INSPECTORATUL
ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3p a) Arătați că există numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $C = aA + bB$.

4p b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$C^n = a_n A + b_n B$ și determinați a_n și b_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Suplimentul Gazetei Matematice

SUBIECTUL 2

Determinați numerele *a* și *b* reale astfel încât

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+2}-ax-b\right)=2.$$

***

SUBIECTUL 3

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_{n+1} = \frac{2024+2025\cdot a_n}{a_n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 = 1$.

4p a)Demonstrați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

3p b) Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{ln2024-lna_n} < 23$.

Profesor Militaru Claudiu, Ploiești

SUBIECTUL 4

Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ ecuația $X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gazeta Matematică

Notă: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7. Se cer rezolvări complete.

Succes!