OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-17.02.2024
Clasa a X-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Se consideră numărul real $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Să se demonstreze că:

a) numărul $\boldsymbol{a}$ este rațional.

b) numărul $\boldsymbol{a}$ este soluție a ecuației $x^3+x^2-2x-8=0$.

***Soluție*:**

a) Calculează a^3	1p
Rezultă ecuația $a^3+3a-14=0$	2p
Descompunând în factori se obține $(a-2)(a^2+2a+7)=0$	2p
Singura soluție reală a ecuației este $a=2$, deci $a\in\mathbb{Q}$	1p
b) $a=2$ verifică ecuația	1p

Subiectul 2

Fie $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $z_1+z_2+z_3=1$.
Să se calculeze $S_n=\frac{1}{z_1^{2n+1}}+\frac{1}{z_2^{2n+1}}+\frac{1}{z_3^{2n+1}}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

Soluție:

Din $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=\lvert z_3\rvert=1$, rezultă că $\overline{z_k}=\frac{1}{z_k}$, $(\forall)k=\overline{1,3}$	1p
Din $z_1+z_2+z_3=1$, rezultă $\lvert z_1+z_2+z_3\rvert^2=1$, deci .... $(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=1 \Leftrightarrow (z_1+z_2+z_3)(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=z_1z_2z_3$	1p
$\Leftrightarrow (z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)=0$	3p
Dacă $z_2=-z_1$, obținem $z_3=1$ și $S_n=\frac{1}{z_1^{2n+1}}-\frac{1}{z_1^{2n+1}}+1=1$	1p
Analog pentru $z_3=-z_2$ sau $z_3=-z_1$, obținem $S_n=1$	1p

Subiectul 3

a) Dacă $x,y\in(1,\infty)$, arătați că $\sqrt[4]{x}\cdot y^{log_x y}\geq y$.

b) Dacă $a,b,c>1$, arătați că $a^{log_{bc}a}+b^{log_{ca}b}+c^{log_{ab}c}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Gazeta Matematică nr.12/2023

Soluție:

a) Prin ridicare la puterea a 4-a, relația devine $x \cdot y^{4log_x y} \geq y^4$	1p
Logaritmând în baza x, obținem $1 + 4(log_x y)^2 \geq 4log_x y$	1p
Relația este echivalentă cu $(2log_x y - 1)^2 \geq 0$	1p
b) Aplicînd inegalitatea de la pct. a) obținem $a^{log_{bc} a} \geq \frac{a}{\sqrt[4]{bc}}, (\forall) a, b > 1$	1p
Aplicând iegalitatea mediilor rezultă $\sqrt{\sqrt{b} \cdot \sqrt{c}} \leq \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} \geq \frac{2}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$	1p
Înmulțind relația obținută cu $a > 1$, obținem $\frac{a}{\sqrt[4]{bc}} \geq \frac{2a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$	
Scriind analoagele și adunându-le rezultă $a^{log_{bc} a} + b^{log_{ca} b} + c^{log_{ab} c} \geq$	
$\geq \frac{a}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{b}{\sqrt[4]{ca}} + \frac{c}{\sqrt[4]{ab}} \geq \frac{2a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{2b}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \frac{2c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 2\left(\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{b}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \geq$	1p
$\geq 2 \cdot \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$	1p

Subiectul 4.

Se consideră funcția $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația:

$f(x) + f(1-x) = 2024f(x^2)$, pentru orice valoare $x \in \mathbb{Z}$.

Să se calculeze $f(-2024)$.

Soluție:

Pentru $x = 0 \Longrightarrow f(0) + f(1) = 2024f(0)$	1p
Pentru $x = 1 \Longrightarrow f(1) + f(0) = 2024f(1)$	1p
Din cele două relații se obține $f(0) = f(1) = 0$.	
Demonstrăm prin inducție că $f(n^2) = 0, (\forall) n \in \mathbb{Z}$..	1p
Etapa de verificare fiind parcursă, presup. că $f(n^2) = 0$ și dem. că $f((n+1)^2) = 0$	
Pentru $x = -n \Longrightarrow f(-n) + f(1+n) = 2024f(n^2)$	1p
Pentru $x = n+1 \Longrightarrow f(n+1) + f(-n) = 2024f((n+1)^2)$	1p
Din relațiile anterioare și din ipoteza de inducție rezultă că $f((n+1)^2) = 0$.	
Pentru $x = 2025 \Longrightarrow f(2025) + f(-2024) = 2024f(2025^2) = 0$	1p
Dar $2025 = 45^2 \Longrightarrow f(2025) = f(45^2) = 0$, deci $f(-2024) = 0$	1p