Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a VIII –a
Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 probleme.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Problema 1.

Calculați:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+...+\frac{1}{\sqrt{2024\cdot 2025}\left(\sqrt{2025}+\sqrt{2024}\right)}$;

c) $\sqrt{1+2023\cdot\sqrt{1+2024\cdot\sqrt{1+2025\cdot\sqrt{1+2026\cdot 2028}}}}$

Soluție:

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+...+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{2024-2025}=\frac{1-45}{-1}=44$ ……………………………………..**2p**

b) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+...+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2024\cdot 2025}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}=$

$1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$ ……………………………………………………………………………**3p**

c) $\sqrt{1+2026\cdot 2028}=\sqrt{1+2\cdot 2026+2026^2}=\sqrt{(1+2026)^2}=2027$.

Analog $\sqrt{1+2025\cdot 2027}=2026$, $\sqrt{1+2024\cdot 2026}=2025$ și $\sqrt{1+2023\cdot 2025}=2024$ ……..............**2p**

Problema 2.

a) *Să se determine numerele natural n cu proprietatea* $5\cdot\left[\sqrt{n-1}\right]+2=n$, *unde* $[a]$ *reprezintă partea întreagă a numărului a;*

b) *Rezolvați în* $\mathbb{R}$ *ecuația* $[2022x]+\{2023x\}=2023$, *unde* $\{a\}$ *reprezintă partea fracționară a numărului a.*

(GM 10/1023)

Soluție:

a) $\left[\sqrt{n-1}\right]=\frac{n-2}{5} \Rightarrow n=5k+2,\ k\in\mathbb{Z}$ ………………………………………………**1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Cum $k \le \sqrt{5k+1} < k+1$, obținem $k \in \{4,5\} \Rightarrow n \in \{22,27\}$ ……………………………………2p

b) Din relația $[2022x]+\{2023x\}=2023$, ținând cont că $\{2023x\}\in[0;1) \Rightarrow \{2023x\}=0$ și de aici $x=\frac{k}{2023},\ k\in\mathbb{Z}$ ……………………………………………………2p

Din $[2022x]=2023 \Rightarrow x\in\left[\frac{2023}{2022};\frac{2024}{2022}\right)$ și cum $x=\frac{k}{2023} \Rightarrow k\in\left[\frac{2023^2}{2022};\frac{2024\cdot 2023}{2022}\right)$….1p

Deci $k=2025 \Rightarrow x=\frac{2025}{2023}$ ……………………………………………1p

Problema 3.

a) *Arătați că* $x^2-(a+b)\cdot x+a\cdot b=(x-a)(x-b),\ (\forall)x,a,b\in\mathbb{R}$ *;*

b) *Fie* $a,b,x\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $a\le x\le b$. *Arătați că* $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ *;*

c) *Fie* $x_1,x_2,...,x_{20}\in[-1;3]$ *astfel încât* $x_1+x_2+...+x_{20}=0$. *Arătați că* $x_1^2+x_2^2+...+x_{20}^2\le 60$. *Dați un exemplu de valori pentru* $x_1,x_2,...x_{20}$ *pentru care inegalitatea devine egalitate.*

Soluție:

a) Descompune în factori sau desface parantezele ……………………………………………2p

b) $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-(a+b)x+\frac{(a+b)^2}{4}\le\frac{(b-a)^2}{4} \Leftrightarrow$

$x^2-(a+b)x+ab\le 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-b)\le 0$ ……………………………………2p

c) Pentru $a=-1$ și $b=3$ relația de la b) devine $(x-1)^2\le 2^2 \Leftrightarrow x^2\le 2x+3,\ (\forall)x\in[-1;3]$

$x_i^2\le 2x_i+3,\ (\forall)i\in\{1,2,...20\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20}x_i^2\le 2\cdot\sum_{i=1}^{20}x_i+3\cdot 20$ și cum

$\sum_{i=1}^{20}x_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{20}x_i^2\le 60$ ……………………………………………2p

Egalitatea se atinge de exemplu pentru 5 valori ale lui x_i egale cu 3 și 15 valori egale cu -1…....1p

Problema 4.

Fie cuburile $ABCDA'B'C'D'$ *respectiv* $A'B'C'D'A"B"C"D"$ *așezate unul peste celălalt.*

a) *Să se afle* $\measuredangle(AB',A"C")$ *și* $\measuredangle(AC,BD")$ *(justificare);*

b) *Dacă M este mijlocul lui* $[BC]$, *N este mijlocul lui* $[A'A"]$ *și* $AB=a,\ a\in\mathbb{N}^*$, *să se calculeze MN;*

c) *O furnică pornește din N pe fețele cuburilor și ajunge în C pe drumul cel mai scurt. Care este lungimea drumului minim dacă* $a=6cm$ *?* .

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție:

a) Se arată că $AB' \parallel DC'$ și $DC' \parallel D'C''$ $\Rightarrow \sphericalangle(AB', A''C'') = \sphericalangle(D'C'', A''C'')$

Cum $\triangle A''C''D'$ este echilateral, rezultă $\sphericalangle(AB', A''C'') = 60^0$ ……………………..……………...….**2p**

$AC \perp BD$ și $AC \perp BB''$ $\Rightarrow AC \perp (BDB'')$, deci $\sphericalangle(AC, BD'') = 90^0$ …………..……………...**1p**

b) În $\triangle MAN$ avem $\sphericalangle A = 90^0$, $AN = \dfrac{3a}{2}$ și $AM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, cu teorema lui Pitagora găsim

$MN = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$ ………...…**2p**

c) Drumul cel mai scurt pe suprafața laterală se află urmărind desfășurările posibile ale prismei patrulatere regulate $ABCDA''B''C''D''$. Dacă furnica pleacă spre BB', atunci

$NC = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 + (2a)^2} = \dfrac{5a}{2}$. Analog dacă pleacă spre DD' ……………….……….**1p**

Dacă furnica pleacă spre AB, atunci $NC = \sqrt{ND^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{5a}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{29}}{2}$.

În primul caz se obține drumul cel mai scurt și cum $a = 6$, lungimea lui este de 15cm……………..…**1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro