Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iaşi
2.02.2024

Clasa a IX -a profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

Barem de notare și evaluare

Notă:

- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1.

Ionuț a primit cadou de ziua lui, o motocicletă HONDA. Ionuț pleacă din localitatea A cu motocicleta, spre localitatea D, pentru a-i vizita pe bunici. La dus, parcurge distanța de 120 km dintre localitățile A și D, cu viteza constantă **v,** *trecând, fără oprire, prin localitățile (în această ordine) B și C,* $AB = BC = CD = \frac{AD}{3}$. *După vizita făcută bunicilor, Ionuț s-a întors în localitatea A de pornire, pe același traseu, parcurgând fără oprire fiecare din distanțele DC, CB și BA cu o altă viteză, astfel încât media vitezelor a fost egală cu viteza* **v**. *În care din cele două situații, la dus sau la întors, durata parcurgerii drumului a fost mai mare. Justificați răspunsul.*

Soluție:

Timpul în care parcurge Ionuț distanța AD este $t = \frac{AD}{V}$ ………………………………………………… 1p

Viteza la intoarcere $V = \frac{V_1+V_2+V_3}{3}$ ………………………………………………………………………… 1p

Timpul de parcurgere $T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{AB}{V_1} + \frac{BC}{V_2} + \frac{CD}{V_3}$ sau

$T = \frac{1}{3} \cdot AD\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}\right) = \frac{t \cdot v}{3}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}\right)$ ……………………………………………………… 2p

$T = \frac{t}{9}(v_1 + v_2 + v_3)\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$……………………………………………………………… 2p

rezultă $T \geq \frac{t}{9} \cdot 9 = t$ și concluzia………………………………………………………………… 1p

Subiectul 2.

Mulțimea numerelor naturale nenule se grupează în submulțimi, astfel: $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3,4,5\}, A_3 = \{6,7,8,9\}\ldots$; *mulțimea* A_n *conține* $n+1$ *elemente, numere naturale consecutive. Determinați* $k \in \boldsymbol{N}$ *pentru care* $2011 \in A_k$.

Soluție:

Notăm cu a_n primul element din mulțimea A_n

$a_1 = 1, a_2 = 3,\ a_3 = 6, a_4 = 10$ … ….…………………………………………………………… 1p

$a_{n+1} = a_n + n + 1\ \forall\ n \geq 1$………………………………………………………………… 2p

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ……………………………………………………………………………………… 2p

$\frac{62 \cdot 63}{2} < 2011 < \frac{63 \cdot 64}{2} \Rightarrow 2011\ \epsilon A_{62}$ ………………………………………………………… 2p

Subiectul 3.

În centrul unei sfere omogene cu masa $m = 4$ *kg se aplică șase forțe coplanare care fac între ele unghiuri de* 60°. *Forțele au valorile:* $1N, 2N, 3N, 4N, 5N$ *și* $6N$. *În ce direcție se va deplasa sfera?*

Soluție:

Observăm că (A,O,D), (B,O,E), (C,O,F) – coliniare 2p

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM}$ cu $|\overrightarrow{OM}| = 3$.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$ cu $|\overrightarrow{ON}| = 3$.

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP}$ cu $|\overrightarrow{OP}| = 3$. 2p

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON}$ 1p

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON} = 2 \cdot \overrightarrow{ON}$ deci sfera se mișcă în direcția $\overrightarrow{OE}$ 2p

Subiectul 4.

a) Aflați numerele reale x pentru care $\left(\frac{x-1}{3}, \frac{4x+16}{5}\right) \cap \left(\frac{2x-9}{7}, \frac{x+3}{4}\right) = \left(\frac{x-1}{3}, \frac{x+3}{4}\right)$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $\left(\frac{4x-1}{5}, \frac{3x+8}{4}\right) \cap \left(\frac{x-7}{3}, \frac{x}{2}\right) = \varnothing$

Soluție: $\begin{cases} \frac{x-1}{3} < \frac{4x+16}{5} \\ \frac{2x-9}{7} < \frac{x+3}{4} \\ \frac{x-1}{3} < \frac{x+3}{4} \\ \frac{2x-9}{7} < \frac{x-1}{3} \\ \frac{x+3}{4} < \frac{4x+16}{5} \end{cases}$ Rezolvare sistem 2p

$x \in \left(-\frac{49}{11}, 13\right)$ 1p

b) caz I $\begin{cases} \frac{4x-1}{5} < \frac{3x+8}{4} \\ \frac{x-7}{3} < \frac{x}{2} \\ \frac{3x+8}{4} < \frac{x-7}{3} \end{cases}$

$x \in \left(-14, -\frac{52}{5}\right)$ 2p

caz II $\begin{cases} \frac{4x-1}{5} < \frac{3x+8}{4} \\ \frac{x-7}{3} < \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} < \frac{4x-1}{5} \end{cases}$

$x \in \left(\frac{2}{3}, 44\right)$ 2p