



**Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**  
**Etapa locală, Iași**  
**2.02.2024**

**Clasa a XII -a filieră tehnologică – secțiunea H1**

**Subiectul 1**

Pe mulțimea  $A = [0, a]$ ,  $a > 0$  definim operația  $x * y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}$ .

- Demonstrați că operația „ $*$ ” este o lege de compoziție pe mulțimea  $A$ .
- Știind că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă, determinați elementele simetrizabile în raport cu „ $*$ ”.
- Determinați valoarea numărului real  $a$  astfel încât  $2 * 4 = \frac{a^2}{2}$ .

**Subiectul 2**

1. Se consideră mulțimea  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ .

- Determinați numărul de elemente din mulțimea  $A$ .
- Arătați că pentru orice  $X \in A$  avem  $X^2 = I_3$  sau  $X^2 = O_3$ .

2. Să se determine numărul  $a \in \mathbb{N}, a \geq 5$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = e^{ax + \sqrt{a^2 - 11} - \sqrt{a^2 - 20} - 1}$  este un izomorfism de la grupul  $(\mathbb{R}, +)$  la grupul  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ .

**Subiectul 3**

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x^2 + 2}$ .

- Să se determine primitivele funcției  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x}$ .
- Demonstrați că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  verifică relația  $F(\ln 2) < F(1)$ .
- Să se arate că  $0 \leq \int_0^1 f(x) dx < 2$ .

**Subiectul 4**

La măsurarea nivelului de radiații față de o sursă se stabilește că acesta este dat de formula

$$I(n) = \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x(1 + \ln^2 x)} dx, \text{ unde } n \text{ reprezintă distanța în metri față de sursă.}$$

- Calculați nivelul de radiații la distanța de un metru față de sursă.
- Demonstrați că nivelul de radiații la distanța de un metru față de sursă este mai mare decât nivelul de radiații la distanța de doi metri față de sursă.

**Timp de lucru: 3 ore.**

**Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.**