Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a VII –a

Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 probleme.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Problema 1.

a) *Să se determine mulțimea* $M = \left\{a \in \boldsymbol{Z} \middle| a = \frac{8n^2+17}{4n+3}, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

b) *Aflați numerele naturale de șase cifre, de forma* $\overline{tuvxyz}$, *care satisfac relația:*

$$7\left(\sqrt{\overline{tuvxyz}} + \sqrt{\overline{xyz}}\right) = 8\left(\sqrt{\overline{tuvxyz}} - \sqrt{\overline{xyz}}\right).$$

Soluție:

a) $4n+3 \mid 8n^2+17$ *și* $4n+3 \mid 2n(4n+3) = 8n^2+6n \Rightarrow$ $4n+3 \mid 6n-17$	1p
$4n+3 \mid 2(6n-17)$ *și* $4n+3 \mid 3(4n+3) \Rightarrow 4n+3 \mid 43$	1p
$4n+3 \in \{1;\ -1; 43; -43\} \Rightarrow n \in \{-1; 10\} \Rightarrow a \in \{-25; 19\} = M$	1p
b) $\sqrt{\overline{tuvxyz}} = 15\sqrt{\overline{xyz}} \Rightarrow \overline{tuvxyz} = 225\overline{xyz} \Rightarrow 125\overline{tuv} = 28\overline{xyz}$	1p
Din $(125; 28) = 1$ *și relația precedentă* $\Rightarrow \overline{xyz} \vdots 125$ *și* $\overline{tuv} \vdots 28$	1p
Obține: $\overline{xyz} \in \{500; 625; 750; 875\} \Rightarrow \overline{tuv} \in \{112; 140; 168; 196\}$ *Deci*, $\overline{tuvxyz} \in \{112500; 140625; 168750; 196875\}$	2p

Problema 2.

a) *Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:*

$$x^3 - 3x^2y - 10x + 30y - 6 = 0.$$

b) *Determinați* $a \in \boldsymbol{N}$ *astfel încât raportul* $\frac{\sqrt{11}+7\sqrt{a}}{3\sqrt{11}+2\sqrt{a}}$ *să fie număr întreg.*

Soluție:

a) *Ecuația se scrie*: $(x-3y)(x^2-10) = 6$	1p
Obține soluțiile $(x, y) \in \{(4; 1), (2; 1), (3; 3), (-3; 1)\}$	2p
b) *Fie* $n = \frac{\sqrt{11}+7\sqrt{a}}{3\sqrt{11}+2\sqrt{a}} \Rightarrow (3n-1)\sqrt{11} = (7-2n)\sqrt{a} \overset{\cdot\sqrt{a}}{\Leftrightarrow}$	2p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$(3n-1)\sqrt{11a} = (7-2n)a \Leftrightarrow \sqrt{11a} = \frac{(7-2n)a}{3n-1} \in \boldsymbol{Q} \Rightarrow$ $11a\ este\ pătrat\ perfect, deci, a = 11k^2, k \in \boldsymbol{N}$	
$Obține\ n = \frac{7k+1}{2k+3} \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow k = 8 \Rightarrow a = 704$	2p

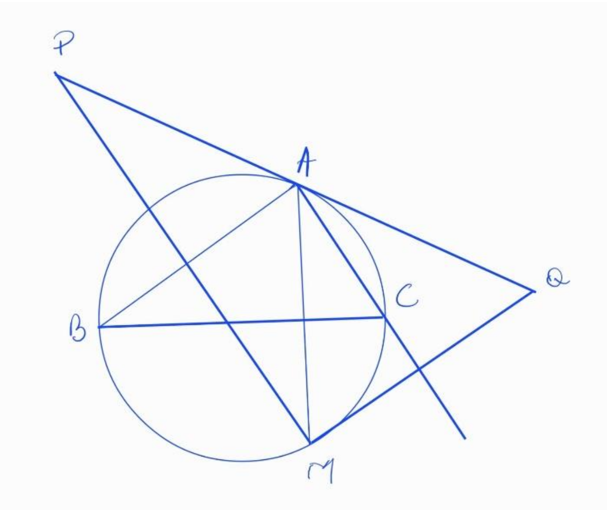
Problema 3.

Pe arcul BC, căruia nu-i aparține punctul A, al cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, se consideră punctul M. Fie P, respectiv Q, simetricele punctului M față de dreapta AB, respectiv AC.

a) Să se arate că punctele P, A și Q sunt coliniare.

b) Să se arate că dreapta PQ este tangentă la cerc în punctul A dacă și numai dacă punctul M este simetricul punctului A față de dreapta BC.

Soluție:



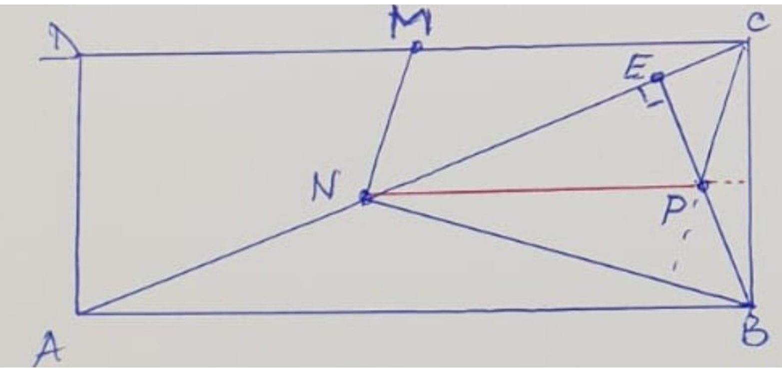
a) $\widehat{PAB} \equiv \widehat{BAM}\ (P = simetricul\ lui\ M\ față\ de\ AB)$ $\widehat{QAC} \equiv \widehat{CAM} (Q = simetricul\ lui\ M\ față\ de\ AC)$ $\Rightarrow \widehat{MAP} + \widehat{MAQ} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{CAM}) = 2\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow P, A\ și\ Q\ sunt\ coliniare$	2p
b) $PQ\ este\ tangentă\ la\ cerc \Leftrightarrow \widehat{QAC} = \frac{arc\ AC}{2}$	1p
$Dar\ \widehat{QAC} = \widehat{CAM} = \frac{arc\ MC}{2}$	1p
$Deci, PQ\ este\ tangentă\ cercului\ (în\ punctul\ A) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow arc\ AC \equiv arc\ MC \Leftrightarrow AC \equiv MC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow M\ este\ simetricul\ punctului\ A\ față\ de\ BC$ (demonstrează)	3p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 4.

Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $BE \perp AC, E \in (AC)$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor CD, respectiv AE. Demonstrați că $MN \perp NB$.

Soluție:



$Construim\ NP \parallel AB, P \in (BE)$	2p
$Cum\ N\ este\ mijlocul\ segmentului\ AE \overset{RTLM}{\Longrightarrow} P\ este\ mijlocul\ (BE)$ $\Rightarrow NP\ este\ linie\ mijlocie\ în\ \Delta EAB \Rightarrow NP \parallel AB$ $Dar, cum\ AB \perp BC, obținem\ că\ NP \perp BC$	2p
$Deci, P\ este\ ortocentrul\ \Delta NBC \Rightarrow CP \perp BN$	1p
$Dar, din\ NP\ linie\ mijlocie\ în\ \Delta EAB \Longrightarrow NP = \frac{AB}{2} = CM \Rightarrow$ $\Rightarrow NPCM\ paralelogram \Rightarrow CP \parallel MN \Rightarrow MN \perp BN$	2p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro