Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iaşi
2.02.2024

Clasa a X -a profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

Subiectul 1:

a) Demonstrați că, dacă $z \in \mathbb{C}, |z| = m, m \in \mathbb{R}, m > 0$, atunci $\bar{z} = \frac{m^2}{z}$.

b) Se consideră $a, b \in \mathbb{C}, |a| = |b| = 2$ și $ab + a + b = 2$. Determinați numerele complexe a și b.

Subiectul 2:

a) Determinați numerele reale x care verifică relația: $9^x + 49^x = 2 \cdot 21^x$;

b) Determinați numerele reale x care verifică relația: $4^x + 9^x + 25^x + 49^x = 6^x + 15^x + 35^x + 14^x$.

Subiectul 3

Se consideră numerele reale a, b, c care verifică condițiile: $\begin{cases} \log_a b = c \\ \log_c(a^2+1) = 1 \\ 5\log_b a + 24 = 5c \end{cases}$

a) Arătați că c este număr natural;
b) Determinați valorile lui a și b;
c) Arătați că: $\frac{1}{\sqrt{1+\log_a \sqrt{c}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\log_c a^2}} \le \sqrt{2}$.

Subiectul 4

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 2^x$.

a) Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $f\left(\sqrt[4]{8}\right), f\left(\sqrt[3]{5}\right), f\left(\sqrt[6]{26}\right)$;

b) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}\right)$ este număr rațional;

c) Să se determine numărul natural nenul n, pentru care: $f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}\right) = \sqrt[5]{16}$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.