Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a XI–a

Barem de notare și evaluare

Problema 1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{M(a)=I_2+aA \mid a\in\mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $M(a)\cdot M(b)\in G$, oricare ar fi numerele reale *a* și *b*.

b) Determinați numărul real *x* pentru care $\left(M(x)\right)^{1001}=M\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Gazeta Matematică 10/2023 - Supliment

Barem:

a) Cum $A^2=3A$, rezultă că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+3ab)\in G$, oricare ar fi numerele reale *a* și *b*. 3p

b) Se arată prin inducție că $\left(M(x)\right)^n=M\left(3^{n-1}\left(x+\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\right)$, $\forall n\geq 1$. 2p

Avem: $M\left(3^{1000}\left(x+\frac{1}{3}\right)^{1001}-\frac{1}{3}\right)=M\left(-\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{3}\right)^{1001}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{1001}\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$. 2p

Problema 2. Pentru fiecare număr natural *n* se consideră funcția

$$f_n:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{\sin x}{x^n}.$$

a) Arătați că funcția f_n are limită la $+\infty$ dacă și numai dacă $n\geq 1$.

b) Arătați că funcția f_n are limită în 0 dacă și numai dacă *n* este impar sau $n=0$.

Barem:

a) Funcția $f_0:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f_0(x)=\sin x$ nu are limită la $+\infty$: considerând șirurile $x_n=2n\pi$ și $y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, divergente către $+\infty$, șirurile (constante) $\left(f_0(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ și $\left(f_0(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au limite diferite (0, respectiv 1). 2p

Dacă $n\geq 1$, atunci $f_n(x)$ este produsul dintre funcția mărginită $g(x)=\sin x$ și funcția $h(x)=\frac{1}{x^n}$ cu $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0$, prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=0$. 2p

b) Observăm că $\lim\limits_{x\to 0}f_0(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ și $\lim\limits_{x\to 0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Dacă $n \geq 2$, atunci $\lim\limits_{x \searrow 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$, iar $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}} =$ $= 1 \cdot (-\infty)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \infty$. Limitele laterale în 0 ale funcției f_n sunt egale dacă și numai dacă n este un număr impar. 2p

Problema 3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1} \cdot C_{2n}^{2k},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{2k},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Barem:

Observăm că $a_n = 3^{2n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Într-adevăr, notăm $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{2k} \cdot C_{2n}^{2k} = \dfrac{1}{2} a_n$ și $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{2k+1} \cdot C_{2n}^{2k+1}$. În dezvoltarea binomială $(1+x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k} \cdot C_{2n}^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{2k+1} \cdot C_{2n}^{2k+1}$ înlocuim $x = 2$, apoi $x = -2$; obținem $3^{2n} = x_n + y_n$, respectiv $1 = x_n - y_n$. Adunând aceste egalități, găsim formula anunțată pentru termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 0}$. 3p

Folosind formula de sumare a termenilor unei progresii geometrice, deducem că $b_n = \dfrac{1}{8}\left(3^{2n+2} - 1\right), \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8\left(3^{2n}+1\right)}{9 \cdot 3^{2n} - 1} = \dfrac{8}{9}$. 2p

Problema 4. Se consideră trei numere reale *a*, *b* și *c* cu $b^2 < 4ac$ și o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(aX^2 + bX + cI_2\right) = 0$. Demonstrați că $aX^2 + bX + cI_2 = O_2$.

Barem:

Din $b^2 < 4ac$ rezultă că $a \neq 0$; atunci $\det\left(X^2 + \dfrac{b}{a} X + \dfrac{c}{a} I_2\right) = \dfrac{1}{a^2} \cdot \det\left(aX^2 + bX + cI_2\right) = 0$.

Ecuația $x^2 + \dfrac{b}{a} x + \dfrac{c}{a} = 0$ are soluții complexe nereale conjugate, fie acestea α și $\overline{\alpha}$. Egalitatea precedentă devine $\det(X - \alpha I_2)\left(X - \overline{\alpha} I_2\right) = 0$, de unde $\det(X - \alpha I_2) = 0$ sau $\det\left(X - \overline{\alpha} I_2\right) = 0$. Cum matricea X are elemente reale, dacă $\det(X - \alpha I_2) = 0$, atunci $0 = \overline{\det(X - \alpha I_2)} =$

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$= \det\overline{\left(X-\alpha I_2\right)} = \det\left(X-\overline{\alpha}I_2\right)$, iar dacă $\det\left(X-\overline{\alpha}I_2\right)=0$, obținem analog că $\det\left(X-\overline{\overline{\alpha}}I_2\right)=$ $=\det\left(X-\alpha I_2\right)=0$. În consecință, $\det\left(X-\alpha I_2\right)=\det\left(X-\overline{\alpha}I_2\right)=0$. 3p

Fie $P_X\left(\lambda\right)=\det\left(X-\lambda I_2\right)$ polinomul caracteristic al matricei *X*. Din cele de mai sus, rădăcinile acestui polinom sunt α și $\overline{\alpha}$, așadar $P_X\left(\lambda\right)=\lambda^2-\left(\alpha+\overline{\alpha}\right)\lambda+\alpha\cdot\overline{\alpha}$. 2p

Ținând cont de relațiile lui Viète pentru ecuația $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ avem că $\alpha+\overline{\alpha}=-\frac{b}{a}$, iar $\alpha\cdot\overline{\alpha}=\frac{c}{a}$. Astfel, $P_X\left(\lambda\right)=\lambda^2+\frac{b}{a}\lambda+\frac{c}{a}$ și, cum $P_X\left(X\right)=O_2$ (teorema Cayley-Hamilton), rezultă concluzia problemei. 2p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro