OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 17.02.2024

Clasa a V-a - BAREM

Problema 1

Fie numerele $x = [3^{121}: 9^{60} + (5^3)^2: (5^2)^2]: 2^2$ și

$y = 10^2: \{23 + 34: [(2 \cdot 3^2)^2: 18 - 17^0: 1^{2023}]\}$

Arătați că numărul $x^{2021} + 2022^y$ nu este pătrat perfect.

Barem:

$x = [3^{121}: 3^{120} + 5^6: 5^4]: 2^2$..1p

$x = 7$..1p

$y = 10^2: \{23 + 34: [18^2: 18 - 1]\}$..1p

$y = 4$..1p

$U(x^{2021} + 2022^y) = U(7^{2021} + 2022^4) = 3$, deci nu e p.p.. 3p

Problema 2

Știind că numărul natural A dă restul 7 prin împărțire la 10, respectiv restul 9 prin împărțire la 11, aflați restul pe care îl dă A prin împărțire la 110.

(Gazeta Matematică 11/2023)

Barem:

A:10 = c (rest 7) $\overset{T.Î.R}{\Longrightarrow}$ A=10c+7

A:11 = q (rest 9) $\overset{T.Î.R}{\Longrightarrow}$ A=11q+9 .... 1p

Înmulțim prima relație cu 11 și a doua cu 10 și obținem:

11A=110c+77

10A=110q+90 .... 1p

Scădem membru cu membru ultimele două relații și obținem A = 110(c – q) – 13 .... 1p

⇒A = 110(c – q) – (110 – 97)⇒ A=110(c – q) – 110 + 97 .... 2p

⇒ A=110(c – q – 1) + 97. Cum 97 < 110 rezultă că
restul pe care îl dă A prin împărțire la 110 este 97. .... 2p

Problema 3

Suma a trei numere naturale este 84. Se știe că numărul mijlociu este egal cu semisuma celorlalte două numere, iar cel mai mic dintre numere este cu 36 mai mic decât suma celorlalte două numere. Aflați cele trei numere.

Barem:

Fie $a < b < c$ (orice altă ordine este corectă). Atunci: $a + b + c = 84$, $2b = a + c$ și $a + 36 = b + c$. Cum $2b = a + c$, adunând b la aceasta egalitate obținem: $3b = a + b+c$,
adică $3b = 84$, de unde oținem $b = 28$……………..…………………………………………3p
Procedam analog (asemănător) în egalitatea $a + 36 = b + c$ obtinem: $2a + 36 = a +b +c$ de unde vom avea $a = 24$……………………………………………………………………………………3p
În final, $c = 84 – (24 – 28) = 32$. ……………………..…………………………………1p

Problema 4

Pe o dreaptă sunt scrise numele de la 0 la 2022. Ștefan șterge numerele din trei în trei, începând de la 0, iar Amira numerele din cinci în cinci, începând de la 0. Un număr este considerat șters definitiv dacă este șters de amândoi copiii. Câte numere reușește să șteargă Ștefan ? Dar Amira? Câte numere reușesc să șteargă definitiv cei doi copii?

(Gazeta Matematică 9/2023- enunț modificat)

Barem:

Ștefan șterge numerele 0, 3, 6, 9 ……. adică numerele divizibile cu 3 …………….…………….1p
În total $2022:3+1=674+1=675$ numere ………………………………………………………..1p
Amira șterge numerele 0,5,10,15,….. adică numerele divizibile cu 5 ………………………...1p
$2022:5=404$ rest 2 deci șterge $404+1=405$ numere ………………………………………………1p
Cum 3 și 5 sunt prime între ele iar $3\cdot5=15$, vor fi șterse definitiv numerele divizibile cu 15………2p
$2022:15=134$ rest 12 deci $134+1=135$ numere ….…………………………………………………1p