

Olimpiada Națională de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 10 februarie 2024
Clasa a X - a

1. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Arătați că f nu este surjectivă.
b) Determinați $m \in \mathbb{N}$ pentru care ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.

G.M. nr. 10/2023

2. Determinați numerele naturale n pentru care $\log_n(n+2)$ este număr rațional.

3. a) Arătați că

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

- b) Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$.

Arătați că

$$|c - a| + |c + a| = |c - b| + |c + b|.$$

4. a) Fie $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$. Arătați că

$$a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- b) Arătați că

$$\sqrt[n]{\sqrt{2024} + \sqrt{2023}} + \sqrt[n]{\sqrt{2024} - \sqrt{2023}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru - 3 ore