Olimpiada Națională de Matematică – Etapa Locală
Maramureş – 10 februarie 2024
Clasa a XI - a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   a) Arătați că dacă $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ și $XA = AX$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât
   $$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$
   b) Determinați $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$cu proprietatea $Y^{2024} = A$.

2. Fie $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2 + B^2 + 2AB = O_2$ și $det(A^2 - B^2) = 0$. Folosind eventual rezultatul: $det(X + Y) + det(X - Y) = 2(det(X) + det(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, arătați că:
   a) $\det(A) = \det(B)$
   b) $\det(Tr(A)A - Tr(B)B) = 0$.

3. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \sqrt{x_n - x_n^2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este convergent și
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

4. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}$, pentru orice $n \geq 1$. Arătați că există și determinați limita
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}\left(1 + \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}\right)$$
   (28678, GM.9/2023)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru - 3 ore