Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a VI –a
Barem de notare și evaluare

Notă:

- ***Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 probleme.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Problema 1.

Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$. Numerele $a \cdot b$ şi $a + b$ sunt direct proporţionale cu 36 şi 5, iar numerele $a \cdot c$ şi $a - c$ sunt direct proporţionale cu 12 şi 7. Determinaţi numărul $\frac{b+c}{b \cdot c}$.

Soluție:

Scrie $\frac{a\cdot b}{36} = \frac{a+b}{5} \Rightarrow \frac{a+b}{a\cdot b} = \frac{5}{36}$ 2p

Scrie $\frac{a\cdot c}{12} = \frac{a-c}{7} \Rightarrow \frac{a-c}{a\cdot c} = \frac{7}{12}$ 2p

Scrie $\frac{a}{a\cdot b} + \frac{b}{a\cdot b} = \frac{5}{36} \Rightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{5}{36}$ 1p

Scrie $\frac{a}{a\cdot c} - \frac{c}{a\cdot c} = \frac{7}{12} \Rightarrow \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{7}{12}$ 1p

Finalizare $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{5}{36} + \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \Rightarrow \frac{b+c}{b\cdot c} = \frac{13}{18}$.................................. 1p

Problema 2.

a) *Mulţimile A şi B au ca elemente numere naturale consecutive. Dacă $A \cap B = \{2023\}$ şi diferența dintre cel mai mare element din $A \cup B$ și cel mai mic element din $A \cup B$ este 2023, arătați că mulțimile A și B nu pot avea același număr de elemente.*

b) *Aflați cel mai mare număr natural par n, astfel încât în mulțimea $\{1,2,3, \dots\dots\dots\dots\dots.., n\}$ să existe 2004 de numere care se divid cu 2 dar nu se divid cu 6.*

Soluție:

a)Presupunem că *A şi B* au același număr de elemente

Scrie $A = \{2023, 2024, \dots\dots\dots\dots\dots 2023 + n\}$.. 1p

Scrie $B = \{2023 - n, 2023 - n + 1, \dots\dots\dots\dots 2023\}, n \in \mathbb{N}, n < 2023$ 1p

Dar $\big(2023 + n - (2023 - n)\big) = 2023 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2n = 2023 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right| \Rightarrow 2/2023$ contradicție 1p

b)Scrie numărul n este de forma $6k, 6k + 2, 6k + 4$

I. Dacă $n = 6k$, în mulțime există $3k$ numere divizibile cu 2, k numere divizibile cu 6,
deci $3k - k = 2k$, numere nedivizibile cu 6, dar divizibile cu 2.

$2k = 2004 \Rightarrow k = 1002 \Rightarrow n = 6 \cdot 1002 = 6012$...1p

II. Dacă $n = 6k + 2$, în mulțime sunt $3k + 1$ numere divizibile cu 2, k numere divizibile cu 6,
deci $3k + 1 - k = 2004 \Rightarrow 2k + 1 = 2004 \Rightarrow 2k = 2003$, care nu are soluție număr natural.. 1p

III. Dacă $n = 6k + 4$, în mulțime sunt $3k + 2$ numere divizibile cu 2 și k numere divizibile cu 6,

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

deci $3k + 2 - k = 2004 \Rightarrow 2k + 2 = 2004 \Rightarrow k = 1001 \Rightarrow n = 6 \cdot 1001 + 4 = 6010$.......... 1p
Finalizare: Cel mai mare număr cu proprietatea cerută este 6012... 1p

Problema 3.

Pe dreapta d se iau punctele O, A, B ($A \in (OB)$). Punctele M și N sunt de o parte și de alta a dreptei d. Fie $[OE$ și $[AF$ bisectoarele unghiurilor MOA, respectiv NAB.Demonstrați că $OE \perp AF$ dacă și numai dacă unghiurile MOA și NAB sunt suplementare.

Soluție:

I. Dacă $AF \perp OE$
Fie $P = AF \cap OE \Rightarrow \sphericalangle OPA = 90^\circ$..1p
Scrie ΔOPA : $\sphericalangle POA + \sphericalangle OAP = 90^\circ$ 1p
Scrie $\sphericalangle OAP \equiv \sphericalangle BAF$(unghiuri opuse la vârf) $\Rightarrow \sphericalangle POA + \sphericalangle BAF = 90^\circ$
Scrie $2\sphericalangle POA + 2\sphericalangle BAF = \sphericalangle AOM + \sphericalangle NAB = 180^\circ$.. 1p
II. Dacă $\sphericalangle MOA + \sphericalangle NAB = 180^\circ$
Scrie $\sphericalangle AOM = 2\sphericalangle POA$ 1p
$\sphericalangle NAB = 2\sphericalangle BAF$
$\sphericalangle AOM + \sphericalangle NAB$=$180^\circ$
Scrie $\sphericalangle POA + \sphericalangle BAF = 90^\circ$...1p
Scrie $\sphericalangle OAP \equiv \sphericalangle BAF$(unghiuri opuse la vârf)
Scrie $\sphericalangle POA + \sphericalangle OAP = 90^\circ$.. 1p
Scrie $\Delta AOP \Rightarrow \sphericalangle OPA = 90^\circ$, adică $AF \perp OE$ 1p

Problema 4.

În jurul punctului O considerăm unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente, cu $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC < 180^\circ$. Notăm cu $[OM$ și $[ON$ bisectoarele $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle BOC$, iar cu $[OP$ bisectoarea $\sphericalangle MON$. Știind că suplementul $\sphericalangle AOC$ este de 4 ori mai mare decât $\sphericalangle POB$, arătați că unul din unghiurile AOB sau BOC este drept.

G.M. nr. 10/2023

Soluție:

Scrie $\sphericalangle MON = \frac{\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC}{2} = \frac{\sphericalangle AOC}{2}$ 1p
Scrie $\sphericalangle MOP = \sphericalangle PON = \frac{\sphericalangle MON}{2} = y \Rightarrow \sphericalangle MON = 2y$.. 1p
Scrie $\frac{\sphericalangle AOC}{2} = 2y \Rightarrow \sphericalangle AOC = 4y$.. 1p
Fie $\sphericalangle POB = x$ și $180^\circ - \sphericalangle AOC = 4x$ 1p
Scrie $180^\circ - \sphericalangle AOC = 4x \Rightarrow 180^\circ - 4y = 4x$ 1p
Finalizare $45^\circ - y = x \Rightarrow 45^\circ = x + y \Rightarrow \sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle MOB$
$\Rightarrow \sphericalangle AOB = 90^\circ$, deci $\sphericalangle AOB = \sphericalangle\ drept$.. 2p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro