OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-17.02.2024
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

SUBIECTUL I

Pe mulțimea $G = (0,2)$ definim legea de compoziție: $x \circ y = \frac{xy}{xy-x-y+2}$.

Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(x \circ x \circ \dots \circ x)}_{de\ „n"ori}.$$

$$x \circ x = \frac{x^2}{x^2-2x+2} = \frac{2x^2}{x^2+(2-x)^2}$$	**2p**
$P(k): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ „k"\ ori} = \frac{2x^k}{x^k+(2-x)^k}$, $P(k+1): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ „k+1"\ ori} = \frac{2x^{k+1}}{x^{k+1}+(2-x)^k}$	**2p**
$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ „k+1"\ ori} = \frac{2x^k}{x^k+(2-x)^k} \circ x = \frac{\frac{2x^{k+1}}{x^k+(2-x)^k}}{\frac{2x^{k+1}}{x^k+(2-x)^k} - \frac{x^k}{x^k+(2-x)^k} - x + 2} = \frac{2x^{k+1}}{x^{k+1}+(2-x)^k}$, $P(k) \to P(k+1)$	**1p**
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2x^n}{x^n+(2-x)^n} = \begin{cases} 0; x \in (0,1) \\ 2; x \in (1,2) \\ 1; x = 1 \end{cases}$$	**2p**

SUBIECTUL II

Fie $a,b,c,d \in \boldsymbol{R}$ **astfel încât** $a+b=t \neq 0$ **,** $ab=cd$ **și**

$$M = \left\{ A(x) \middle| A(x) = \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix}, x \in \boldsymbol{R} - \left\{ \frac{-1}{t} \right\} \right\}$$ **o submulțime a lui** $M_3(\boldsymbol{R})$ **.**

Demonstrați că $(\mathrm{M},\cdot)$ este un grup abelian izomorf cu grupul $(\mathrm{G},\circ)$, unde $G=\boldsymbol{R}-\left\{\frac{-1}{t}\right\}$ și $x\circ y=x+y+txy$ **.**

Avem $A(x)\cdot A(x)=A(x+y+txy)\in \mathrm{M},\forall x,y\in \boldsymbol{R}-\left\{\frac{-1}{t}\right\}$. **Înmulțirea matricelor este asociativă;** $A(0)\in M$ **este element neutru la înmulțirea matricelor din** M **;** $A\left(\frac{-x}{1+tx}\right)\in M$ **este simetrica lui** $A(x)$ **în raport cu înmulțirea matricelor din M.** **Comutativitatea înmulțirii matricelor din matricelor din** M **este asigurată de relația** $A(x)\cdot A(x)=A(x+y+txy),\forall x,y\in \boldsymbol{R}-\left\{\frac{-1}{t}\right\}$. **Deducem că sunt verificate axiomele grupului abelian.** **Funcția** $f:G\to M,\ f(x)=A(x)$ **este bijectivă și** $f(x\circ y)=f(x+y+txy)=A(x+y+txy)=A(x)A(y)=f(x)f(y),\forall x,y\in G$ **.** **Rezultă că** f **este un izomorfism de la grupul** $(\mathrm{G},\circ)$ **la grupul** $(\mathrm{M},\cdot)$**,** **de unde concluzia.**	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL III

Să se arate că:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx\le\frac{\pi^3}{96}.$$

$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow x>0\Rightarrow \operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$	**2p**
$\frac{\pi}{2}=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{\operatorname{arctg} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$, $\quad \frac{\pi^2}{4}\ge 4\operatorname{arctg} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$	**3p**
$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\operatorname{arctg} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\pi^2}{16}dx=\frac{\pi^2}{16}x\Big\vert_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^3}{96}$	**2p**

SUBIECTUL IV

Să se calculeze:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2^x \mathrm{tg}^2 x}{1+2^x} + \frac{3^x \mathrm{tg}^4 x}{1+3^x} \right) dx.$$

Fie $y = -x \Rightarrow dx = -dy\,, I = -\int_{1}^{-1} \left(\frac{2^{-x} \mathrm{tg}^2 x}{1+2^{-x}} + \frac{3^{-x} \mathrm{tg}^4 x}{1+3^{-x}} \right) dx$	**3p**
$2I = \int_{-1}^{1} (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x)\, dx\,, \qquad 2I = 2\int_{0}^{1} \mathrm{tg}^2 x (1 + \mathrm{tg}^2 x)\, dx$	**3p**
$I = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} \Big\vert_0^1, \qquad I = \frac{\mathrm{tg}^2 1}{3}$	**1p**