Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa Locală
Maramureş – 10 februarie 2024
Clasa a IX- a
Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - 6y + 2 = 0$ și $x \in [-2, 4]$.
Dacă $a = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$, calculați $[a]$, (partea întreagă a numărului real a).

2. a) Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică cu rația q astfel încât $b_5 - b_1 = 80,\ b_4 - b_2 = 24$, atunci determinați b_1 și q.

b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_1 > 0,\ r > 0$, arătați că

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}, (\forall)\ n \geq 2.$$

3. a) Arătați că

$$\frac{2a}{ab+1} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}, (\forall)\ a, b\ \in (0\,; +\infty).$$

b) Știind că $a, b, c > 0$, cu $abc = 1$, demonstrați inegalitatea:

$$\frac{2a}{ab+1} + \frac{2b}{bc+1} + \frac{2c}{ac+1} \leq a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}.$$

4. În patrulaterul $ABCD$, punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), respectiv (DA).

a) Arătați că: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$ și $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

b) Arătați că: $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AC}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru –3 ore