OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 17.02.2024

Clasa a VI-a - BAREM

Problema 1

Determinați numerele naturale *x, y, z* știind că sunt adevărate relațiile

$x^2+y^2+z^2+t^2=3000$ și $\frac{x}{x+2}=\frac{y}{y+4}=\frac{z}{z+6}=\frac{t}{t+8}$

Barem:

Din $\frac{x}{x+2}=\frac{y}{y+4}$ avem xy+4x=xy+2y deci 2x=y...1p
Analog , din $\frac{x}{x+2}=\frac{z}{z+6}$ avem 3x= z...1p
$\frac{x}{x+2}=\frac{t}{t+8}$ avem 4x=t...1p
Înlocuim în prima relație și obținem $x^2+4x^2+9x^2+16x^2=3000$............................1p
$x^2=100$, deci $x=10$..1p
y=20, z=30, t=40...2p

Problema 2

Aflați numerele naturale nenule *a, b* știind că [*a,b*]+2*a*+2*b*+4(*a,b*)=2023. Am notat [*a,b*] cel mai mic multiplu comun al numerelor *a* și *b,* iar (*a,b*) cel mai mare divizor comun al numerelor *a* și *b*.

(Gazeta Matematică)

Barem:

Notam d=(a,b), atunci a=dk, iar b=dl, unde (k,l)=1 iar din [a,b]·(a,b)=ab
avem [a,b]=dkl 1p
Înlocuim și obținem:
dkl+2dk+2dl+4d=2023⇒d(kl+2k+2l+4)=2023 ⇒ d(k+2)(l+2)=2023 .... 1p
2023=7·17·17
Cazul k=1 nu convine, deci vom avea k+2≠l+2 și k+2 > 2 și l+2 > 2. Analizăm cazurile:

I. d=1
   1. k+2=7 și l+2=289 ⇒ k=5 și l=287 ⇒ a=5 și b=287
   2. k+2=289 și l+2=7 ⇒ k=287 și l=5 ⇒ a=287 și b=5
   3. k+2=17 și l+2=119 ⇒ k=15 și l=117, care nu sunt prime între ele.
   4. Analog, k+2=119 și l+2=17 ⇒ k=117 și l=15, care nu sunt prime între ele.......... 2p

II. d=7, nu convine deoarece am avea k+2=l+2=17, iar k≠l 1p

III. d=17 ⇒ (k+2)(l+2)=119 ⇒
   1. k+2=7 și l+2=17⇒ k=5 și l=15 care nu sunt prime între ele
   2. Analog, k+2=17 și l+2=7 nu convine 1p

IV. d=17·17 ⇒ (k+2)(l+2)=7 nu convine deoarece k+2≠1 și l+2≠1

V. d=7·17 ⇒ (k+2)(l+2)=17 nu convine deoarece k+2≠1 și l+2≠1

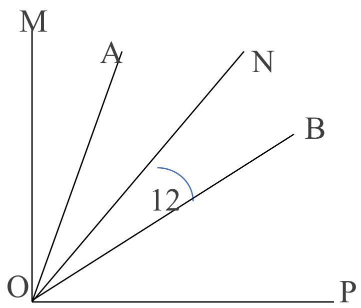
VI. d=2023, nu convine deoarece (k+2)(l+2)>1 ....1p

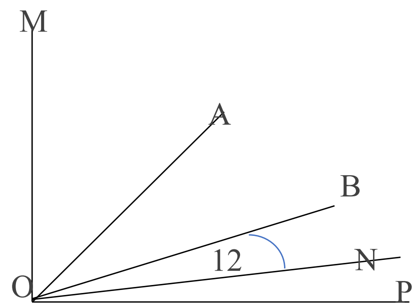
S={(5;287);(287;5)}

Problema 3

Fie unghiurile $\measuredangle MON$ și $\measuredangle NOP$ adiacente complementare, astfel încât $[OA$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle MON$, iar $[OB$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle AOP$. Știind că $\measuredangle NOB$=12^0, să se determine măsurile unghiurilor $\measuredangle MON$ și $\measuredangle NOP$.

Barem:





Distingem două cazuri

Cazul I	**Cazul II**	
[ON ∈ int (AOB)	[ON ∈ int (BOP)	...................1p

Cazul I ([ON ∈ int (AOB))

[OA bisectoarea unghiului MON => MOA = AON = x, MON=2x
[OB bisectoarea unghiului AOP => AOB = BOP = x + 12 ....1p
MOA + AOB + BOP = x + x+12 + x+12 = 90 ....1p
3x=66 => x= 22 => MON=44^0, NOP=46^0 ....1p

Cazul II ([ON ∈ int (BOP))

[OA bisectoarea unghiului MON => MOA = AON = x, MON=2x
[OB bisectoarea unghiului AOP => AOB = BOP = x - 12 ....1p
MOA + AOB + BOP = x + x - 12 + x - 12 = 90 ....1p
3x=114 => x= 38 => MON=76^0, NOP=14^0 ....1p

Problema 4

Fie punctele coliniare A, B, C, D în această ordine, astfel încât $5 \cdot AB = 9 \cdot AC - 4 \cdot AD$ și $BD = 18\ cm$.

a) Să se afle lungimile segmentelor BC și DC.

b) Dacă P este mijlocul segmentului AD și $P \in (BC)$, precizați valoarea maximă posibilă, număr natural, a lungimii segmentului AD.

Barem:

a) Dacă $AB = x, BC = y, CD = z$ avem:

$5x = 9(x+y) - 4(x+y+z)$ 1p

$5x = 9(x+y) - 4(x+18) \Rightarrow y = 8$ și $z = 10 \Rightarrow BC = 8cm$ și $CD = 10cm$ 2p

b) $P \in (BC)$ și $B \in (AC) \Rightarrow AP > AB$....................1p

$\frac{x+y+z}{2} > x \Rightarrow x < y + z$

$x < 18 \Rightarrow x + y + z < 18 + y + z \Rightarrow AD < 36$....................2p

AD − număr natural, AD maxim $\Rightarrow$ 35cm