Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iaşi
2.02.2024
Clasa a XII-a- filieră tehnologică – secțiunea H1

Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1

Un număr natural A se numește „ideal” dacă există două numere naturale x și y astfel încât A = 3x + 4y.

a) *Verificați dacă numerele 6, 7, 8, 11 sunt „ideale”.*
b) *Demonstrați că dacă $n \in \mathbb{N}$ este „ideal”, atunci n + 3 este „ideal”.*
c) *Arătați că numărul 2024 este „ideal”.*

Soluție:

a)Scrie $6 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0$; $7 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1$ și trage concluzia că 7; 6 sunt „ideale” 1p
Scrie $8 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2$; $11 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2$ și trage concluzia că 8; 11 sunt „ideale” 1p
b) Presupune că n este „ideal” și scrie $n + 3 = 3x + 4y + 3$, $x,y \in \mathbb{N}$ 1p
Finalizare $n + 3 = 3(x+1) + 4y$, deci n+ 3 este „ideal” 1p
c) Observă că $2024 = 3 \cdot 674 + 2$ și 3k este „ideal” pentru orice $k \in \mathbb{N}$ 1p
Observă că $8 = 3 \cdot 2 + 2$: $11 = 3 \cdot 3 + 2$ sunt numere ideale și generalizează, orice număr natural de forma 3k + 2 este „ideal” 1p
Demonstrează prin inducție matematică că 3k + 2 este ideal pentru $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ și finalizare 2024 este „ideal” 1p

(Sau)

$2024 = 3 \cdot 674 + 2 = 3 \cdot 672 + 3 \cdot 2 + 2 = 3 \cdot 672 + 8 = 3 \cdot 672 + 4 \cdot 2$, deci 2024 este „ideal" 3p

Subiectul 2

Se consideră triunghiul ABC cu centrul de greutate G. Notăm cu N simetricul lui G față de mijlocul M al segmentului BC.

a) *Arătați că* $\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$.
b) *Determinați relația dintre numerele reale a,b,c pentru care* $a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Soluție:

a)ΔNBC: NM mediană => $2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$ 1p

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MG}$ => $\overrightarrow{NG}=2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$ 1p

(SAU)
BGCN paralelogram => $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$ 2p

b) $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NG}$ 1p
$2a\overrightarrow{NG}+b\overrightarrow{NB}+c\,\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ 1p
$2a(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC})+b\overrightarrow{NB}+c\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ 1p
$\overrightarrow{NB}(2a+b)+\overrightarrow{NC}(2a+c)=\vec{0}$ 1p
$\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC}$ *necoliniari* => 2a+b = 0 și 2a+c = 0. Obține $b=c=-2a, unde\ a\in R$ 1p

Subiectul 3

*Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice cu termeni pozitivi și rația **r** număr real nenul.*

a) Demonstrați că $\frac{a_k+a_{k+1}}{a_k^2\cdot a_{k+1}^2}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_k^2}-\frac{1}{a_{k+1}^2}\right)$ pentru orice k număr natural nenul.

b) Notând $S=\frac{a_1+a_2}{a_1^2\,a_2^2}+\frac{a_2+a_3}{a_2^2a_3^2}+\cdots+\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n^2\,a_{n+1}^2}$ demonstrați că $S=\frac{\boldsymbol{n(a_1+a_{n+1})}}{\boldsymbol{a_1^2\cdot a_{n+1}^2}}$.

c) Arătați că $\frac{S\cdot a_1^2a_{n+1}^2}{2n}>\sqrt{a_1\cdot a_{n+1}}$, unde S este suma calculată anterior.

Soluție:

a) $\frac{a_k+a_{k+1}}{a_k^2\cdot a_{k+1}^2}=\frac{a_k^2-a_{k+1}^2}{a_k^2\cdot a_{k+1}^2\,(a_k-a_{k+1})}=\frac{a_k^2-a_{k+1}^2}{r(a_k^2\cdot a_{k+1}^2)}$ 1p
$=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_k^2}-\frac{1}{a_{k+1}^2}\right)$ 1p

b) $S=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_3^2}\ldots+\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n+1}^2}\right)$ 1p

$=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_{n+1}^2}\right)=\frac{(a_{n+1}+a_1)(a_{n+1}-a_1)}{ra_1^2a_{n+1}^2}$ 1p

$=\frac{\boldsymbol{n(a_1+a_{n+1})}}{\boldsymbol{a_1^2\cdot a_{n+1}^2}}$ (finalizare) 1p

c) Înlocuiește S în inegalitate 1p

Finalizare 1p

Subiectul 4

La o firmă particulară patronul explică tinerilor angajați că salariul de debut este 2000 lei lunar, iar dacă rezultatele muncii depuse sunt corespunzătoare, salariul se mărește lunar, timp de un an, după cum urmează:

Varianta 1: Cresterea lunară cu 44%.

Varianta 2: Creșterea cu 20% la două săptămâni (salariul se plătește în două tranșe, avans și lichidare).Care din cele două variante ar fi mai avantajoasă pentru tânărul angajat?

Soluție:

Notează cu a_n salariul obținut în luna a **n**-a prin prima variantă de salarizare, și b_n salariile din luna a **n**-a în varianta a doua de salarizare și respectiv cu x și y procentele de creștere pentru cele două variante de salarizare.

Observă că salariile lunare obținute în prima variantă de salarizare sunt în progresie geometrică cu rația 1+x 1p

Demonstrează că salariile lunare obținute prin a doua variantă de salarizare sunt în progresie geometrică cu rația $(1+y)^2$ 2p

Obține $a_n = 2000\,(1+x)^{n-1}$ $n \in N^*$... 1p

$b_n = 1000\,(2+y)(1+y)^{2n-2}$ $n \in N^*$... 1p

Înlocuiește x = 0,44; y = 0,2 .... 1p

Arată $a_n < b_n$ pentru orice n număr natural 1p