Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iași
2.02.2024
Clasa a X-a- filieră tehnologică – secțiunea H1

Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1:

Fie numerele reale $a = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$, $b = \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ *și* $x = a - b$.

a) *Arătați că* $a \cdot b = 2$ *și* $a^3 - b^3 = 20$.

b) *Demonstrați că* $x^3 = 20 - 6x$.

c) *Arătați că* $x = 2$.

Soluție:

a) $a \cdot b = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = \sqrt[3]{\left(6\sqrt{3}+10\right)\cdot\left(6\sqrt{3}+10\right)} = \sqrt[3]{\left(6\sqrt{3}\right)^2 - 10^2} =$

$\sqrt[3]{108-100} = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow a \cdot b = 2.$ 1p

$a^3 = 6\sqrt{3}+10$, $b^3 = 6\sqrt{3}-10, a^3 - b^3 = \left(6\sqrt{3}+10\right) - \left(6\sqrt{3}-10\right) = 20.$ 1p

b) $x^3 = (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a^3 - b^3) - 3ab(a-b)$ 1p

$a \cdot b = 2$, $a^3 - b^3 = 20$, $x^3 = 20 - 3 \cdot 2 \cdot x \Rightarrow x^3 = 20 - 6x$ 1p

c) $x^3 = 20 - 6x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^3 - 20 + 6x = 0 \Rightarrow x^3 - 2^3 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow$

$(x-2)\cdot(x^2+2x+4) + 6(x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x^2+2x+10) = 0$ 1p

$x - 2 = 0$ sau $x^2 + 2x + 10 = 0$ 1p

Ecuația $x^2 + 2x + 10 = 0$ cu $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$ nu admite soluții reale.

Ecuația $x - 2 = 0$ are o unică soluție reală, $x = 2$. 1p

Subiectul 2:

a) *Aflați numerele reale* x *și* y *astfel încât* $\frac{x-2}{1+i} + \frac{y-2}{1-i} = i$, *unde i este unitatea imaginară.*

b) *Determinați mulțimea* $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \bar{z} = 0\}$, *unde* $\bar{z}$ *este conjugatul numărului complex* z.

c) *Fie punctele necoliniare* A, B, C *de afixe* $z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, $z_B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, *respectiv* $z_C = -1$. *Stabiliți natura triunghiului ABC și apoi determinați afixul centrului cercului circumscris acestuia.*

Soluție:

a) $x, y \in \mathbb{R}$, $\frac{(x-2)(1-i)}{(1+i)(1-i)} + \frac{(y-2)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i \Rightarrow \frac{x - xi - 2 + 2i + y + yi - 2 - 2i}{1 - i^2} = i$

$(x + y - 4) + (-x + y)i = 2i$ 1p

Se aplică egalitatea a două numere complexe și rezultă că $\begin{cases} x+y-4=0 \\ -x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ……..…1p

b) Fie $z=x+yi$, unde $x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow \bar{z}=x-yi, z^2=(x^2-y^2)+2xyi$.

$z^2+\bar{z}=0 \Rightarrow (x^2-y^2+x)+(2xy-y)i=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2+x=0 \\ y(2x-1)=0 \end{cases}$ ………..…….1p

$y(2x-1)=0 \Rightarrow y=0$ sau $x=\frac{1}{2}$.

Dacă $\begin{cases} x^2-y^2+x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\{0;-1\} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z\in\{0;-1\}$. ………………….……....…..1p

Dacă $\begin{cases} x^2-y^2+x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=\frac{3}{4} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\in\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z\in\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

$M=\left\{0;-1;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. ……………………….….………………...…..1p

c) $AB=|z_B-z_A|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\right|=|\sqrt{3}i|=\sqrt{3}, AC=|z_C-z_A|=\left|-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\right|$

$=\left|-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}, BC=|z_C-z_B|=\left|-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\right|=\left|-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right|=\sqrt{3}$

$AB=AC=BC=\sqrt{3} \Rightarrow \Delta ABC$ este triunghi echilateral. ……………….………...…..1p

Centrul cercului circumscris triunghiului echilateral coincide cu centrul de greutate al triunghiului. $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i+(-1)}{3}=0 \Rightarrow z_G=0$. ……….………......…....1p

Subiectul 3:

Considerăm numerele reale: $x=(2^2)^{\frac{1}{4}}:(4^3)^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{8}}$, $y=lg65-lg14+lg\frac{22}{195}-lg\frac{0,011}{21}$ *și* $z=log_4 9+log_8 125$.

a) *Determinați numerele* x *și* y.

b) *Arătați că* $z=log_2 15$.

c) *Ordonați crescător numerele* x,y,z.

Soluție:

a) $x=(2^2)^{\frac{1}{4}}:(4^3)^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{1}{2}}:2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}$ …………………………………………………..1p

$x=2^{\frac{1}{2}-3+\frac{1}{2}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$ ……………………………………………………………………1p

$y=lg65-lg14+lg\frac{22}{195}-lg\frac{0,011}{21}=lg\frac{65}{14}\cdot\frac{22}{195}-lg\frac{0,011}{21}$ …………………………....1p

$y=lg\frac{11}{21}-lg\frac{11}{1000\cdot 21}=lg\frac{11}{21}\cdot\frac{1000\cdot 21}{11}=lg10^3=3$ 1p

b) $z=\log_4 9+\log_8 125=\frac{\log_2 9}{\log_2 4}+\frac{\log_2 125}{\log_2 8}$ ..……………………………………………1p

$z=\frac{2\log_2 3}{2}+\frac{3\log_2 5}{3}=\log_2(3\cdot 5)=\log_2 15$ ………..……………………………………1p

c) $\frac{1}{4} < 1 = \log_2 2 < 3 = \log_2 8 < \log_2 15 \Longrightarrow x < y < z$ ……………………………………..1p

Subiectul 4:

Comprimând un gaz, acesta își mărește presiunea de la p_1 *la* p_2 *și își micșorează volumul de la* v_1 *la* v_2*. Compresiunea se face după legea* $p \cdot v^n = constant$.
Dacă $n = 1{,}5$ *și aerul este comprimat de la o atmosferă la 10 atmosfere, determinați raportul dintre volumul inițial* v_1 *și volumul final* v_2.

Soluție:

$p_1 \cdot v_1^n = C$ și $p_2 \cdot v_2^n = C \Longrightarrow p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n$ ……………………………………..2p

$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^n}{v_2^n} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n$ ……………………………………..1p

$lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = n \cdot lg\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$ ……………………………………..1p

$lg\left(\frac{10}{1}\right) = n \cdot lg\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \Leftrightarrow 1 = n \cdot lg\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n} = lg\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$ ……………………………………..1p

$\frac{10}{15} = lg\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = lg\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = 10^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt[3]{100}$ ……………………………………..2p