Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iaşi
2.02.2024

Clasa a XI-a profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

Subiectul 1:

Fie α o rădăcină complexă a ecuației $x^2 - x + 1 = 0$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^3.

b) Determinați matricea $B = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^{2024}$.

Subiectul 2:

Suprafața de teren deținută de doi frați are forma patrulaterului ABCD. Pe o hartă cu scara S=1:10000 și raportate la un sistem de coordonate, cu unitatea de măsură 1 cm, punctele au coordonatele A(5,0), B(3,4), C(-1,2), D(-2,-1).

a) Determinați aria terenului exprimată în hectare.

b) Scrieți ecuația dreptei AD.

c) Frații vor să construiască un drum EF, care trece prin mijlocul E al segmentului BC și prin $F \in (AD)$. Drumul EF împarte terenul în două suprafețe de arii egale. Determinați coordonatele punctului F.

Subiectul 3:

Fie funcția $f_a: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f_a(x) = \frac{ax^2+1}{x}, a \in \mathbb{R}, a > 0.$

a) Arătați că funcția $f_a, a > 0$, nu are limită în $x_0 = 0$.

b) Arătați că funcția $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ g(x) = f_5(x) - f_4(x)$ are limită în $x_0 = 0$ și calculați $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

c) Determinați numărul real pozitiv a, pentru care avem $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{f_a(x)} = e^2$.

Subiectul 4:

Fie funcția $f: D_{max} \to \mathbb{R},\ D_{max} \subset \mathbb{R},\ f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}, a, b > 0, c \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine domeniul maxim al funcției f, în funcție de a, b, c.

b) Să se determine a, b, c astfel încât f să aibă o asimptota la $+\infty$, paralelă cu dreapta $y = 2x + 1$ și asimptotă la $-\infty$, dreapta $y = -1$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.