OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 17.02.2024

Clasa a VII-a - BAREM

Problema 1

Se consideră numerele:

$a = \sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3}+4\right)^2} + \sqrt{(-4)^2} + \sqrt{2025}$ și

$b = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2024\cdot 2025}}$

Calculați rădăcina pătrată a numărului $n = a \cdot b + 20$.

Barem:

$a = \sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3}+4\right)^2} + \sqrt{(-4)^2} + \sqrt{2025} =$

$= |3-2\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-3| - |\sqrt{3}+4| + |-4| + |45| =$..........1p

$= 2\sqrt{3} - 3 + 3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 4 + 4 + 45 =$..........1p

$=45$..........1p

$b = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2024\cdot 2025}} =$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\sqrt{3}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025}\sqrt{2024}} =$..........1p

$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} =$..........1p

$= 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$..........1p

$\sqrt{n} = \sqrt{a\cdot b + 20} = \sqrt{45\cdot\frac{44}{45} + 20} = \sqrt{64} = 8$..........1p

Problema 2

Arătați că există o infinitate de perechi de numere reale (x,y) care verifică relația
$|x+1| + |x-2| + |y-3| + |x-y| = 4.$

Barem:

Aplicăm inegalitatea modulului și obținem
$|x+1|+|y-3|+|x-y| \geq |x+1+(-y+3)+(y-x)| = 4$..2p
Ținând cont de relația dată deducem $|x-2| = 0$ deci $x = 2$
Deducem că $|y-3|+|2-y| = 1$..2p
Pentru $y < 2$ relația devine $3-y+2-y = 1$ deci $y = 2$, contradicție
Pentru $2 \leq y \leq 3$ relația devine $3-y+y-2 = 1$, adevărat deci y ia o infinitate de valori cuprinse între 2 și 3, dar și y=2 și y=3
Pentru $y > 3$ obținem $y-3+y-2 = 1$ echivalent cu $y = 3$,contradicție...............................2p
Astfel există o infinitate de perechi $(x,y) \in \{(2,a) | 2 \leq a \leq 3, a \in \mathbb{R}\}$..................................1p

Problema 3

În pătratul *ABCD*, notam cu *E* și *F* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *BC*.
Fie $\{M\} = DF \cap CE$. Demonstrati ca $AM \equiv AD$.

Barem:

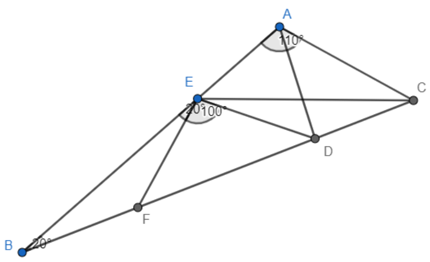
Conform cazului (CC) avem $\Delta DCF \equiv \Delta CBE \Longrightarrow \measuredangle BEC \equiv \sphericalangle DFC \Longrightarrow \measuredangle DFC + \measuredangle BCE = 90^0 \Longrightarrow$ $\sphericalangle CMF = 90^0$. ……………………………………..……………………………………2p
Fie $\{P\} = DA \cap CE$. Atunci triunghiul DMP este dreptunghic.
$\Delta EAP \equiv \Delta EBC\ (CU) \Longrightarrow AP \equiv BC \equiv AD$ ……………………………………………………3p
Cum triunghiul DMP este dreptunghic si MA este mediana corespunzatoare ipotenuzei $\Longrightarrow$
$AM \equiv AD \equiv AP$…………………………..……………………………………………….………..2p

Problema 4

Considerăm triunghiul *ABC* cu ∡*BAC*=110° și ∡*ABC*=20°. Fie punctele *E* pe latura *AB* și *F* pe latura *BC* astfel încât *AE*=*EF*=*BF*. Aflați măsura unghiului *CEF*.

(Gazeta Matematică 11/2023)

Barem:



∡ACB=50°
EF≡BF⇒ ΔBEF-isoscel ⇒ ∡BEF=∡EBF=20°
⇒ $\measuredangle EFC = 40°$ 1p
Fie D∈BC astfel încât EF≡ED ⇒ ΔDEF-isoscel ⇒ ∡EFD=∡EDF=40° ⇒ ∡FED=100° 2p
⇒ ∡AED=180°– 120° =60°
ED≡EF≡AE ⇒ ΔDEA-isoscel ⇒ ΔDEA-echilateral ⇒AD≡ED≡AE.................................... 2p
∡DAC=110°–60°=50° și ∡ACD=50° ⇒ ΔCDA-isoscel ⇒ AD≡DC ⇒ ED≡DC
∡EDC=180°–40°=140° ⇒ ∡DEC=(180°–140°):2=20° ⇒ ∡FEC=100°+ 20° =120° 2p