Olimpiada Națională de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 10 februarie 2024
Clasa a XII - a

1. Se consideră mulțimea $M = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a. Demonstrați că $(M,\cdot)$ este monoid, unde " $\cdot$ " este înmulțirea numerelor reale.
b. Demonstrați că monoidul $(M,\cdot)$ are o infinitate de elemente simetrizabile.

2. Calculați primitivele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x$$

3. Se consideră mulțimea $F = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \big| f\big(f(x)\big) - 5f(x) + 6x = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
a. Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2x, x \geq 0 \\ 3x, x < 0 \end{cases}$. Demonstrați că $g \in F$.
b. Arătați că orice funcție $f \in F$ care admite primitive este continuă.

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu n elemente. Arătați că:
a. dacă n nu se divide cu 2, atunci pentru orice $a \in G$ ecuația $x^2 = a$ are o singură soluție în grupul G.
b. Dacă n nu se divide cu 3, atunci pentru orice $a \in G$ ecuația $x^3 = a$ are o singură soluție în grupul G.

SGM 10/2024

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru - 3 ore