OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1

Determinați cifrele nenule și distincte a, b, c cu $a < b < c$, pentru care numărul $x = \sqrt{\overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)}}$ este rațional.

***

Soluţie

$$\overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)} = \frac{10(a+b+c)}{9} \Rightarrow$$ **3p**

$$\Rightarrow a+b+c = 10k^2, k \in \mathbb{N}^*, a+b+c \leq 27 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a+b+c = 10$$ **2p**

$$(a,b,c) \in \{(1,2,7),(1,3,6),(1,4,5),(2,3,5)\}$$ **2p**

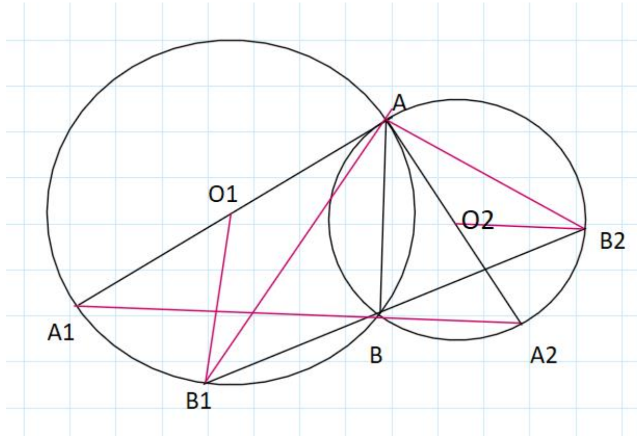
SUBIECTUL 2

Cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ sunt secante în punctele A și B. Dreapta d trece prin punctul B și este secantă celor două cercuri în punctele $B_1 \in C_1(O_1, r_1)$ și $B_2 \in C_2(O_2, r_2)$. Punctele A_1 și A_2 sunt diametral opuse punctului A în cercurile C_1, C_2. Demonstrați că:

3p a) Punctele A_1, A_2 și B sunt coliniare.

4p b) $\sphericalangle O_1 B_1 A \equiv \sphericalangle O_2 B_2 A$

Soluție:



$a)$ $\sphericalangle A_1BA$=90°*(*înscris în semicerc*)* **1p**

$\sphericalangle A_2BA$=90°*(*înscris în semicerc*)* **1p**

$\sphericalangle A_1BA_2$ =180°, deci **1p**

A_1, A_2 și B sunt coliniare

b)

$\sphericalangle O_1B_1A \equiv \sphericalangle O_1AB_1$ pentru că $\triangle O_1B_1A$ isoscel; **1p**

$\sphericalangle O_2B_2A \equiv \sphericalangle O_2AB_2$ pentru că $\triangle O_2B_2A$ isoscel; **1p**

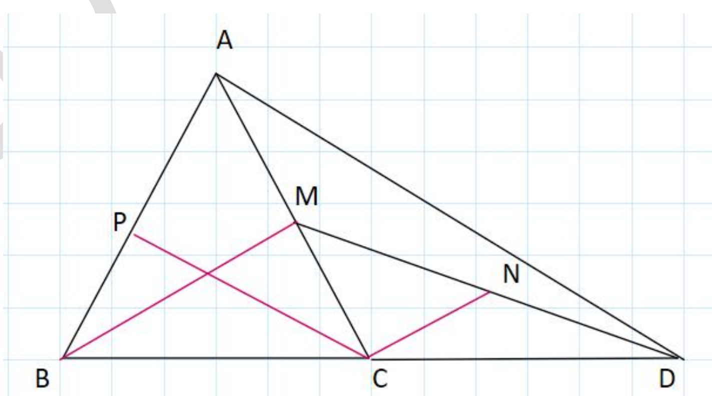
avem $\sphericalangle O_1AB_1 \equiv \sphericalangle A_1AB_1 \equiv \sphericalangle A_1BB_1 \equiv \sphericalangle A_2BB_2 \equiv \sphericalangle O_2B_2A$ **2p**

SUBIECTUL 3

Fie *ABC* un triunghi echilateral și *D* simetricul lui *B* față de *C*. Notăm cu *M* mijlocul segmentului *AC* și cu *N* mijlocul segmentului *DM*. Arătați că $AD = 4CN$.

Gazeta matematică

Soluție:



Fie P mijlocul segmentului AB. Atunci CP este linie mijlocie în triunghiul ABD⇒ $CP \parallel AD$ *și* $CP = \frac{1}{2}AD$ **2p**

În triunghiul BMD, CN este linie mijlocie $\Rightarrow CN \parallel BM$ *și* **2p**

$CN = \frac{1}{2} BM$

Triunghiul ABC echilateral$\Rightarrow BM = CP \Rightarrow$ **1p**

$\Rightarrow AD = 4CN$ **2p**

SUBIECTUL 4

2p a)Demonstrați că $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ și că $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

5p b) Determinați numere întregi *a* și *b,* pentru care

$$\frac{2a}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} - \frac{3b}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = 5 + 13\sqrt{2}$$

Profesor Anton Negrilă, Ploiești

Soluție:

$a)(1+\sqrt{2})^2 = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$, deci$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ ***1p***

$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 3-2\sqrt{2}$, deci$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ ***1p***

b) $\frac{2a}{\sqrt{2}+1} - \frac{3b}{\sqrt{2}-1} = 5+13\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2a(\sqrt{2}-1)-3b(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 5+13\sqrt{2}$ ***2p***

$\sqrt{2}(2a-3b) - 2a - 3b = 5 + 13\sqrt{2}$, cu *a* și *b* întregi ***1p***

deci $2a-3b$=13 și $-2a-3b$=5 ***1p***

adică *a*=2, *b*= -3 ***1p***

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.