Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a VIII -a

Problema 1.

Calculați:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024\cdot 2025}\left(\sqrt{2025}+\sqrt{2024}\right)}$;

c) $\sqrt{1+2023\cdot\sqrt{1+2024\cdot\sqrt{1+2025\cdot\sqrt{1+2026\cdot 2028}}}}$.

Problema 2.

a) Să se determine numerele natural n cu proprietatea $5\cdot\left[\sqrt{n-1}\right]+2=n$, unde $\left[a\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului a;

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[2022x\right]+\left\{2023x\right\}=2023$, unde $\left\{a\right\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a.

(GM 10/1023)

Problema 3.

a) Arătați că $x^2-\left(a+b\right)\cdot x+a\cdot b=\left(x-a\right)\left(x-b\right)$, $\left(\forall\right)x,a,b\in\mathbb{R}$;

b) Fie $a,b,x\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\le x\le b$. Arătați că $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$;

c) Fie $x_1,x_2,\ldots,x_{20}\in\left[-1;3\right]$ astfel încât $x_1+x_2+\ldots+x_{20}=0$. Arătați că $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{20}^2\le 60$. Dați un exemplu de valori pentru $x_1,x_2,\ldots x_{20}$ pentru care inegalitatea devine egalitate.

Problema 4.

Fie cuburile $ABCDA'B'C'D'$ respectiv $A'B'C'D'A''B''C''D''$ așezate unul peste celălalt.

a) Să se afle $\sphericalangle\left(AB',A''C''\right)$ și $\sphericalangle\left(AC,BD''\right)$ *(justificare)*;

b) Dacă M este mijlocul lui $\left[BC\right]$, N este mijlocul lui $\left[A'A''\right]$ și $AB=a,\ a\in\mathbb{N}^*$, să se calculeze *MN*;

c) O furnică pornește din N pe fețele cuburilor și ajunge în C pe drumul cel mai scurt. Care este lungimea drumului minim dacă $a=6cm$?

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro