OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 17.02.2024

Clasa a VI-a

B A R E M D E E V A L U A R E Ș I N O T A R E

Subiectul 1.

Determinați numerele a, b, c invers proporționale cu numerele *12, 6, 3*, știind că $\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}=98$.

Soluție:

$12\cdot a=6\cdot b=3\cdot c=k$, deci $a=\frac{k}{12}$, $b=\frac{k}{6}$, $c=\frac{k}{3}$ ....(2p)

Egalitatea din ipoteză devine: $\frac{k^2}{288}+\frac{k^2}{9}+\frac{k^2}{18}=98$....................................(2p)

Rezolvând, se obține $k=24$. ....(2p)

Apoi: $a=2, b=4, c=8$ ....(1p)

Subiectul 2.

Se consideră numerele raționale: $a=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2023}$ și $b=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{2023}{2025}$.

Arătați că:

a) $a\cdot b+\frac{2024}{2025}$ este număr natural.

b) $a^2<0{,}0005$.

(E:16703 - Gazeta matematică 10/2023 - adaptare)

Soluție

a) $a\cdot b=\frac{1}{2025}$ ....(2p)

$a\cdot b+\frac{2024}{2025}=\frac{1}{2025}+\frac{2024}{2025}=1\in\mathbb{N}$..(1p)

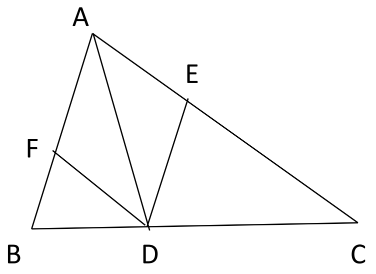
b) Arătăm că $a<b$.

(Ex. $\frac{m}{n}<\frac{m+2}{n+2}$). Atunci: $\frac{1}{3}<\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}<\frac{7}{9},\ldots,\frac{2021}{2023}<\frac{2023}{2025}$.

Deci: $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2023}<\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2023}{2025}$.

Rezultă: $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2023}<\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2023}{2025}$. Adică, $a<b$ ....(2p)

Apoi: $a^2=a\cdot a<a\cdot b=\frac{1}{2025}<\frac{1}{2000}=\frac{5}{10000}=0{,}0005$..................(2p)

Subiectul 3.	În figura alăturată, se cunoaște: $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle(BAC)$, $DE \parallel AB, DF \parallel AC$.  Să se arate că: **a)** $(DA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle(EDF)$; **b)** $\sphericalangle(AED) \equiv \sphericalangle(AFD)$.
Soluție	**a)** $\sphericalangle(EDA) \equiv \sphericalangle(BAD) - alt.\ int.$ $\sphericalangle(FDA) \equiv \sphericalangle(CAD) - alt.\ int.$ ... (1p) $(AD - bi\sec t\,oare \Rightarrow \sphericalangle(BAD) \equiv \sphericalangle(CAD)$ ....(2p) Deci: $\sphericalangle(EDA) \equiv \sphericalangle(FDA)$. $Deci, (DA - bi\sec t\,oarea \sphericalangle(EDF)$ ......(1p) **b)** $\sphericalangle(DEC) \equiv \sphericalangle(BAC) - coresp.$ $\sphericalangle(BFD) \equiv \sphericalangle(BAC) - coresp.$ ....(1p) Rezultă: $\sphericalangle(DEC) \equiv \sphericalangle(BFD)$ ....(1p) Așadar, $\sphericalangle(AED) \equiv \sphericalangle(AFD)$ ....(1p)
Subiectul 4.	**a)** Să se arate că $(\overline{ab}+\overline{ba})\vdots 11$, oricare ar fi cifrele a,b nenule **b)** Să se arate că, dacă $\overline{ab}\vdots(a+b)$ atunci și $\overline{ba}\vdots(a+b)$, oricare ar fi cifrele a, b nenule.
Soluție:	**a)** $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11a+11b=$ ....(1p) $=11(a+b) \Rightarrow (\overline{ab}+\overline{ba})\vdots 11$ ....(1p) **b)** $\overline{ab}+\overline{ba}=11a+11b=11(a+b)$ Deci, $(\overline{ab}+\overline{ba})\vdots(a+b)$ .... (3p) Din ipoteză, $\overline{ab}\vdots(a+b)$. Deci: $\overline{ba}\vdots(a+b)$ ....(2p)

Notă:
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Nu se acceptă fracțiuni de punct.
Se punctează corespunzător soluțiile alternative.