**Olimpiada Națională de Matematică 2024**

**Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024**

# Clasa a X -a

## Problema 1.

Numerele complexe nenule $a,b,c$ au același modul și verifică relația $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{R}$. Arătați că $(a-b)(b-c)(c-a)=0$.

*Supliment Gazeta Matematică*

## Problema 2.

Se consideră egalitatea $\left[\frac{x-9}{10}-\left[\frac{x}{10}\right]\right]=\log_{11}\frac{x}{9}$, $x\in\mathbb{R}$, unde prin $[t]$ s-a notat partea întreagă a numărului real *t*.

a) Arătați că $\frac{x-9}{10}-\left[\frac{x}{10}\right]\in(-1,1)$.

b) Determinați numerele reale *x* pentru care egalitatea este adevărată.

## Problema 3.

Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, cu proprietatea că:

$f\left(f(n+1)\right)=f\left(f(n)+1\right)=an+4049, \forall n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că funcția $f$ este injectivă.

b) Determinați valoarea numărului *a* și funcția $f$ care îndeplinesc condițiile din enunț.

## Problema 4.

a) Dacă $a,b\in(1,\infty)$, demonstrați că $a^{\sqrt[n]{\log_a b}}=b^{\sqrt[n]{\log_b^{n-1} a}}$, pentru orice număr natural $n, n\geq 2$.

b) Dacă $a,b,c\in(1,\infty)$, demonstrați că $(ab)^{\sqrt{\log_a b}}+(bc)^{\sqrt{\log_b c}}+(ca)^{\sqrt{\log_c a}}\geq a^2+b^2+c^2$.

**Timp de lucru: 3 ore.**
**Fiecare problemă este notată cu 7 puncte**



Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro