Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a XII-a

Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 probleme.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Problema 1.

Calculați $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$, *unde* $x \in (0,+\infty)$.

Soluție:

$\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\left(e^x+\cos x+\sin x\right)+\left(e^x-\sin x+\cos x\right)}{e^x+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ ....**(4p)**

$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right)+C$ ....**(3p)**.

Problema 2.

Fie mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}, x\neq\frac{1}{2}\right\}$, *pe care se consideră operația de înmulțire a matricelor.*

a) *Arătați că* $(G,\cdot)$ *este grup abelian.*

b) *Demonstrați că funcția* $f:G\to\mathbb{R}^*$, $f\left(A(x)\right)=1-2x$ *este un izomorfism de la grupul* $(G,\cdot)$ *la grupul multiplicativ al numerelor reale nenule,* $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$.

c) *Calculați* $A^n(x)$, *unde* $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Soluție:

a) Cum $A(x)A(y)=A(x+y-2xy)$, oricare ar fi $A(x), A(y)\in G$ și $x+y-2xy\neq\frac{1}{2}$, pentru orice două numere reale $x, y\neq\frac{1}{2}$, rezultă că operația de înmulțire a matricelor este lege de compoziție internă pe G. Deoarece înmulțirea matricelor este asociativă și comutativă pe G, are elementul neutru $A(0)\in G$, iar fiecare element $A(x)\in G$ are simetricul $A\left(\frac{x}{2x-1}\right)\in G$, rezultă că $(G,\cdot)$ este grup abelian. ....**(4p)**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

b) Pentru orice $A(x), A(y) \in G$, avem: $f\left(A(x)A(y)\right) = f\left(A(x+y-2xy)\right) = 1-2x-2y+4xy =$ $(1-2x)(1-2y) = f\left(A(x)\right) f\left(A(y)\right)$, deci *f* este morfism de grupuri. Întrucât *f* este și funcție bijectivă, rezultă că *f* este un izomorfism de grupuri. ....**(2p)**

c) Din $f\left(A^n(x)\right) = \left(f\left(A(x)\right)\right)^n = (1-2x)^n$, obținem $A^n(x) = f^{-1}\left((1-2x)^n\right) = A\left(\frac{1-(1-2x)^n}{2}\right) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+(1-2x)^n}{2} & 0 & \frac{1-(1-2x)^n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-(1-2x)^n}{2} & 0 & \frac{1+(1-2x)^n}{2} \end{pmatrix}.$$ ....**(1p)**

Problema 3.

Se consideră un grup abelian finit, $(G,\cdot)$, cu elementul neutru e. Fie mulțimea $H = \left\{x \in G \mid x^2 = e\right\}$. Demonstrați că:

- ***a)*** *$(H,\cdot)$ este subgrup al grupului $(G,\cdot)$;*
- ***b)*** *produsul tuturor elementelor subgrupului H este egal cu produsul tuturor elementelor grupului G;*
- ***c)*** *dacă, în plus, avem $\text{card } H > (\text{card } G) : 2$, atunci $H = G$.*

Soluție:

a) Pentru orice $x, y \in H$, avem $\left(xy^{-1}\right)^2 = xy^{-1}xy^{-1} = x^2\left(y^{-1}\right)^2 = x^2\left(y^2\right)^{-1} = ee = e$, deci $xy^{-1} \in H$. Prin urmare, $(H,\cdot)$ este subgrup al grupului $(G,\cdot)$. ....**(4p)**

b) Dacă $x \in G \setminus H$, atunci $x^2 \neq e$, deci $x \neq x^{-1}$ și $x^{-1} \in G \setminus H$, ceea ce înseamnă că produsul elementelor din $G \setminus H$ poate fi scris ca un produs de produse de forma xx^{-1}. Așadar, produsul elementelor din $G \setminus H$ este egal cu *e*, ceea ce înseamnă că produsul tuturor elementelor subgrupului *H* este egal cu produsul tuturor elementelor grupului *G*. ....**(2p)**

c) Conform teoremei lui Lagrange, $\text{card } H$ divide $\text{card } G$. Deoarece $\text{card } H > (\text{card } G) : 2$, avem $\text{card } H = \text{card } G$, de unde, având în vedere că mulțimile *H*, *G* sunt finite și $H \subset G$, rezultă că $H = G$. ....**(1p)**

Problema 4.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \int_0^1 f^n(x) g(x)\,\mathrm{d}x$, unde $f, g : [0,1] \to (0,+\infty)$ sunt două funcții continue. Demonstrați că:

- ***a)*** *dacă $f(x) = x$ și $g(x) = e^x$, atunci $a_n = e - na_{n-1}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$*
- ***b)*** *dacă $f(x) = x$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;*
- ***c)*** *șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă $f(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.*

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție:

a) Pentru $f(x)=x$ și $g(x)=e^x$, $a_n=\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x = x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x \mathrm{d}x = e - na_{n-1}$, pentru orice număr natural $n\ge 2$. ....**(3p)**

b) Dacă $f(x)=x$, atunci $a_n=\int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x$. Deoarece funcția g este continuă pe intervalul $[0,1]$ înseamnă că este și mărginită, deci există două numere reale, m și M, astfel încât $m\le g(x)\le M, \forall x\in[0,1]$, de unde obținem $mx^n \le x^n g(x)\le Mx^n, \forall x\in[0,1], \forall n\ge 1$, deci $m\int_0^1 x^n \mathrm{d}x \le a_n \le M\int_0^1 x^n \mathrm{d}x, \forall n\ge 1$ sau $\frac{m}{n+1}\le a_n \le \frac{M}{n+1}, \forall n\ge 1$. Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{m}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{M}{n+1}\right)=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. ....**(2p)**

c) I *Demonstrăm că, dacă $f(x)\le 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$, atunci șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent.*

Avem $a_{n+1}-a_n=\int_0^1\left(f^{n+1}(x)-f^n(x)\right)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f^n(x)\left(f(x)-1\right)g(x)\mathrm{d}x\le 0, \forall n\ge 1$, deci șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este descrescător. Cum șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este și mărginit inferior de 0, rezultă că este convergent. ....**(1p)**

II *Demonstrăm că, dacă șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent, atunci $f(x)\le 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$*

Presupunem că există $a\in[0,1]$ astfel încât $f(a)>1$. Atunci, *f* fiind funcție continuă, există numerele reale c și d, $c<d$, astfel încât $a\in[c,d]\subset[0,1]$ și $f(x)>1, \forall x\in[c,d]$. Astfel, avem $a_n=\int_0^1 f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_c^d f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_c^d f^n(\alpha)g(x)\mathrm{d}x=f^n(\alpha)\int_c^d g(x)\mathrm{d}x$, unde $f(\alpha)$ este minimul funcției continue *f* pe intervalul compact $[c,d]$. Cum $f(\alpha)>1$ și $\int_c^d g(x)\mathrm{d}x>0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(\alpha)\int_c^d g(x)\mathrm{d}x=+\infty$, deci șirul $(a_n)_{n\ge1}$ nu este convergent. Prin urmare, presupunerea că există $a\in[0,1]$ astfel încât $f(a)>1$ este falsă, ceea ce înseamnă că $f(x)\le 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$. ....**(1p)**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro