Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a IX -a

Problema 1.

Arătați că $16^n + 4^n - 2$ se divide cu 18, pentru orice număr natural n.

Problema 2.

a) Demonstrați că $xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$, pentru orice numere reale x, y, z.

b) Pentru orice numere pozitive a, b, c, arătați că: $\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2 \cdot c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2 \cdot a^2}{c^2+a^2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6}$.

c) Fie $a, b, c, d \in (0, +\infty)$. Demonstrați că:

$$\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}} + \frac{b}{\sqrt{ac+cd+da}} + \frac{c}{\sqrt{ab+bd+da}} + \frac{d}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Problema 3.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2024^{[x]} = x + \{2024 + \{x\}\}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Problema 4.

Se consideră un triunghi ABC și punctele D, Q, E cu $D \in (AB), Q \in (CD), C \in (BE)$, astfel încât $\frac{AB}{AD} = \frac{CQ}{QD} = \frac{BE}{BC}$. Fie punctele F și M astfel încât $ECDF$ este paralelogram, iar $M \in DE$. Demonstrați că punctele Q, M, F sunt coliniare dacă și numai dacă $2 + \frac{AB}{AD} = \frac{DE}{DM}$.

(Supliment GM nr. 11/2023)

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro