Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa Locală
Maramureş – 10 februarie 2024
Clasa a X - a
Secțiunea H2
Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1. Se dă şirul $\log_2 x^{2^0}$, $\log_2 x^{2^1}$, $\log_2 x^{2^2}$, …, $\log_2 x^{2^n}$ … cu $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.
   a) Pentru $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, demonstraţi că al 2024 -lea termen din şir este număr întreg.
   b) Aflaţi $n \in \mathbb{N}$, ştiind că suma primilor n termeni este $(16^{10} + 1)(16^{10} - 1) \cdot \log_2 x$.

2. a) Ştiind că $a > 1$ şi $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$, arătaţi că numerele $a + \frac{1}{a}$ şi $\sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a + \frac{1}{a}\right)}$ sunt naturale.
   b) Știind că b este un număr real ce îndeplinește condiția $b^3 + b + 1 = 0$, arătați că numărul $b^2 + \sqrt[3]{(3b^2 - 2b + 2)(3b^2 + 2b)}$ este natural.

3. Aflaţi numerele complexe z cu proprietatea că $|z| = |z - 1| = |z|^2$.

4. a) Demonstrați că, pentru orice număr complex z, dacă $z = \bar{z}$, atunci $z \in \mathbb{R}$.
   b) Să se demonstreze că numărul $z = (2024 + 2025 \cdot i)^{4n} + (2025 + 2024 \cdot i)^{4n}$ este real oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru – 3 ore