Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a IX –a

Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 probleme.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Problema 1.

Arătați că $16^n + 4^n - 2$ se divide cu 18, pentru orice număr natural n.

Soluție:

Cum $18 = 2 \cdot 9$ și $(2,9) = 1$, vom arăta că $16^n + 4^n - 2$ se divide cu 2, respectiv cu 9, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0 \Longrightarrow 16^n + 4^n - 2 = 0 \vdots 2$ 1p

$(\forall) n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow 16^n, 4^n$ și 2 sunt numere pare, prin urmare $(16^n + 4^n - 2) \vdots 2$....................1p

Arătăm că $(16^n + 4^n - 2) \vdots 9$ pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}$ prin inducție matematică.

Dacă $n = 0$, atunci $16^n + 4^n - 2 = 0 \vdots 9$...1p

Presupunem că $(16^k + 4^k - 2) \vdots 9$ pentru $k \in \mathbb{N}$ și arătăm că $(16^{k+1} + 4^{k+1} - 2) \vdots 9$

Într-adevăr: $16^{k+1} + 4^{k+1} - 2 = 16^k \cdot 16 + 4^k \cdot 4 - 2$

$= 16 \cdot (16^k + 4^k - 2) - 16 \cdot 4^k + 32 + 4 \cdot 4^k - 2 = 16 \cdot M_9 - 12 \cdot 4^k + 30$..................2p

$-12 \cdot 4^k + 30 = -9 \cdot 4^k + 27 - 3 \cdot (4^k - 1) = M_9 - 3 \cdot [(3+1)^k - 1] =$

$= M_9 - 3 \cdot (M_3 + 1^k - 1) = M_9 - 3 \cdot M_3 \vdots 9$, de unde finalizarea................................2p

Problema 2.

a*) Demonstrați că $xy + yz + zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3}$, pentru orice numere reale x, y, z.*

b) Pentru orice numere pozitive a, b, c, demonstrați că: $\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2 \cdot c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2 \cdot a^2}{c^2+a^2} \le \frac{(a+b+c)^2}{6}$.

c) Fie $a, b, c, d \in (0, +\infty)$. Demonstrați că:

$$\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}} + \frac{b}{\sqrt{ac+cd+da}} + \frac{c}{\sqrt{ab+bd+da}} + \frac{d}{\sqrt{ab+bc+ca}} \ge \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $0 \le (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$,
adevărată pentru orice numere reale *x, y, z*...1p

b) Conform inegalității mediilor, $m_h \le m_g \Rightarrow \frac{2a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2} \le \sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$ și analoagele.................2p

Prin adunare va rezulta că $2 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2 \cdot c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2 \cdot a^2}{c^2+a^2}\right) \le ab + bc + ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3}$, de unde,
prin împărțirea cu 2, se obține concluzia...1p

c) Din inegalitatea de la punctul a), $\sqrt{bc + cd + db} \le \frac{b+c+d}{\sqrt{3}}$, deci $\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}} \ge \frac{a\sqrt{3}}{b+c+d}$

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Scriind și adunând inegalitățile analoage, cerința se reduce la a demonstra că
$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}$……………………………………………………………1p
Notăm $b+c+d=x, a+c+d=y, a+b+d=z, a+b+c=t$
Se obține $a=\frac{y+z+t-2x}{3}, b=\frac{x+z+t-2y}{3}, c=\frac{x+y+t-2z}{3}, d=\frac{x+y+z-2t}{3}$…………………………...1p
Inegalitatea de demonstrat se rescrie astfel:
$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)\geq 12$, ceea ce este evident,
pentru că $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2, (\forall)x, y\in(0,+\infty)$, și analoagele……………………………………………..1p

Problema 3.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2024^{[x]}=x+\{2024+\{x\}\}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Soluție:

$2024\in\mathbb{Z}\Longrightarrow\{2024+\{x\}\}=\{\{x\}\}=\{x\}$, de unde ecuația inițială devine:
$2024^{[x]}=x+\{x\}$...1p
$\{x\}<1\Longrightarrow x=2024^{[x]}-\{x\}>0-1=-1\Longrightarrow x\in(-1,\infty)$..1p
$\{x\}=x-[x]\Longrightarrow$ ecuația se rescrie echivalent în forma $2024^{[x]}+[x]=2x\ (*)$........................1p
Dacă $x\in(-1;0)$, atunci $[x]=-1$ și $\{x\}=x+1$, de unde $2024^{-1}=2x+1$, deci
$x=-\frac{2023}{4048}\in(-1;0)$………………………………………………………………………….1p
Dacă $x\geq 0$, atunci $2024^{[x]}\in\mathbb{N}^*$și $[x]\in\mathbb{N}$, deci din $(*)$ trebuie ca $2x\in\mathbb{N}^*$, de unde rezultă
$x=\frac{n}{2}$, cu $n\in\mathbb{N}^*$...1p
Pentru $n=2p, p\in\mathbb{N}^*$, obținem din $(*)$ că $2024^{p}=p$, care nu are soluții în $\mathbb{N}^*$, întrucât
$2024^{p}\geq p+1>p, \forall p\in\mathbb{N}$.
Pentru $n=2p+1, p\in\mathbb{N}$, obținem din $(*)$ că $2024^{p}=p+1$ cu soluția unică $p=0$,
de unde $x=\frac{1}{2}$...2p

Problema 4.

Se consideră un triunghi ABC și punctele D, Q, E cu $D\in(AB), Q\in(CD), C\in(BE)$, astfel încât $\frac{AB}{AD}=\frac{CQ}{QD}=\frac{BE}{BC}$. Fie punctele F și M astfel încât $ECDF$ este paralelogram, iar $M\in DE$. Demonstrați că punctele Q, M, F sunt coliniare dacă și numai dacă $2+\frac{AB}{AD}=\frac{DE}{DM}$.

(Supliment GM nr. 11/2023)

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție:

Notăm $\frac{AB}{AD}=\frac{CQ}{QD}=\frac{BE}{BC}=\alpha$ și $\frac{DE}{DM}=\beta$.

Avem $\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{FD}+\frac{1}{\alpha+1}\cdot\overrightarrow{DC}$ (1) ………………………………………………..… 2p

Utilizând tot regula triunghiului, avem și $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DM}$

$\frac{DM}{DE}=\frac{1}{\beta}\Rightarrow\overrightarrow{DM}=\frac{1}{\beta}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DF}\right)$ deci

$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FD}+\frac{1}{\beta}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{\beta}\cdot\overrightarrow{FD}=\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\overrightarrow{FD}+\frac{1}{\beta}\cdot\overrightarrow{DC}$ (2) ………………………………….. 2p

Punctele Q, M, F sunt coliniare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{FQ}$ și $\overrightarrow{FM}$ sunt coliniari, ceea ce echivalează cu relația: $\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}}=\frac{\frac{1}{\alpha+1}}{\frac{1}{\beta}}$……………………………………………………………1p

Egalitatea se poate rescrie astfel: $\frac{1}{\beta}=\frac{\beta-1}{\beta}\cdot\frac{1}{\alpha+1}\Leftrightarrow\beta-1=\alpha+1\Leftrightarrow 2+\alpha=\beta$

Deci punctele Q, M, F sunt coliniare dacă și numai dacă $2+\frac{AB}{AD}=\frac{DE}{DM}$……………………….……2p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro