Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iași
2.02.2024

Clasa a XI-a- filieră tehnologică – secțiunea H1

Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1:

I. *Fie matricea* $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in R.$

a) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$;

b) Să se afle numărul natural n astfel încât suma elementelor matricei B este 58, unde $B = A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(n)$.

II. *Să se determine matricea X, pătratică de ordin trei, cu elemente numere naturale, dacă are loc relația* $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluție:

I. a) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$............. 1 p

b) $B = A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(n) = A(1+2+\cdots+n) = A(\frac{n(n+1)}{2})$ .... 1 p

Suma elementelor matricei B este $3 + \frac{n(n+1)}{2} = 58$ de unde găsește soluția unică $n = 10 \in N$ .... 1 p

II. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{pmatrix} \in M_3(N)$ din $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se obține $\begin{cases} a+4b+2c=3 \\ x+4y+2z=2 \\ u+4v+2t=1 \end{cases}$......... 1p

Soluțiile naturale sunt: $(a,b,c) \in \{(3,0,0)\,;\,(1,0,1)\}$ $(x,y,z) \in \{(2,0,0);\,(0,0,1)\}$ $(u,v,t) \in \{(1,0,0)\}$ 2p

$X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

Subiectul 2:

Un proiectant realizează un plan al staţiilor de încărcare electrice din apropierea unui monument din centrul oraşului. Consideră locaţia monumentului drept originea $O(0,0)$ a sistemului xOy şi observă că staţiile de încărcare sunt situate în punctele $A(-3,4); B(4,3)$ şi $C(2,-1)$. Staţiile B şi C se află pe Bulevardul X (unitatea de măsură este 1 u.m.= 20m).

a) *Verificaţi dacă staţiile A şi B sunt egal depărtate de monument.*

b) *Staţiile de încărcare A şi B, respectiv A şi C sunt unite de 2 alei drepte care, împreună cu Bulevardul X delimitează o zonă pietonală. Care este suprafaţa acestei zone pietonale?*

c) *Demonstraţi că drumul cel mai scurt dintre staţia A şi Bulevardul X este mai mare decât 130 m (se consideră $\sqrt{5} \simeq 2,23$).*

Soluție:

a) Calculează $OA=\sqrt{(x_A-x_o)^2+(y_A-y_O)^2}=5$, $OB=\sqrt{(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2}=5$ 1p

Finalizează cu $OA=OB$ 1p

b) Suprafața zonei pietonale este

$$\mathscr{A}_{ABC}=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot(-27-4+8-6-3-16)\right|=24u.m.^2$$ 1p

Calculează $24\,u.m.^2=24\cdot 20\cdot 20\,m^2=9600\,m^2$ 1p

c) Determină ecuația Bulevardului X (BC) : $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x-y-5=0$.........1p

Calculează $d(A,BC)=\dfrac{|2\cdot x_A-y_A-5|}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}}=\dfrac{|2\cdot(-3)-4-5|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\dfrac{|-15|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$ u.m. 1p

Finalizează $3\sqrt{5}\simeq 3\cdot 2,23\,u.m.=6,69\,u.m.=6,69\cdot 20=133,8\,m>130\,m$ 1p

Subiectul 3:

a) *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(bx)}{\sqrt{x+a^2}-a}$ *, unde* $a,b\in(0,+\infty)$.

b) *Să se determine* $a\in\mathbb{R}$ *pentru care* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+tg2x+\ldots+tg2023x}{\sqrt{x+a^2}-a}=2024^2$.

Soluție:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(bx)}{\sqrt{x+a^2}-a}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tg(bx)}{bx}\cdot bx\right)\bullet\dfrac{\sqrt{x+a^2}+a}{\left(\sqrt{x+a^2}\right)^2-a^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tg(bx)}{bx}\cdot bx\right)\bullet\dfrac{\sqrt{x+a^2}+a}{x+a^2-a^2}=$ ……2p

$=\lim\limits_{x\to 0}(bx)\bullet\dfrac{|a|+a}{x}=2ab$ ……………………………………………..……………………2p

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+tg2x+\ldots+tg2023x}{\sqrt{x+a^2}-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sqrt{x+a^2}-x}+\ldots+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2023x}{\sqrt{x+a^2}-x}=$ ……….……..1p

$=2a\cdot 1+2a\cdot 2+\ldots+2a\cdot 2023=2a(1+2+\ldots+2023)=2a\cdot\dfrac{2023\cdot 2024}{2}=2023\cdot 2024a$ ……..…1p

Finalizare $2023\cdot 2024a=2024^2\Rightarrow a=\dfrac{2024}{2023}$ ……………………………..…………….……1p

Subiectul 4:

Fie funcția $f:R\to R, f(x)=\begin{cases}\frac{sin\,5(x-1)}{2(x-1)}, dacă\ x<1\\ \frac{x^2+ax+b}{x+1},\ dacă\ x\geq 1\end{cases}$ $;unde\ a,b\in R.$

a) *Pentru* $a=-2$ *și* $b=3$ *verificați dacă există* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

b) *Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția admite limită în* $x_0=1$ *și* $y=x+2$ *este ecuația asimptotei oblice a funcției spre* $+\infty$.

Soluție:

a) $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\sin 5(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left[\frac{\sin 5(x-1)}{5(x-1)}\cdot\frac{5}{2}\right]=\frac{5}{2}$ ……………………………………………………………. 1p

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2-2x+3}{x+1}=1$; $l_s(1)\neq l_d(1)\to(\nexists)\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ……………………………………1p

b) $funcția\ admite\ limită$ în $x_0=1\ \to l_s(1)=l_d(1)\ \to\frac{5}{2}=\frac{1+a+b}{2}\to a+b=4$ ……………1p

$y=x+2\ asimptota\ oblică\ \to m=1, n=2$ ……………………………………………………………… 1p

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x}=1\ (A)$ ………………………………………………………………………… 1p

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+b}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-1)x+b}{x+1}=a-1$ ……….. 1p

$\begin{cases}a+b=4\\ a-1=2\end{cases}\to\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}$ …………………………………………………………………… 1p