



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 17.02.2024

Clasa a X-a

Subiectul 1

Se consideră numărul real $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$. Să se demonstreze că:

a) numărul a este rațional.

b) numărul a este soluție a ecuației $x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0$.

Subiectul 2

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Să se calculeze $S_n = \frac{1}{z_1^{2n+1}} + \frac{1}{z_2^{2n+1}} + \frac{1}{z_3^{2n+1}}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 3

a) Dacă $x, y \in (1, \infty)$, arătați că $\sqrt[4]{x} \cdot y^{\log_x y} \geq y$.

b) Dacă $a, b, c > 1$, arătați că $a^{\log_{bc} a} + b^{\log_{ca} b} + c^{\log_{ab} c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Gazeta Matematică nr. 12/2023

Subiectul 4.

Se consideră funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x) + f(1-x) = 2024f(x^2), \text{ pentru orice valoare } x \in \mathbb{Z}.$$

Să se calculeze $f(-2024)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.