Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iaşi
2.02.2024

Clasa a XII -a profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

Barem de notare și evaluare

Notă:

- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1:

Fie $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}$. *Pentru fiecare număr real* a, *considerăm matricea* $X(a)=I_2+aA$ *și mulțimea* $G=\{(X(a)|\ a\in\boldsymbol{R},\ a\neq -1)\}$.

a) *Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe* G.

b) *Demonstrați că* $(G,\ \cdot)$ *este grup abelian.*

c) *Fie* $n\in\boldsymbol{N}^*$, *calculați* $X(-n)X(-n+1)\dots X(-1)X(0)X(1)\dots X(n)$.

SOLUȚIE:

a) Fie $X(a),X(b)\in G$, deci $a,b\in\mathbf{R},\ a\neq -1,\ b\neq -1$.
Cum $A^2=A\ \Rightarrow X(a)\,X(b)=(I_2+aA\,)(I_2+bA\,)=I_2+A(a+b+ab)=X(a+b+ab)$.
Deoarece $a+b+ab\neq -1$(altfel: $(a+1)(b+1)=0$, fals)$\Rightarrow X(a)\,X(b)\in G$…...…………...….2p

b) Folosind $X(a)\,X(b)=X(a+b+ab)\ \forall\ a,b\in\mathbf{R},\ a\neq -1,\ b\neq -1$, deducem că ” $\cdot$ “ este comutativă, ” $\cdot$ “ este asociativă (din asociativitatea înmulțirii matricelor).
Elementul neutru este $I_2=X(0)\in G$. Orice $X(a)\in G$ este inversabilă și $\left(X(a)\right)^{-1}=X\left(-\frac{a}{a+1}\right)\in G$.
Rezultă că $(G,\ \cdot)$ este grup abelian ……………………………………..……..……………….3p

c) Observăm că $X(a)\cdot\ X(-1)=X(-1),\ \forall\ a\in\mathbf{R}$.
Cum $(G,\ \cdot)$ este grup abelian $\Rightarrow\ X(-n)X(-n+1)\dots X(-2)X(0)X(1)\dots X(n)=X(t),\ t\in\mathbf{R}$..….1p
(am separat $X(-1)\notin\ G$). Produsul cerut este $X(t)X(-1)=X(-1)$. …………………..……..…….1p

Subiectul 2:

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x*y=3xy-x+5y$, *pentru orice* $x,y\in\boldsymbol{R}$.

a) *Demonstrați că legea* $*$ *nu este comutativă și nici asociativă.*

b) *Stabiliți dacă legea* $*$ *admite element neutru.*

c) *Andrei afirmă că ”există* a *și* b, $a\neq b$, *numere raționale neîntregi astfel încât* $a*b$ *și* $b*a$ *să fie numere întregi“. Stabiliți dacă afirmația lui Andrei este adevărată sau nu.*

SOLUȚIE:

a) $1*0=-1,\ 0*1=5\ \Rightarrow 1*0\neq 0*1$, deci legea $*$ nu este comutativă
$(0*1)*2=35,\ 0*(1*2)=75\ \Rightarrow (0*1)*2\neq 0*(1*2)$, deci legea $*$ nu este asociativă …3p

b) Fie e elementul neutru $\Rightarrow x * e = e * x = x,\ \ \forall\, x \in \mathbf{R}$.
$3xe - x + 5e = 3ex - e + 5x = x,\ \forall\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow 3e - 1 = 3e + 5 = 1$ și $5e = -e = 0$, fals. Legea $*$ nu are element neutru. ……………………………………………………………..…..………………….2p

c) Fie $a, b \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ și $a * b \in \mathbf{Z}$, $b * a \in \mathbf{Z}$, deci $3ab - a + 5b \in \mathbf{Z}$, $3ba - b + 5a \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ diferența lor este din $\mathbf{Z} \Rightarrow 6(b-a) \in \mathbf{Z}$. Căutăm a și b de forma $a = \frac{m}{6}, b = \frac{n}{6}$, cu $m, n \in \mathbf{Z}$ (nedivizibile cu 6).
Din prima condiție $\Rightarrow \frac{mn}{12} - \frac{m}{6} + \frac{5n}{6} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{mn}{12} - \frac{m}{6} - \frac{n}{6} + n \in \mathbf{Z}$, de aici $\frac{mn-2(m+n)}{12} \in \mathbf{Z}$.
Din a doua condiție $\Rightarrow \frac{mn}{12} - \frac{n}{6} + \frac{5m}{6} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{mn}{12} - \frac{n}{6} - \frac{m}{6} + m \in \mathbf{Z}$, de aici $\frac{mn-2(m+n)}{12} \in \mathbf{Z}$.
Căutăm $m, n \in \mathbf{Z}$ și $mn - 2(m+n) \vdots 12$. Putem lua $m = 1, n = -2$, deci $a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{3}$.
$\frac{1}{6} * \left(-\frac{1}{3}\right) = -2$ și $\left(-\frac{1}{3}\right) * \frac{1}{6} = 1$. Afirmația este adevărată. ………………...…………………..……2p

Subiectul 3:

Considerăm funcția $f: [0, +\infty) \to \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{x}{(x^2+4)(x+1)}$.

a) *Arătați că* $f(x) = \frac{x+4}{5(x^2+4)} - \frac{1}{5(x+1)}$, *pentru orice* $x \in [0, +\infty)$.

b) *Determinați* $\int f(x)dx$.

c) *Fie* $F: [0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ *o primitivă a funcției* f. *Arătați că există cel mult un număr* $x_0 \in [0, +\infty)$ *astfel încât* $F(x_0)$ *să fie număr întreg.*

SOLUȚIE:

a) $\frac{x+4}{5(x^2+4)} - \frac{1}{5(x+1)} = \frac{(x+1)(x+4)-(x^2+4)}{5(x^2+4)(x+1)} = \frac{x}{(x^2+4)(x+1)} = f(x),\ \forall x \in [0, +\infty)$ ……………………..……...1p

b) $\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{x^2+4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{10} ln(x^2+4) + \frac{2}{5} arctg \frac{x}{2} - \frac{1}{5} ln(x+1) + C$ ... 4p

c) Fie $F: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, atunci $F(x) = \frac{1}{10} ln(x^2+4) + \frac{2}{5} arctg \frac{x}{2} - \frac{1}{5} ln(x+1) + k$, k constantă reală fixată. $F'(x) = f(x) \geq 0$, deci F este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.
$F(0) = \frac{1}{5} ln2 + k$ și $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{10} ln \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{2}{5} arctg \frac{x}{2} + k\right) = \frac{\pi}{5} + k$ …………………..1p
Rezultă că $\frac{1}{5} ln2 + k \leq\ F(x) < \frac{\pi}{5} + k, \forall\, x \in [0, +\infty)$
Dacă există $a, b \in [0, +\infty), a < b$ cu $F(a), F(b) \in \mathbf{Z} \Rightarrow\ F(a) < F(b) \Rightarrow F(b) - F(b) \geq 1$.
Dar $F(b) - F(a) <\ \frac{\pi}{5} + k - \left(\frac{1}{5} ln2 + k\right) = \frac{1}{5}(\pi - ln2) < \frac{\pi}{5} < 1$.
Contradicția obținută rezolvă problema. ………………………………….……………………1p

Subiectul 4:

Considerăm funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. *Fie* $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *primitiva funcției* f *care verifică* $F(1) = 0$.

a) *Calculați* $\int x\big(f(x)\big)^a dx$, *unde* a *este un număr real.*

b) *Calculați* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{F(x)}{x-1}$.

c) *Fie* $G:[0,+\infty)\to \boldsymbol{R}$, $G(0)=0$ *primitivă a funcției* F *și* $g:[0,+\infty)\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=121x^2+\left(60-\frac{1}{e}\right)x+2G(x)$. *În intervalul de timp* $[0,t], t\geq 0$, *măsurat în ore, un melc merge* $g(t)$ *centimetri. Calculați lungimea drumului parcurs de melc în intervalul de timp* $[0,1]$.

SOLUȚIE:

a) Dacă $a=0 \Rightarrow \int x\big(f(x)\big)^a dx=\int xdx=\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}$ …………………………….…………………1p

Dacă $a\neq 0 \Rightarrow \int x\big(f(x)\big)^a dx=\int xe^{-ax^2}dx=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}+\mathcal{C}$ …………………..…………2p

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=\frac{1}{e}$ ……………………………………..…..…….. 2p

c) $\int F(x)dx=\int x'F(x)dx=xF(x)-\int xF'(x)dx=xF(x)-\int xe^{-x^2}dx=xF(x)+\frac{1}{2}e^{-x^2}+\mathcal{C}$,

Deci $G(x)=xF(x)+\frac{1}{2}e^{-x^2}+k$, $G(0)=0\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$, astfel $G(x)=xF(x)+\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{2}$.

$g(1)=121+60-\frac{1}{e}+2\left(F(1)+\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}\right)=180$. Lungimea drumului este 180 cm. …………..2p