Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iași
2.02.2024
Clasa a XI -a filieră tehnologică – secțiunea H1

Subiectul 1

I. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}, x\in R.$

a) Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$;

b) Să se afle numărul natural n astfel încât suma elementelor matricei B este 58, unde $B=A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(n)$.

II. Să se determine matricea X, pătratică de ordin trei, cu elemente numere naturale, dacă are loc relația $X\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

Subiectul 2

Un proiectant realizează un plan al staţiilor de încărcare electrice din apropierea unui monument din centrul oraşului. Consideră locaţia monumentului drept originea $O(0,0)$ a sistemului xOy şi observă că staţiile de încărcare sunt situate în punctele $A(-3,4); B(4,3)$ *și* $C(2,-1)$. Staţiile B *și* C se află pe Bulevardul X (unitatea de măsură este 1 u.m.= 20m).

a) Verificaţi dacă staţiile A şi B sunt egal depărtate de monument.

b) Staţiile de încărcare A şi B, respectiv A şi C sunt unite de 2 alei drepte care, împreună cu Bulevardul X delimitează o zonă pietonală. Care este suprafaţa acestei zone pietonale?

c) Demonstraţi că drumul cel mai scurt dintre staţia A şi Bulevardul X este mai mare decât 130 m (se consideră $\sqrt{5}\simeq 2,23$).

Subiectul 3

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(bx)}{\sqrt{x+a^2}-a}$, unde $a,b\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+tg2x+\ldots+tg2023x}{\sqrt{x+a^2}-a}=2024^2$.

Subiectul 4

Fie funcția $f:R\to R, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5(x-1)}{2(x-1)}, dacă\ x<1\\ \dfrac{x^2+ax+b}{x+1},\ dacă\ x\geq 1\end{cases}; unde\ a,b\in R.$

a) Pentru $a=-2$ și $b=3$ verificați dacă există $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$;

b) Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția admite limită în $x_0=1$ și $y=x+2$ este ecuația asimptotei oblice a funcției spre $+\infty$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.