Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{M(a)=I_2+aA \mid a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătați că $M(a)\cdot M(b)\in G$, oricare ar fi numerele reale *a* și *b*.

b) Determinați numărul real *x* pentru care $\left(M(x)\right)^{1001}=M\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Gazeta Matematică 10/2023 - Supliment

Problema 2. Pentru fiecare număr natural *n* se consideră funcția

$$f_n:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{\sin x}{x^n}.$$

a) Arătați că funcția f_n are limită la $+\infty$ dacă și numai dacă $n\geq 1$.

b) Arătați că funcția f_n are limită în 0 dacă și numai dacă *n* este impar sau $n=0$.

Problema 3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}2^{2k+1}\cdot C_{2n}^{2k},\ b_n=\sum_{k=0}^{n}3^{2k},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Problema 4. Se consideră trei numere reale *a, b* și *c* cu $b^2<4ac$ și o matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(aX^2+bX+cI_2\right)=0$. Demonstrați că $aX^2+bX+cI_2=O_2$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro