OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(3p) a) Arătați că există numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $C = aA + bB$.

(4p) b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $C^n = a_n A + b_n B$ și determinați a_n și b_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Suplimentul Gazetei Matematice

Soluţie

a) $C = aA + bB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ **2p**

$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ -a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \text{ și } b = \frac{5}{3}$$ **1p**

b) $AB = BA = O_2, A^2 = 3A, B^2 = 3B \Rightarrow C^2 = \frac{2^2}{3} \cdot A + \frac{5^2}{3} \cdot B$ **1p**

Se demonstrează folosind metoda inducţiei matematice că este adevărată propoziţia $P(n): C^n = \frac{2^n}{3} \cdot A + \frac{5^n}{3} \cdot B, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

$\Rightarrow a_n = \frac{2^n}{3}$ şi $b_n = \frac{5^n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

SUBIECTUL 2

Determinați numerele a și b reale, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+2}-ax-b\right)=2.$$

***

Soluție:

Dacă $a<2$, obținem $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+2}-ax-b\right)=\infty$, ceea ce nu convine; așadar $a\geq 2$ ***1p***

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+2}-ax-b\right)=$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)+\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-(a-1)x-b\right)$ ***1p***

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\right)=\frac{1}{2}$ ***1p***

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-(a-1)x-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2-(a-1)^2x^2-2(a-1)bx-b^2}{\sqrt{x^2+x+2}+(a-1)x+b}\right)=$ ***1p***

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2a-a^2)x^2+(1-2ab+2b)x+2-b^2}{\sqrt{x^2+x+2}+(a-1)x+b}=\frac{3}{2}$, deci $2a-a^2=0$, dar $a\geq 2$, așadar $a=2$. ***1p***

$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-2b)x+2-b^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x+b}=\frac{3}{2}$, deci $\frac{1-2b}{2}=\frac{3}{2}$, cu $b=-1$ ***2p***

SUBIECTUL 3

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_{n+1}=\frac{2024+2025\cdot a_n}{a_n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_1=1$.

4p a)Demonstrați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

3p b) Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{ln2024-lna_n}<23$

$a)a_{n+1}-a_n=\frac{2024+2023a_n-a_n^2}{a_n+2}=\frac{(2024-a_n)(1+a_n)}{a_n+2}$. **1p**

Cum $a_1 < 2024$, presupunem că $a_n < 2024$ și demonstrăm (inducție) că $a_{n+1} < 2024 \Leftrightarrow \frac{2024+2025\cdot a_n}{a_n+2} < 2024 \Leftrightarrow 2024 + 2025a_n < 2024a_n ++ 4048 \Leftrightarrow a_n < 2024$, adevărat . Deci $a_n < 2024 , \forall n \in N^*$ **2p**

rezultă $a_{n+1} - a_n > 0 , \forall n \in N^*$, adică șirul este strict crescător și mărginit superior, deci convergent ($a_n > 0 , \forall \in N^*$) **1p**

b) Fie $l = \lim_{n\to\infty} a_n \in R$, din recurență rezultă $l = \frac{2024+2025\cdot l}{l+2} \Leftrightarrow l^2 - 2023l - 2024 = 0$, deci $l = 2024$. **1p**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{ln2024 - lna_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}\right) \cdot ln\frac{2024}{a_n}}$$ **1p**

$$= \frac{1}{2\sqrt{2024}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{ln\left(1 + \frac{2024 - a_n}{a_n}\right)}{\frac{2024 - a_n}{a_n}} \cdot \frac{2024 - a_n}{a_n}} = \frac{1}{2\sqrt{2024}}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{2024 - a_n}{a_n}} =$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2024}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2024-a_n)(1+a_n)}{a_n+2}}{\frac{2024-a_n}{a_n}} = \frac{1}{2\sqrt{2024}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)\cdot a_n}{a_n+2} = \frac{1}{2\sqrt{2024}} \cdot \frac{2025\cdot 2024}{2026} = \frac{2025}{2026} \cdot \frac{\sqrt{2024}}{2} < \frac{\sqrt{2025}}{2} = \frac{45}{2} < 23 .$$ **1p**

SUBIECTUL 4

Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ ecuația $X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gazeta Matematică

Soluție:

$X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$; $X^{2024}=X^{2023}\cdot X = X\cdot X^{2023}$ **1p**

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot X = X\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & d \\ f & d & e \\ i & g & h \end{pmatrix}$

$\Rightarrow c=d=h, a=e=i, b=f=g$, deci $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ **1p**

$\det X^{2023} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det X = 1$ **1p**

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **1p**

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=1$

Deci $a+b+c=1$, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2$, de unde găsim doar $(a,b,c)\in\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ **1p**

1p

Verificând aceste soluții, avem $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **1p**

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.