Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a VII -a

Problema 1.

a) Să se determine mulțimea $M=\left\{a \in \boldsymbol{Z} \middle| a=\frac{8n^2+17}{4n+3}, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

b) Aflați numerele naturale de șase cifre, de forma $\overline{tuvxyz}$, care satisfac relația: $7\left(\sqrt{\overline{tuvxyz}}+\sqrt{\overline{xyz}}\right)=8\left(\sqrt{\overline{tuvxyz}}-\sqrt{\overline{xyz}}\right)$.

Problema 2.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$x^3-3x^2y-10x+30y-6=0.$$

b) Determinați $a \in \boldsymbol{N}$ astfel încât raportul $\frac{\sqrt{11}+7\sqrt{a}}{3\sqrt{11}+2\sqrt{a}}$ să fie număr întreg.

Problema 3.

Pe arcul *BC*, căruia nu-i aparține punctul *A*, al cercului circumscris triunghiului dreptunghic *ABC*, cu unghiul drept în *A*, se consideră punctul *M*. Fie *P*, respectiv *Q*, simetricele punctului *M* față de dreapta *AB*, respectiv *AC*.

a) Să se arate că punctele *P*, *A* și *Q* sunt coliniare.

b) Să se arate că dreapta *PQ* este tangentă la cerc în punctul *A* dacă și numai dacă punctul *M* este simetricul punctului *A* față de dreapta *BC*.

Problema 4.

Fie *ABCD* un dreptunghi cu $BE \perp AC, E \in (AC)$, iar *M* și *N* sunt mijloacele segmentelor *CD*, respectiv *AE*. Demonstrați că $MN \perp NB$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro