OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 17.02.2024

Clasa a VIII-a - BAREM

Problema 1

Arătați că, dacă a, b, c sunt numere raționale nenule, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, atunci numărul $N=\left(\frac{a\cdot b}{c}+1\right)\left(\frac{b\cdot c}{a}+1\right)\left(\frac{a\cdot c}{b}+1\right)$ este nenegativ, iar $\sqrt{N}\in\mathbb{Q}$

Barem:

Din relația: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=a\cdot b\cdot c$ 1p

$\frac{a\cdot b}{c}+1=\frac{a\cdot b+c}{c}=\frac{a\cdot b\cdot c-b\cdot c-a\cdot c+c}{c}=a\cdot b-b-a+1=(a-1)(b-1)$ 2p

Analog se obțin relațiile: $\frac{b\cdot c}{a}+1=(b-1)(c-1)$

$\frac{a\cdot c}{b}+1=(a-1)(c-1)$ 2p

Atunci $N=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{N}\in\mathbb{Q}$ 2p

Problema 2

Fie cifrele nenule a, b, c. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{ab\sqrt{ab}}{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2}+\frac{bc\sqrt{bc}}{\overline{bc}^2+\overline{cb}^2}+\frac{ac\sqrt{ac}}{\overline{ca}^2+\overline{ac}^2}\leq\frac{a+b+c}{242}$$

(Gazeta Matematică 10/2023)

Barem:

Folosim inegalitatea $m_p\geq m_a$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2}{2}}\geq\frac{\overline{ab}+\overline{ba}}{2}\Leftrightarrow\frac{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2}{2}\geq\left(\frac{\overline{ab}+\overline{ba}}{2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2}{2}\geq\frac{(10a+b+10b+a)^2}{4}\ \Big|\cdot 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{ab}^2+\overline{ba}^2\geq\frac{(11a+11b)^2}{2}\Leftrightarrow\overline{ab}^2+\overline{ba}^2\geq\frac{121(a+b)^2}{2}\ \Big|:ab\sqrt{ab}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2}{ab\sqrt{ab}}\geq\frac{121(a+b)^2}{2ab\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\frac{ab\sqrt{ab}}{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2}\leq\frac{2ab\sqrt{ab}}{121(a+b)^2}(1)$ 2p

$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \,\big|\, + 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$

$\Rightarrow \frac{2ab\sqrt{ab}}{121(a+b)^2} \leq \frac{2ab\sqrt{ab}}{121\cdot 4ab} \Leftrightarrow \frac{2ab\sqrt{ab}}{121(a+b)^2} \leq \frac{\sqrt{ab}}{242}(2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{ab\sqrt{ab}}{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2} \leq \frac{\sqrt{ab}}{242}$ (3) 1p

$Analog, \Rightarrow \frac{bc\sqrt{bc}}{\overline{bc}^2+\overline{cb}^2} \leq \frac{\sqrt{bc}}{242}(4)și\ \frac{ac\sqrt{ac}}{\overline{ca}^2+\overline{ac}^2} \leq \frac{\sqrt{ca}}{242}(5)$. Adunând membru cu membru relațiile (3), (4), (5) obținem:

$\frac{ab\sqrt{ab}}{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2} + \frac{bc\sqrt{bc}}{\overline{bc}^2+\overline{cb}^2} + \frac{ac\sqrt{ac}}{\overline{ca}^2+\overline{ac}^2} \leq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{242}$ (6) 2p

Folosim inegalitatea $m_g \leq m_a$ vom avea $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \sqrt{ca} \leq \frac{c+a}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a + b + c$$

Înlocuind în relația (6) vom obține:

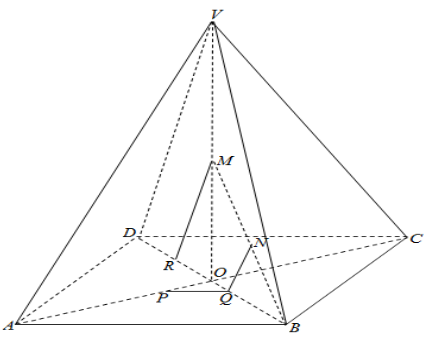
$\frac{ab\sqrt{ab}}{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2} + \frac{bc\sqrt{bc}}{\overline{bc}^2+\overline{cb}^2} + \frac{ac\sqrt{ac}}{\overline{ca}^2+\overline{ac}^2} \leq \frac{a+b+c}{242}$ 2p

Problema 3

Fie *VABCD* o piramidă patrulateră regulată. Punctul *M* este mijlocul înălțimii *VO*, punctul *N* este mijlocul segmentului *BM*, iar $P \in [AO]$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$. Demonstrați că $PN \parallel (VDC)$

(Gazeta matematică)

Barem:



Fie $Q \in (OB)$ astfel încât $PQ \parallel AB$ și R mijlocul lui DO.

Din $PQ \parallel AB$ obținem $\dfrac{OQ}{QB} = \dfrac{OP}{PA} = \dfrac{1}{3}$ ……………………......……………..……….2p

Notăm $OQ = a \Rightarrow BQ = 3a$ și $OB = OD = 4a$, $OR = 2a$, $RQ = 3a$

Deci, $RQ = QB$. În ΔBMR, NQ este linie mijlocie $\Rightarrow NQ \parallel MR$ ………….……….…....….3p

În ΔVOD, MR este linie mijlocie $\Rightarrow MR \parallel VD \Rightarrow NQ \parallel VD$ ……………......………….1p

Dar, $PQ \parallel CD$ din construcție $\Rightarrow (PQN) \parallel (VDC)$. Cum $NP \subset (PQN) \Rightarrow PN \parallel (VDC)$ 1p

Problema 4

Piramida *VABCD* are baza *ABCD* dreptunghi. Punctele *P* și *Q* sunt mijloacele segmentelor *VB*, respectiv *CV*.

a) Arătați că dreptele *AP* și *DQ* sunt concurente.

b) Dacă $AP \cap DQ = \{M\}$, aflați unghiul format de dreptele *VM* și *BC*.

Barem:

a) PQ este linie mijlocie în ΔVBC ⇒PQ∥BC și $PQ = \frac{BC}{2}$. 1p

ABCD – dreptunghi ⇒AD∥BC și AD≡BC

⇒PQ∥AD și $PQ = \frac{AD}{2}$. (1) 1p

⇒PADQ- trapez ⇒ AP și DQ sunt concurente 1p

b) Din relația (1) ⇒PQ este linie mijlocie în ΔMAD

⇒ P este mijlocul lui MA. 1p

Dar P este și mijlocul lui VB ⇒ MBAV este paralelogram. ⇒ VM∥AB................. 2p

⇒ ∡(VM;BC)= ∡(AB;BC)=90° 1p