Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iaşi
2.02.2024

Clasa a XI -a profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

Barem de notare și evaluare

Notă:

- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1:

Fie α o rădăcină complexă a ecuației $x^2 - x + 1 = 0$ *și matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$.

a) *Calculați* A^3.

b) *Determinați matricea* $B = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^{2024}$.

Soluție:

a) α o rădăcină a ecuației $x^2 - x + 1 = 0 \Longrightarrow \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 | \cdot (\alpha + 1) \Longrightarrow \alpha^3 = -1$ 1p

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ 1p

b) Suma $I_2 + A + A^2 + \cdots + A^{2024}$ are 2025 termeni, 2025 $=3 \cdot 675$ 1p

$B = (I_2 + A + A^2) + A^3 \cdot (I_2 + A + A^2) + \cdots + A^{2022} \cdot (I_2 + A + A^2)$ 1p

$A^{3k} = (A^3)^k = (I_2)^k = I_2$ 1p

$I_2 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2\alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

$B = 675 \cdot (I_2 + A + A^2) = 675 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2\alpha - 1 & 0 \end{pmatrix} = 675 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, sau = 675 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ 1p

Subiectul 2:

Suprafața de teren deținută de doi frați are forma patrulaterului ABCD. Pe o hartă cu scara S=1:10000 și raportate la un sistem de coordonate, cu unitatea de măsură 1 cm, punctele au coordonatele A(5,0), B(3,4), C(-1,2), D(-2,-1).

a) *Determinați aria terenului exprimată în hectare.*

b) *Scrieți ecuația dreptei AD.*

c) *Frații vor să construiască un drum EF, care trece prin mijlocul E al segmentului BC și prin* $F \in (AD)$. *Drumul EF împarte terenul în două suprafețe de arii egale. Determinați coordonatele punctului F.*

Soluție:

a) $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| = 10 + 10 = 20\ cm^2$ 1p

S=1:10000 $\Longrightarrow$ 1 cm pe hartă corespunde la 10000 cm=1 hm pe teren, deci pentru 1 cm^2 pe hartă avem 1 hm^2, în teren, așadar aria terenului este 20 ha. 1p

b) $AD: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 7y - 5 = 0$ 1p

c) $E(1,3)$ mijloc BC, $F(a,b) \in AD \Rightarrow a = 7b + 5$ 1p

$A_{CDEF} = 10 = A_{CDE} + A_{DEF} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 7b+5 & b & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow |25b + 25| = 15$ 2p

$b = -\frac{8}{5} < -1 = y_D$ (nu convine), sau $b = -\frac{2}{5} \Rightarrow a = \frac{11}{5} \Rightarrow F\left(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ 1p

Subiectul 3:

Fie funcția $f_a: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f_a(x) = \frac{ax^2+1}{x}$ $, a \in \mathbb{R}, a > 0.$

a) Arătați că funcția $f_a, a > 0$*, nu are limită în* $x_0 = 0$.

b) Arătați că funcția $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ g(x) = f_5(x) - f_4(x)$ *are limită în* $x_0 = 0$ *și calculați* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

c) Determinați numărul real pozitiv a*, pentru care avem* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{f_a(x)} = e^2$.

Soluție:

a) $\lim\limits_{x\nearrow 0} f_a(x) = -\infty, \lim\limits_{x\searrow 0} f_a(x) = +\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f_a(x)$ 2p

b) $g(x) = f_5(x) - f_4(x) = \frac{5x^2+1}{x} - \frac{4x^2+1}{x} = x, x \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ 2p

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{f_a(x)} = e^2 x^2 \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{ax^2+1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+1}{x^2}} = 2 \Rightarrow a = 2$ 3p

Subiectul 4:

Fie funcția $f: D_{max} \to \mathbb{R},\ D_{max} \subset \mathbb{R},\ f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}, a, b > 0, c \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine domeniul maxim al funcției f, în funcție de a, b, c.

b) Să se determine a, b, c *astfel încât f să aibă o asimptota la* $+\infty$*, paralelă cu dreapta* $y = 2x + 1$ *și asimptotă la* $-\infty$*, dreapta* $y = -1$.

Soluție:

a) $bx^2 + cx - 1 \geq 0, \Delta = c^2 + 4b > 0, \forall\ b > 0, c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-c-\sqrt{c^2+4b}}{2b}, x_2 = \frac{-c+\sqrt{c^2+4b}}{2b}, D_{max} = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ 2p

b) Din $a, b > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Asimptota la $+\infty$, este paralelă cu dreapta $y = 2x + 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+\sqrt{bx^2+cx-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(a + \sqrt{b + \frac{c}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) = 2 \Rightarrow a + \sqrt{b} = 2$ 1p

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a^2x^2-bx^2-cx+1}{ax-\sqrt{bx^2+cx-1}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(a^2-b)x^2-cx+1}{\left(ax-|x|\sqrt{b+\frac{c}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(a^2-b)x^2-cx+1}{x\left(a+\sqrt{b+\frac{c}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = -1$ 2p

$\Longrightarrow a^2-b=0, \frac{-c}{a+\sqrt{b}}=-1 \Longrightarrow c=2, b=1, a=1$ 1p