Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a XII-a

Problema 1.

Calculați $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x} \mathrm{d}x$, unde $x \in (0,+\infty)$.

Problema 2.

Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2} \right\}$, pe care se consideră operația de înmulțire a matricelor.

a) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că funcția $f: G \to \mathbb{R}^*$, $f(A(x)) = 1-2x$ este un izomorfism de la grupul $(G,\cdot)$ la grupul multiplicativ al numerelor reale nenule, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

c) Calculați $A^n(x)$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Problema 3.

Se consideră un grup abelian finit, $(G,\cdot)$, cu elementul neutru *e*. Fie mulțimea $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$. Demonstrați că:

a) $(H,\cdot)$ este subgrup al grupului $(G,\cdot)$;

b) produsul tuturor elementelor subgrupului H este egal cu produsul tuturor elementelor grupului *G*;

c) dacă, în plus, avem $\text{card } H > (\text{card } G):2$, atunci $H = G$.

Problema 4.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \int_0^1 f^n(x) g(x) \mathrm{d}x$, unde $f, g: [0,1] \to (0,+\infty)$ sunt două funcții continue. Demonstrați că:

a) dacă $f(x) = x$ și $g(x) = e^x$, atunci $a_n = e - na_{n-1}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$

b) dacă $f(x) = x$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;

c) șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă $f(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași

Tel: +40 (0)232 26 80 14

Fax: +40 (0)232 26 77 05

www.isjiasi.ro