

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17.02.2024

Clasa a XII-a

Subiectul 1.

Pe mulțimea $G = (0,2)$ definim legea de compoziție: $x \circ y = \frac{xy}{xy-x-y+2}$.

Să se calculeze: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(x \circ x \circ \dots \circ x)}_{\text{de „n” ori}}$.

Subiectul 2.

Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încât $a+b=t \neq 0$, $ab=cd$ și

$$M = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{-1}{t} \right\} \right\} \text{ o submulțime a lui } M_3(\mathbf{R}).$$

Demonstrați că (M, \cdot) este un grup abelian izomorf cu grupul (G, \circ) , unde $G = \mathbf{R} - \left\{ \frac{-1}{t} \right\}$ și

$$x \circ y = x + y + txy.$$

Subiectul 3.

Să se arate că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\arctg x \cdot \arctg \frac{1}{x} \right) dx \leq \frac{\pi^3}{96}$.

Subiectul 4.

Să se calculeze $I = \int_{-1}^1 \left(\frac{2^x \operatorname{tg}^2 x}{1+2^x} + \frac{3^x \operatorname{tg}^4 x}{1+3^x} \right) dx$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.