OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-17.02.2024
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $det(A) = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}$.

a) Calculați: $det(A^2), det(2024A), det(k^2 I_2)$.

b) Arătați că $det(A^2 + 2024A + k^2 I_2)$ este un pătrat perfect.

a) $\det(A^2) = k^4$; $\det(2024A) = 2024^2 k^2$; $\det(k^2 I_2) = k^4$	3p
b) Se aplică relația lui Hamilton-Cayley: $A^2 - Tr(A)A + \det(A)\, I_2 = O_2$	1p
Urma matricei A este numărul întreg t și obținem: $A^2 + k^2 I_2 = tA$.	1p
$A^2 + 2024A + k^2 I_2 = (t + 2024)A$;	1p
$\det(A^2 + 2024A + k^2 I_2) = (t + 2024)^2 k^2$, adică un pătrat perfect.	1p

Subiectul 2

Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție:

Se motivează relația $XA = AX$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.	1p
Se demonstrează forma matricei X, mai exact $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$.	1p
Se deduce că $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.	2p
Avem $a^n = 1$ cu soluția $a = \varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\, sin\frac{2k\pi}{n}, 0 \le k \le n-1$.	1p
și $na^{n-1}b = 2024 \Leftrightarrow nb = 2024a \Leftrightarrow b = \frac{2024}{n}\varepsilon_k$.	1p
Soluțiile sunt: $X_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_k & \frac{2024}{n}\varepsilon_k \\ 0 & \varepsilon_k \end{pmatrix}, 0 \le k \le n-1$.	1p

Subiectul 3

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit recurent prin $x_0 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

***Soluție*:**

Studiul monotoniei sirului	1p
Demonstratia nemarginirii sirului	1p
Aplicarea criteriului Cesaro-Stolz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n}\cdot n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$	2p
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e^{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{e^{x_{n+1}}-e^{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e^{x_n}(e^{x_{n+1}-x_n}-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n}}{\frac{e^{x_{n+1}-x_n}-1}{x_{n+1}-x_n}(x_{n+1}-x_n)} = 1$	2p
(pentru ca $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-x_n} = 0$).	1p

Subiectul 4

Determinați numerele reale $a, b \in \mathbb{R}$ știind că $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(n\pi\sqrt[3]{n^3+an^2+bn+5}\right) = -1$

***Soluție*:**

Deoarece $\cos t = \cos(t+2k\pi)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ și $n(n+1)$ este număr par pentru orice număr natural n, avem: $-1 = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(n\pi\left(\sqrt[3]{n^3+an^2+bn+5} - (n+1)\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(n\pi\left(\frac{(a-3)n^2+(b-3)n+4}{\sqrt[3]{(n^3+an^2+bn+5)^2}+\left(\sqrt[3]{n^3+an^2+bn+5}\right)(n+1)+(n+1)^2}\right)\right)$.	2p 1p 2p
Se impun condițiile $a-3=0$ și $\cos\frac{\pi(b-3)}{3} = -1$, de unde obținem a=3 si b=6k, $k \in \mathbb{Z}$	2p