OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –
Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1

Se consideră numerele pozitive a şi b.

(3p) a)Să se arate că $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq 4$.

(4p) b) Să se arate că $\left(\frac{a}{b}+1\right)^n+\left(\frac{b}{a}+1\right)^n \geq 2^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie

a) $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{a}+1\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ **1p**

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$ **1p**

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq 4$$ **1p**

b) $\left(\frac{a}{b}+1\right)^n+\left(\frac{b}{a}+1\right)^n \geq 2\sqrt{\left(\frac{a}{b}+1\right)^n\cdot\left(\frac{b}{a}+1\right)^n}=$ **2p**

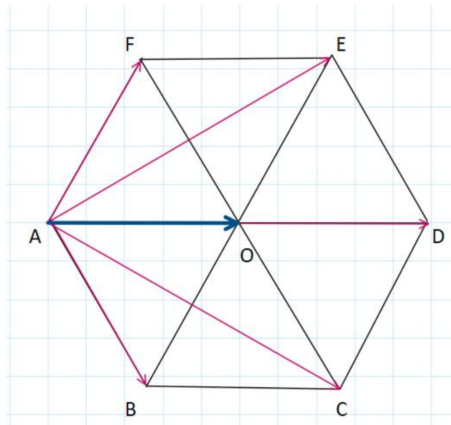
$$=2\sqrt{\left[\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{a}+1\right)\right]^n} \geq 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}$$ **2p**

SUBIECTUL 2

Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=6\,\overrightarrow{AO}$.

***

Soluție:



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$ deoarece *ABOF* romb **1p**

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$ și $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ **2p**

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$ **1p**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=$ **1p**

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=$ **1p**

$3\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{AO}=6\overrightarrow{AO}$ **1p**

SUBIECTUL 3

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}$.

Suplimentul Gazeta Matematică

Soluție:

“ $\Rightarrow$ "

Dacă triunghiul ABC este echilateral ⇒ G=I ⇒ $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ **3p**

“ $\Leftarrow$ "

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ **2p**

$\Rightarrow\vec{0}+3\overrightarrow{GI}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ ⇒G=I⇒triunghiul ABC este echilateral **2p**

SUBIECTUL 4

Determinați numerele reale x pentru care $2\{x\}^2 < \{x\}$, cu proprietatea că cel mai apropiat întreg de x este $3x - [x] - 6\{x\} - 1$.

Gazeta Matematică

Soluție

Dacă $2\{x\}^2 < \{x\}$, cum $\{x\} \in [0, 1)$, obținem $\{x\} < \frac{1}{2}$ ***1p***

Dacă $\{x\} < \frac{1}{2}$, avem că cel mai apropiat întreg de x este $[x]$ ***1p***

$3x - [x] - 6\{x\} - 1 = [x]$ ***1p***

$3[x] + 3\{x\} - [x] - 6\{x\} - 1 = [x]$ ***1p***

$[x] - 1 = 3\{x\} \in \mathbb{Z}$, deci $3\{x\} \in \{0, 1, 2\}$ din care doar 1 convine ***1p***

$3\{x\}=1$, $\{x\} = \frac{1}{3}$ ***1p***

$[x] = 2$, deci $x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ ***1p***

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.