OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-17.02.2024
Clasa a IX-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Rezolvați în **R** ecuația**:**

$$\left[\frac{3x+2}{x-1}\right]+\left\{\frac{2x+3}{x-1}\right\}=\frac{23}{7}$$

***Soluție*:**

$\left[\frac{3x+2}{x-1}\right]=\left[3+\frac{5}{x-1}\right]=3+\left[\frac{5}{x-1}\right]$	2p
$\left\{\frac{2x+3}{x-1}\right\}=\left\{2+\frac{5}{x-1}\right\}=\left\{\frac{5}{x-1}\right\}$	2p
Ecuația devine: $3+\left[\frac{5}{x-1}\right]+\left\{\frac{5}{x-1}\right\}=\frac{23}{7}\Leftrightarrow\left[\frac{5}{x-1}\right]+\left\{\frac{5}{x-1}\right\}=\frac{2}{7}$	1p
Adică, $\frac{5}{x-1}=\frac{2}{7}$	1p
Soluția este $x=\frac{37}{2}$ care convine	1p

Subiectul 2

Fie **x, y, z** numere reale strict pozitive. Să se arate că:

$$8\left(\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{yz}{y+z}\right)\le 9\left(\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}+\frac{xyz}{xy+xz+yz}\right)$$

Soluție:

Notăm $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$ cu a, b, c numere reale strict pozitive	1p
Atunci inegalitatea din enunț devine: $8\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\le 9\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}+\frac{1}{a+b+c}\right)$	1p
Arătăm că dacă **a,b,c** sunt numere reale pozitive, atunci $9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b+c)(ab+ac+bc)$	1p
Într-adevăr inegalitatea este echivalentă cu $a^2b+bc^2+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2\ge 6abc$	1p
Inegalitate evidentă ținând seama de inegalitatea mediilor $a^2b+bc^2\ge 2\sqrt{a^2bbc^2}=2abc$ și celelalte	1p
Deci, avem: $8\frac{(a+b+c)^2+ab+ac+bc}{(a+b)(a+c)(b+c)}\le 8\cdot\frac{9}{8}\frac{(a+b+c)^2+ab+ac+bc}{(a+b+c))(ab+ac+bc)}=9\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}+\frac{1}{a+b+c}\right)$	2p

Subiectul 3

Se consideră un triunghi ABC şi punctele N, P, Q în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$ şi $11\overrightarrow{BQ} = 7\overrightarrow{BC}$.

a)Arătaţi că punctele N, P, Q sunt coliniare.

b)Fie M un punct în planul triunghiului ABC astfel încât $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, unde $x \in \mathbf{R}$. Aflaţi x, ştiind că $BP \parallel MQ$.

***Soluţie*:**

a)Figura	1p
Găsirea oricăror două relaţii pentru doi dintre vectorii $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ sau $\overrightarrow{PQ}$.	2p
Găsirea relaţiei de legătură între oricare doi vectori $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ sau $\overrightarrow{PQ}$ şi deducerea că aceştia sunt coliniari, iar apoi şi punctele N, P, Q sunt coliniare	1p
b)Marcarea punctului M pe desen	1p
Scrierea teoremei lui Thales	1p
Obţinerea valorii lui x, $x = \frac{25}{11}$	1p

Subiectul 4.

Fie ABC un triunghi şi punctele M, N pe laturile $[AB]$, respectiv $[BC]$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ şi $\frac{BN}{NC} = \frac{n}{p}$, unde m, n, p sunt numere reale pozitive cu proprietatea $p^2 = mn$. Notăm cu P intersecţia dreptelor CM şi AN. Arătaţi că: $n\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + p\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

***Soluţie*:**

Avem $n\,MA = m\,MB$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}$	2p
$n\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + p\overrightarrow{PC} = n\overrightarrow{PM} + n\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{PM} + m\overrightarrow{MB} + p\overrightarrow{PC} = (m+n)\overrightarrow{PM} + p\overrightarrow{PC}$	2p
Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul MBC tăiat de transversala A-P-N, obţinem: $\frac{PM}{PC}\frac{NC}{NB}\frac{AB}{AM} = 1$	1p
rezultă $\frac{PM}{PC} = \frac{n}{p}\frac{m}{m+n} = \frac{p}{m+n}$	1p
În plus, $\overrightarrow{PM}$ şi $\overrightarrow{PC}$ au sensuri opuse, deci $n\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + p\overrightarrow{PC} = \vec{0}$	1p