Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa Locală
Maramureş – 10 februarie 2024
Clasa a XI - a
Secțiunea H2
Filiera teoretică, profil real, specializarea ştiințe ale naturii

1. a) Demonstraţi că pentru orice matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ are loc relaţia

$$det(A+B)+det(A-B)=2(det(A)+det\,(B)).$$

b) Dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$ şi $det(A)=4$, calculaţi $det(A^3)+det(3A)$.

c) Dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu $det(A)=4$ şi $det(A+I_2)=6$, calculaţi $det(A-I_2)$ şi $det(A+2I_2)$.

2. Fie mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a^2-3b^2=1,\ a,b \in \mathbb{Q}\right\}$.

a) Arătaţi că matricea $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Demonstraţi că $A \cdot B \in G$ pentru orice $A, B \in G$.

c) Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^{2024} \in G$.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=\sqrt{4x^2+8x+9}-2x$.

a) Determinaţi asimptotele funcţiei f.

b) Arătaţi că punctul $(x,3)$, situat pe graficul funcţiei f , este coliniar cu punctele $B(1,4)$ şi $C(-2,1)$.

4. Calculaţi limitele:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot 2^{\frac{1}{x}}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{2^n}{x}\right)^x$, cu $n \in \mathbb{N}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru – 3 ore