OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-17.02.2024
Clasa a VII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

a) Se consideră numerele:

a = $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{27}}+\frac{4}{\sqrt{48}}\right) : \frac{2}{3}$,

b = $\frac{\sqrt{26^2-10^2}}{\sqrt{20^2-16^2}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left|2\sqrt{5}-5\right| - (5-2\sqrt{5})$,

Calculați (a + b) · | a - b |.

b) Calculați pătratul numărului c, unde:

c = $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}$;

***Soluție*:**

	Punctaj
a) a = $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) : \frac{2}{3}$ a = $\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}$ => a = $2\sqrt{3}$ ………………………………………………………..	1p
b = $\frac{\sqrt{576}}{\sqrt{144}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + 5 - 2\sqrt{5} - 5 + 2\sqrt{5}$ b = $\frac{24}{12} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 3\sqrt{2}$ …………………………………………………………	1p
(a+b)·|a-b| = $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}) \cdot \|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\| = (2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ = $(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2 = 6$ ………………………………………………………………	2p
b) c = $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}$ c = $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2}$………………….…………………..	2p
c = $\frac{11-1}{2} = 5;\ c^2 = 25$ …..…………………………………………………….	1p

Subiectul 2

Demonstrați că numerele x, y sunt iraționale, unde:

x = $\sqrt{1018^{2024}+1019^{2024}}$; y = $\sqrt{3^{2020}+3^{1010}}$.

Soluție:

u($1018^{2024}\ +\ 1019^{2024}$) = 7 ⇨ $1018^{2024}+1019^{2024}$ nu este pătrat perfect..	2p
⇨ $x\ \in R \setminus Q$	1p
3^{2020} + 3^{1010} = $3^{1010}(3^{1010}+1)$	1p
$(3^{1010})^2$ < $3^{1010}(3^{1010}+1)$<$(3^{1010}+1)^2$..	2p
⇨ $3^{2020}+3^{1010}$ nu este pătrat perfect, pentru că este cuprins între pătratele perfecte a două numere consecutive	
⇨ y ∈R\Q..	1p

Subiectul 3

În patrulaterul convex ABCD, măsurile unghiurilor verifică relațiile:

2· $\measuredangle$A = $\measuredangle$B, 4· $\measuredangle$C= $\measuredangle$B, 5· $\measuredangle$C = $\measuredangle$D.

Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

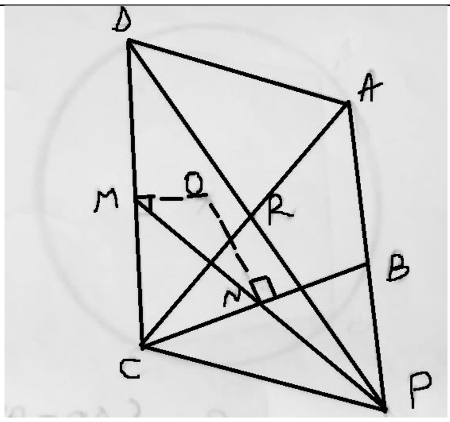
Soluție:

$\measuredangle A = \frac{\measuredangle B}{2}$; $\measuredangle C = \frac{\measuredangle B}{4}$; $\measuredangle D = 5\cdot\ \measuredangle C = \frac{5\measuredangle B}{4}$ $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D =$ 360^o..	1p
$\frac{\measuredangle \mathbf{B}}{2} + \measuredangle B + \frac{\measuredangle B}{4} + \frac{5\measuredangle B}{4} =$ 360^o...	3p
⇨ $3\measuredangle B = 360^o \Rightarrow \measuredangle B =$ 120^o..	1p
⇨ $\measuredangle A = 60^o$; $\measuredangle C = 30^o$; $\measuredangle D =$ 150^o...	2p

Subiectul 4.

Pe cercul de centru O se consideră punctele A, B, C și D, în sensul mișcării acelor de ceasornic, astfel încât AB || CD și AB= $\frac{CD}{2}$. Notăm cu M și N picioarele perpendicularelor duse din O pe CD, respectiv BC. Dacă MN ∩ AB = { P }, iar AC ∩ PD = { R }, demonstrați că R este mijlocul lui AC.

***Soluție*:**



Din DC || AB => $\measuredangle MCN \equiv \measuredangle NBP$ (alterne interne) …………… ……………………….. 1p

OM ⊥ DC => DM = MC………………………………………………………………………….... 1p

ON ⊥ BC => CN = BN ………………………………………………................................. 1p

1. $\measuredangle MCN \equiv \measuredangle NBP$ 1p

2. $\measuredangle MNC \equiv \measuredangle BNP$

3. CN = BN

Din 1,2 si 3 => $\triangle MNC \equiv \triangle PNB$ => ………………………………………………………...

⇨ BP = MC 1p

⇨ BP = $\frac{DC}{2}$=AB => ……………………………………………………………………………... 1p

⇨ 4. PA = CD

⇨ 5. PA ||CD 1p

Din 4, 5 => PCDA = paralelogram ………………………………………………………..

Cum AC ∩ DP ={R} => RA = RC => R = mijlocul lui [AC].