2

Fie cubul ABCDEFGH , în care punctele O,P,Q, R sunt centrele fețelor ABCD, BCGF, EFGH, și ADHE.

3p *a)*Să arate că triunghiul DBG este echilateral.
4p *b)*Să se arate că patrulaterul OPQR este pătrat.

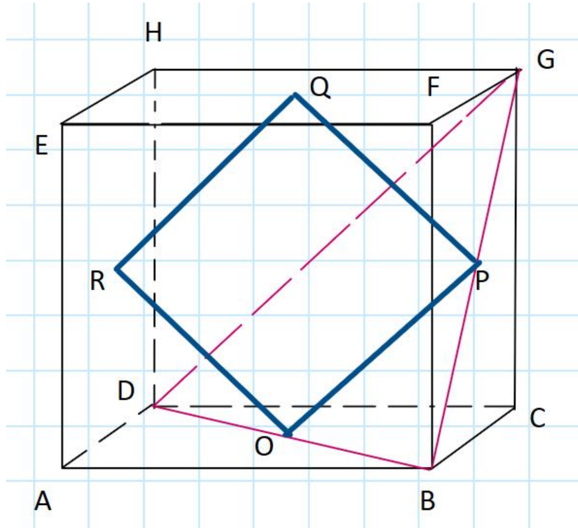
***

Soluție:

a)ABCD,BCGF,CDHG sunt pătrate congruente ⇒ **1p**

$\Rightarrow BD \equiv BG \equiv DG \Rightarrow$ **1p**

⇒ triunghiul DBG este echilateral **1p**



b) În triunghiul BGD, OP este linie mijlocie $\Rightarrow \mathrm{OP} \parallel \mathrm{DG}, \mathrm{OP} = \frac{1}{2}DG$

În triunghiul EGD, RQ este linie mijlocie $\Rightarrow \mathrm{RQ} \parallel \mathrm{DG}, \mathrm{RQ} = \frac{1}{2}DG$ **2p**

$\Rightarrow$ OPRQ este paralelogram

În triunghiul EDB, OR este linie mijlocie $\Rightarrow \mathrm{OR} \parallel \mathrm{EB}, \mathrm{OR} = \frac{1}{2}EB,\ \ DG = EB \Rightarrow OP = OR \Rightarrow$ OPRQ este romb **1p**

$EB \parallel \mathrm{HC}, \mathrm{HC} \perp \mathrm{DG} \Rightarrow \mathrm{EB} \perp \mathrm{DG} \Rightarrow \mathrm{OP} \perp \mathrm{OR}$

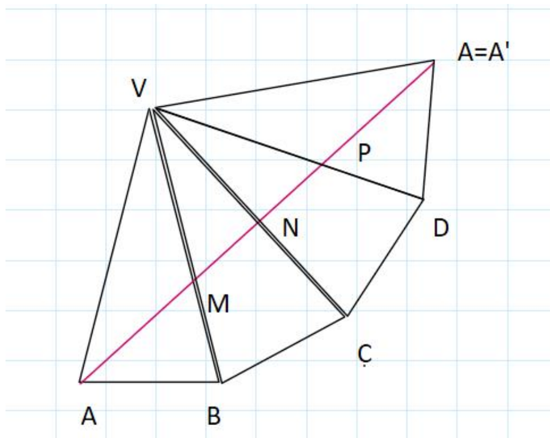
$\Rightarrow$ OPRQ este pătrat **1p**

SUBIECTUL 3

Fie *VABCD* o piramidă patrulateră regulată. O furnică pleacă din punctul *A* și ajunge tot în punctul *A,* mergând pe toate fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că lungimea parcursă pe fața *VAB* este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața *VBC,* determinați măsurile unghiurilor feței *VAB.* *Suplimentul Gazetei Matematice*

Soluție:

Desfășurăm în plan piramida tăind muchia VA; **1p**



drumul cel mai scurt este segmentul care unește punctele A din desfășurare (putem nota AA') **1p**

$\sphericalangle AVM \equiv \sphericalangle MVN \equiv \sphericalangle NVP \equiv \sphericalangle PVA$

Deci VN bisectoare și înălțime în $\Delta VAA'$ isoscel **1p**

În ΔVAN, VM bisectoare, aplicăm teorema bisectoarei $\frac{AM}{MN} = \frac{VA}{VN}$, **1p**

1p

deci $VA=2VN$ în triunghiul ΔVAN dreptunghic, deci $\sphericalangle AVN=60°$

Așadar $\sphericalangle AVB = 30°$, $\sphericalangle VAB = 75°$, $\sphericalangle VBA = 75°$ **1p**

1p

SUBIECTUL 4

3p a)Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, pentru orice numere reale x, y, z.

4p b) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z = 2$. Să se arate că cel puțin unul dintre numerele $a = \frac{3x+y}{2} - 3xy$, $b = \frac{3y+z}{2} - 3yz$ și $c = \frac{3z+x}{2} - 3xz$ este pozitiv.

Prof.Anton Negrilă, Ploiești

Soluţie

$a)\ x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow$ **1p**

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ **2p**

b) Arătăm că suma $a + b + c \geq 0$ **1p**

$a + b + c = 2(x + y + y) - 3(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx \geq 0$ **2p**

$\Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre numerele $a = \frac{3x+y}{2} - 3xy,\ b = \frac{3y+z}{2} - 3yz$ și $c = \frac{3z+x}{2} - 3xz$ este pozitiv ***1p***

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.