Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală, Iaşi
2.02.2024
Clasa a XII-a- filieră tehnologică – secțiunea H1

Barem de notare și evaluare

Notă:
- ***Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 subiecte.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Subiectul 1

Pe mulțimea $A = [0, a], a > 0$ *definim operația* $x * y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}$.

a) Demonstrați că operația „ ” este o lege de compoziție pe mulțimea A.*
*b) Știind că legea de compoziție „ * ” este asociativă, determinați elementele simetrizabile în raport cu „ * ”.*
c) Determinați valorile numărului real a încât $2 * 4 = \frac{a^2}{2}$.

Soluție:

a) $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x * y \geq 0$..1p
$x \leq a, y \leq a \Rightarrow (x-a)(y-a) \geq 0$ și obține $x * y \leq a$..2p
b) Determină e=0..1p
Obține x=0 element simetrizabil..1p
c) $2 * 4 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a^2(a^2-4) = 0$..1p
Obține a=2, care convine..1p

Subiectul 2

1. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.
a) Determinați numărul de elemente din mulțimea A.
b) Arătați că pentru orice $X \in A$ *avem* $X^2 = I_3$ *sau* $X^2 = O_3$.
2. Să se determine numărul $a \in \mathbb{N}, a \geq 5$ *pentru care funcția* $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = e^{ax+\sqrt{a^2-11}-\sqrt{a^2-20}-1}$ *este un izomorfism de la grupul* $(\mathbb{R}, +)$ *la grupul* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

Soluție:

1.a) $Card\ A = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$..1p
b) Calculează $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a^2 & \hat{0} \\ \hat{2}ab & \hat{2}ac & a^2 \end{pmatrix}$..1p

$\hat{2}ab = \hat{2}ac = \hat{0}$ și obține $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a^2 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & a^2 \end{pmatrix}$..1p

$a \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow a \in \{\hat{0}, \hat{1}\} \Rightarrow X^2 = I_3 \ sau \ X^2 = O_3$..1p

2. $f \ morfism \ \Rightarrow \sqrt{a^2 - 11} = \sqrt{a^2 - 20} + 1$..1p

Obține a=6, care convine...1p

Determină $f(x) = e^{6x}$ și demonstrează că este funcție bijectivă..1p

Subiectul 3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x^2 + 2}$.

a) Să se determine primitivele funcției $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică relația $F(ln2) < F(1)$.

c) Să se arate că $0 \leq \int_0^1 f(x)dx < 2$.

Soluție:

a) Obține $G(x) = \int \sqrt{x^2 + 2}dx = x\sqrt{x^2 + 2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$...1p

Obține $G(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 2} + ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right) + C$..1p

b) F o primitivă a lui f $\Rightarrow F'(x) = f(x) \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}_+ \ \Rightarrow F \ crescătoare$.............................1p

$ln2 < 1 \Rightarrow F(ln2) < F(1)$...1p

c) $x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \in \left[0, \sqrt{3}\right]$...1p

Obține $0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \sqrt{3} < 2$...2p

Subiectul 4

La măsurarea nivelului de radiații față de o sursă se stabilește că acesta este dat de formula

$I(n) = \int_1^2 \frac{(lnx)^n}{x(1+ln^2x)}dx$, *unde n reprezintă distanța în metri față de sursă.*

a) Calculați nivelul de radiații la distanța de un metru față de sursă.

b) Demonstrați că nivelul de radiații la distanța de un metru față de sursă este mai mare decât nivelul de radiații la distanța de doi metri față de sursă.

Soluție:

a) $I(1) = \int_0^{ln2} \frac{t}{1+t^2}dt$..2p

Obține $I(1) = \frac{1}{2}ln(1 + ln^2 2)$...2p

b) Demonstrează $lnx > ln^2x, (\forall)x \in [1,2]$..1p

Obține $I(1) > I(2)$...2p