OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

17.02.2024

Clasa a VIII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Determinați numerele întregi x pentru care: $x^2 \leq 32 - 10\sqrt{7}$.

Soluție

Cum $32 - 10\sqrt{7} = \left(5 - \sqrt{7}\right)^2$……………………………………………………………..…1p

Deci, avem de rezolvat $x^2 \leq \left(5 - \sqrt{7}\right)^2 <=> |x| \leq \left|5 - \sqrt{7}\right| <=> |x| \leq 5 - \sqrt{7}$

$<=> \sqrt{7} - 5 \leq x \leq 5 - \sqrt{7}$……………………..……………………………………....2p

În plus $2 < 5 - \sqrt{7} < 3$ $=>$ $-2 > \sqrt{7} - 5 > -3$ $=>$ $3 > \sqrt{7}$ $și$ $2 < \sqrt{7}$……..2p

Atunci $x \in \mathbb{Z}$ și $\sqrt{7} - 5 \leq \mathrm{x} \leq 5 - \sqrt{7} => \mathrm{x} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$……………………………2p

Subiectul 2

Fie x,y două numere reale. Arătați că:

a) $x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}$.

b) $xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$.

c) Dacă x+y=10, arătați că $2x^2 + 2y^2 - 3xy \geq 25$.

Soluție:

$(x+y)^2 \equiv x^2+y^2+2xy,\ (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy$..................................2p

a)finalizare..1p

b)finalizare..1p

c)Din $a)$și $b) \Rightarrow\ x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = 50$..1p

xy$\leq \frac{(x+y)^2}{4} = 25 \Rightarrow -xy \geq -25$..1p

$2x^2+2y^2-3xy = 2(x^2+y^2)-3xy \geq 2\times 50 - 3\times 25 = 25$......................................1p

Subiectul 3

Fie ABCD un tetraedru cu [AB]≡ $[CD]$ $și$ $[AD] \equiv [BC]$. Dacă M si N sunt mijloacele laturilor [AC] si [BD], demonstrați ca MN este distanța dintre dreptele [AC] si [BD].

Soluție:

$\varDelta ABD \equiv \varDelta CDB(LLL) \Rightarrow [AN]=[CN] \Rightarrow \varDelta ANC\ isoscel \Rightarrow\ MN \perp AC\ (1)$..................3p

Analog, ⊿ABC≡ ⊿CDA(LLL)⇒ $MN \perp BD\quad (2)$ 3p

Din (1) și (2) ⇒ $d(AC,BD) = MN$..1p

Subiectul 4.

Fie ABCDA'B'C'D' un cub, punctele O și O' centrele fețelor ABCD, respectiv A'B'C'D'. Considerăm punctele $P \in (AD')$ $și$ $Q \in (B'C)$ și notăm cu M mijlocul segmentului PQ. Demonstrați că $PQ \parallel (ABC)$ dacă și numai dacă $M \in (OO')$.

Soluție;

„⇒ ” PQ∥ (ABC) $și$

P' $= pr_{(ABC)}\ P$ și Q'=$pr_{(ABC)}\ \Rightarrow PP' = QQ'$ 1p

$\Rightarrow\ \varDelta PP'A \equiv \varDelta QQ'C\ (C.U)$ 1p

$\Rightarrow AP' \equiv CQ' \Rightarrow O \in$ [P'Q']

$\Rightarrow O\ mijlocul\ lui\ [P'Q']$ 1p

$\Rightarrow pr_{(ABC)}$ M=O $\Rightarrow M \in OO'$..1p

,,$\Leftarrow$'' $M \in OO' \Rightarrow pr_{(ABC)}$ M=O $\Rightarrow O \in [P'Q']$ și $P'O = Q'O \Rightarrow AP' = CQ'$..........................1p

$\Rightarrow \triangle PP'A \equiv \triangle QQ'C\ (C.U) \Rightarrow PP' = QQ' \Rightarrow PQO'P'\ dreptunghi$..................................1p

$\Rightarrow PQ \parallel P'Q'$ și $P'Q' \subset (ABC) \Rightarrow PQ \parallel (ABC)$..1p