OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

Clasa a V-a

SUBIECTUL 1

Să se demonstreze că numărul $m \cdot n$ este pătrat perfect, unde

$m = 2024 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2023)$, iar n este cel mai mic număr natural de patru cifre, care împărțit la 117 dă restul 88.

Soluție:

$m = 2024 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2023) = 2024 + 2 \cdot 2023 \cdot 2024 : 2$ ***1p***

$= 2024 + 2023 \cdot 2024 = 2024(1 + 2023) = 2024^2$ ***2p***

$n : 117 = k$ rest $88 \Rightarrow n = 117 \cdot k + 88$ ***1p***

$k = 8 \Rightarrow n = 117 \cdot 8 + 88 = 1024$ ***2p***

$m \cdot n = 2024^2 \cdot 1024 = 2024^2 \cdot 32^2 = (2024 \cdot 32)^2$ care este pătrat perfect ***1p***

SUBIECTUL 2

Să se calculeze pătratul numărului $\overline{ab}$, știind că numărul $\overline{aaaa} + 101(a + b)$ este pătrat perfect.

$\overline{aaaa} + 101(a + b) = 1111a + 101a + 101b$ **1p**

$= 1212a + 101b = 101(12a + b)$ **2p**

$101(12a + b)$ este pătrat perfect dacă $12a + b$ este 101, 404, ... **1p**

a și b sunt cifre, deci singura variantă este $12a + b = 101$ **1p**

care se obține pentru $a = 8$ și $b = 5$ **1p**

Pătratul numărului 85 este $85^2 = 7225$ **1p**

SUBIECTUL 3

Fie $S(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Determinați numerele naturale n pentru care $n + S(n) = 2025$

Gazeta matematică

Dacă numărul n are trei cifre egalitatea este imposibilă, deoarece $n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026$ ***1p***

Dacă n are patru cifre egalitatea din enunţ devine $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2025 \Rightarrow$ ***1p***

$1001a + 101b + 11c + 2d = 2025 \Rightarrow a \leq 2$ ***1p***

Pentru $a = 1$ se obţine $b = 9, c = 9, d = 8 \Rightarrow \overline{abcd} = 1998$ ***2p***

Pentru $a = 2$ se obţine $b = 0, c = 1, d = 6 \Rightarrow \overline{abcd} = 2016$ ***2p***

SUBIECTUL 4

Se consideră numerele

$a = 9^{2024} - 8 \cdot 9^{2023} - 8 \cdot 9^{2022} - 8 \cdot 9^{2021} - \ldots - 8 \cdot 9^2 - 8 \cdot 9 - 8$ şi

$b = 4^{2024} + 4^{2023} + 4^{2022} + \ldots + 4^2 + 4 + 1.$

3p a)Să se arate că $a = 1$.

4p b)Să se arate că $a + 3b$ este pătrat perfect.

Prof. Anton Negrilă

a) $a = 9^{2024} - 8 \cdot 9^{2023} - 8 \cdot 9^{2022} - 8 \cdot 9^{2021} - \ldots - 8 \cdot 9^2 - 8 \cdot 9 - 8 = 9^{2023}(9 - 8) - 8 \cdot 9^{2022} - 8 \cdot 9^{2021} - \ldots - 8 \cdot 9^2 - 8 \cdot 9 - 8 = 9^{2023} - 8 \cdot 9^{2022} - 8 \cdot 9^{2021} - \ldots - 8 \cdot 9^2 - 8 \cdot 9 - 8 = 9^{2022}(9 - 1) - 8 \cdot 9^{2021} - 8 \cdot 9^{2020} - \ldots - 8 \cdot 9^2 - 8 \cdot 9 - 8 = \ldots = 9 - 8 = 1$ ***1p*** ***2p***

b) $3b = 3(4^{2024} + 4^{2023} + 4^{2022} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) = 4^{2025} - 1$ ***3p***

1p

$a + 3b = 4^{2025} = \left(2^{2025}\right)^2 \Rightarrow$ $a + 3b$ este pătrat perfect

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.Nu se acordă fracțiuni de punct.