Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iași
2.02.2024

Clasa a X -a profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

Barem de notare și evaluare

Notă:

- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1:

a) Demonstrați că, dacă $z \in \mathbb{C}, |z| = m, m \in \mathbb{R}, m > 0$, *atunci* $\overline{z} = \dfrac{m^2}{z}$.

b) Se consideră $a, b \in \mathbb{C}, |a| = |b| = 2$ *și* $ab + a + b = 2$. *Determinați numerele complexe* a *și* b.

Soluție:

a) Fie $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, nu ambele nule, $\overline{z} = a - bi$.

$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = m^2$, de aici concluzia. 2p

b) Avem $a \cdot \overline{a} = 4,\ b \cdot \overline{b} = 4 \Rightarrow \overline{a} = \dfrac{4}{a},\ \overline{b} = \dfrac{4}{b}$ (1)

Conjugăm relația $ab + a + b = 2 \Rightarrow\ \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} + \overline{b} = 2.$ 2p

Folosind (1) obținem

$\dfrac{4}{a} \cdot \dfrac{4}{b} + \dfrac{4}{a} + \dfrac{4}{b} = 2 \Leftrightarrow 16 + 4(a+b) = 2ab \Leftrightarrow 4(a+b) - 2ab = -16$ 1p

Avem sistemul $\begin{cases} ab + a + b = 2 & / \cdot 2 \\ 4(a+b) - 2ab = -16 \end{cases} \Rightarrow 6(a+b) = -12 \Rightarrow a + b = -2, ab = 4.$

Atunci a și b sunt soluțiile ecuației $t^2 + 2t + 4 = 0$, $t_1 = \dfrac{-2 + i\sqrt{12}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ și $t_2 = \dfrac{-2 - i\sqrt{12}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$.

Sistemul fiind simetric, obținem $\begin{cases} a = -1 + i\sqrt{3} \\ b = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$ și $\begin{cases} a = -1 - i\sqrt{3} \\ b = -1 + i\sqrt{3} \end{cases}$ 2p

Subiectul 2:

a) Determinați numerele reale x care verifică relația: $9^x + 49^x = 2 \cdot 21^x$;

b) Determinați numerele reale x care verifică relația: $4^x + 9^x + 25^x + 49^x = 6^x + 15^x + 35^x + 14^x$.

Soluție:

a) Ecuația se mai scrie $\left(3^x\right)^2 + \left(7^x\right)^2 = 2 \cdot 3^x \cdot 7^x \Leftrightarrow \left(7^x - 3^x\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 7^x = 3^x \Leftrightarrow x = 0$ 2p

b) Se observă că $x = 0$ este soluție a ecuației. 1p

$\left(2^x\right)^2+\left(3^x\right)^2+\left(5^x\right)^2+\left(7^x\right)^2=2^x\cdot 3^x+3^x\cdot 5^x+5^x\cdot 7^x+2^x\cdot 7^x \ /\cdot 2$ 1p

$2\cdot\left(2^x\right)^2+2\cdot\left(3^x\right)^2+2\cdot\left(5^x\right)^2+2\cdot\left(7^x\right)^2=2\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^x\cdot 5^x+2\cdot 5^x\cdot 7^x+2\cdot 2^x\cdot 7^x$

$\left(2^x-3^x\right)^2+\left(3^x-5^x\right)^2+\left(7^x-5^x\right)^2+\left(7^x-2^x\right)^2=0$ 2p

$\left(2^x-3^x\right)^2=0,\left(3^x-5^x\right)^2=0,\left(7^x-5^x\right)^2=0,\left(7^x-2^x\right)^2=0$, de aici $2^x=3^x$, $3^x=5^x$, $7^x=5^x$, $7^x=2^x \Rightarrow x=0$ unica soluție. 1p

Subiectul 3

Se consideră numerele reale a, b, c care verifică condițiile: $\begin{cases}\log_a b=c\\ \log_c(a^2+1)=1\\ 5\log_b a+24=5c\end{cases}$

a) Arătați că c este număr natural;
b) Determinați valorile lui a și b;
c) Arătați că: $\dfrac{1}{\sqrt{1+\log_a\sqrt{c}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\log_c a^2}}\le\sqrt{2}.$

Soluție:

a) Condiții de existență: $a,b,c\in(0,\infty)-\{1\}=D$

Se înlocuiește $\log_a b=c$ și se obține $\dfrac{5}{c}+24=5c\Rightarrow c\in\left\{5,-\dfrac{1}{5}\right\}\cap D\Rightarrow c=5\in\mathbb{N}$..................2 p

b) $\log_5\left(a^2+1\right)=1\Rightarrow a^2+1=5\Rightarrow a\in\{-2,2\}\cap D\Rightarrow a=2$..1$p$

$\log_2 b=5\Rightarrow b=2^5\Rightarrow b=32$..1$p$

c) Se notează $\log_a c=\log_2 5=t>0$ și se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_a\sqrt{c}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_c a^2}}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\cdot t}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+t}}+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2+t}}\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}+\sqrt{t}\le\sqrt{2(2+t)}\Leftrightarrow 2+2\sqrt{2t}+t\le 4+2t\Leftrightarrow t-2\sqrt{2t}+2\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{t}-\sqrt{2}\right)^2\ge 0\ (A)....3p$$

Subiectul 4

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=2^x$.

a) Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $f\left(\sqrt[4]{8}\right), f\left(\sqrt[3]{5}\right), f\left(\sqrt[6]{26}\right)$;

b) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}\right)$ *este număr rațional;*

c) Să se determine numărul natural nenul n, pentru care $f\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}\right)=\sqrt[5]{16}$.

Soluție:

$a)\ \sqrt[4]{8}=\sqrt[12]{8^3}=\sqrt[12]{512};\ \sqrt[3]{5}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625};\ \sqrt[6]{26}=\sqrt[12]{26^2}=\sqrt[12]{676}$..$1p$

$2^{\sqrt[12]{512}}<2^{\sqrt[12]{625}}<2^{\sqrt[12]{676}}\Rightarrow f\left(\sqrt[4]{8}\right)<f\left(\sqrt[3]{5}\right)<f\left(\sqrt[6]{26}\right)$..$1p$

$b)\ \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}=2+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=5$......................$1p$

$f\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}\right)=2^5=32\in\mathbb{Q}$..$1p$

$$c)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}}{\left(k\sqrt{k+1}\right)^2-\left((k+1)\sqrt{k}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}}{-k(k+1)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$ ....$2p$

$2^{1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=2^{\frac{4}{5}}\Rightarrow\sqrt{n+1}=5\Rightarrow n=24$..$1p$