



Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iași
2.02.2024

Clasa a XII -a profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

Subiectul 1:

Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Pentru fiecare număr real a , considerăm matricea $X(a) = I_2 + aA$ și mulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbf{R}, a \neq -1\}$.

- Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G .
- Demonstrați că (G, \cdot) este grup abelian.
- Fie $n \in \mathbf{N}^*$, calculați $X(-n)X(-n+1) \dots X(-1)X(0)X(1) \dots X(n)$.

Subiectul 2:

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = 3xy - x + 5y$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

- Demonstrați că legea $*$ nu este comutativă și nici asociativă.
- Stabiliți dacă legea $*$ admite element neutru.
- Andrei afirmă că ”există a și b , $a \neq b$, numere raționale neîntregi astfel încât $a * b$ și $b * a$ să fie numere întregi”. Stabiliți dacă afirmația lui Andrei este adevărată sau nu.

Subiectul 3:

Considerăm funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x^2+4)(x+1)}$.

- Arătați că $f(x) = \frac{x+4}{5(x^2+4)} - \frac{1}{5(x+1)}$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.
- Determinați $\int f(x)dx$.
- Fie $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției f . Arătați că există cel mult un număr $x_0 \in [0, +\infty)$ astfel încât $F(x_0)$ să fie număr întreg.

Subiectul 4:

Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. Fie $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ primitiva funcției f care verifică $F(1) = 0$.

- Calculați $\int x(f(x))^a dx$, unde a este un număr real.
- Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1}$.
- Fie $G: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $G(0) = 0$ primitivă a funcției F și $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 121x^2 + \left(60 - \frac{1}{e}\right)x + 2G(x)$. În intervalul de timp $[0, t]$, $t \geq 0$, măsurat în ore, un melc merge $g(t)$ centimetri. Calculați lungimea drumului parcurs de melc în intervalul de timp $[0, 1]$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.