Olimpiada Națională de Matematică 2024
Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024
Clasa a X –a

Barem de notare și evaluare

Notă:

- ***Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 probleme.***
- ***Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.***

Problema 1.

Numerele complexe nenule a,b,c *au același modul și verifică relația* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{R}$. *Arătați că* $(a-b)(b-c)(c-a)=0$.

Supliment Gazeta Matematică

Soluție:

Notăm $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert=\lvert c\rvert=r>0,$ unde $a,b,c\in\mathbb{C}^*$. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{\overline{a}}{\overline{b}}+\frac{\overline{b}}{\overline{c}}+\frac{\overline{c}}{\overline{a}}$...	2p
Din $\lvert a\rvert=r$ se obține $a\cdot\overline{a}=\lvert a\rvert^2=r^2\Leftrightarrow\overline{a}=\frac{r^2}{a}$ și analog $\overline{b}=\frac{r^2}{b}$, $\overline{c}=\frac{r^2}{c}$.............................	2p
$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{\overline{a}}{\overline{b}}+\frac{\overline{b}}{\overline{c}}+\frac{\overline{c}}{\overline{a}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{\frac{r^2}{a}}{\frac{r^2}{b}}+\frac{\frac{r^2}{b}}{\frac{r^2}{c}}+\frac{\frac{r^2}{c}}{\frac{r^2}{a}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Leftrightarrow$ $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{b}{c}-\frac{c}{b}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}=0\Leftrightarrow\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{b^2-c^2}{bc}+\frac{c^2-a^2}{ac}=0$ ……………………………....	2p
Finalizare..	1p

Problema 2.

Se consideră egalitatea $\left[\frac{x-9}{10}-\left[\frac{x}{10}\right]\right]=\log_{11}\frac{x}{9}$, $x\in\mathbb{R}$, *unde prin* $[t]$ *s-a notat partea întreagă a numărului real t.*

a) Arătați că $\frac{x-9}{10}-\left[\frac{x}{10}\right]\in(-1,1)$.

b) Determinați numerele reale x pentru care egalitatea este adevărată.

Soluție:

a) Folosind relația $[x]=x-\{x\}$, primul membru al egalității din enunț devine $\frac{x-9}{10}-\left[\frac{x}{10}\right]=\frac{x-9}{10}-\frac{x}{10}+\left\{\frac{x}{10}\right\}=\left\{\frac{x}{10}\right\}-\frac{9}{10}$	2p
Cum $\left\{\frac{x}{10}\right\}\in[0,1)\Rightarrow\left\{\frac{x}{10}\right\}-\frac{9}{10}\in\left[-\frac{9}{10},\frac{1}{10}\right)\subset(-1,1)$, deci $\frac{x-9}{10}-\left[\frac{x}{10}\right]\in(-1,1)$ …………	1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

b) Din *a*) $\left[\frac{x-9}{10}-\left[\frac{x}{10}\right]\right]=\begin{cases}0, \text{ dacă } 0\le\left\{\frac{x}{10}\right\}-\frac{9}{10}<\frac{1}{10}\\ -1, \text{ dacă } -\frac{9}{10}<\left\{\frac{x}{10}\right\}-\frac{9}{10}<0\end{cases}$	1p
1) $\log_{11}\frac{x}{9}=0\Leftrightarrow\frac{x}{9}=1\Leftrightarrow x=9,$ care verifică egalitatea 2) $\log_{11}\frac{x}{9}=-1\Leftrightarrow\frac{x}{9}=\frac{1}{11}\Leftrightarrow x=\frac{9}{11}$, care verifică egalitatea.................................. Un caz va fi notat cu **2p** și al doilea caz cu **1p**	3p

Problema 3.

Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *cu proprietatea că:*
$f\left(f\left(n+1\right)\right)=f\left(f\left(n\right)+1\right)=an+4049, \forall n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{N}^*.$
a) Demonstrați că funcția f *este injectivă.*
b) Determinați valoarea numărului a și funcția f *care îndeplinesc condițiile din enunț.*

Soluție:

a) Se consideră $m,n\in\mathbb{N}$ cu $f\left(m\right)=f\left(n\right)$, rezultă $f\left(m\right)+1=f\left(n\right)+1$ de unde avem $f\left(f\left(m\right)+1\right)=f\left(f\left(n\right)+1\right)$......................................	1p
$am+4049=an+4049$ rezultă că $m=n.$ În concluzie f este funcție injectivă............	1p
b) Deoarece f este funcție injectivă se obține $f\left(n+1\right)=f\left(n\right)+1, \forall n\in\mathbb{N}$	1p
$\left(f\left(n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este progresie aritmetică de rație 1 rezultă $f\left(n\right)=n+f\left(0\right), \forall n\in\mathbb{N}.$	2p
Din $f\left(f\left(0\right)+1\right)=4049$, rezultă $f\left(0\right)+1+f\left(0\right)=4049$, de unde se obține $f\left(0\right)=2024$. Rezultă $f\left(n\right)=n+2024$	1p
Din $f\left(n+2025\right)=an+4049, \forall n\in\mathbb{N}$, se obține $n+4049=an+4049, \forall n\in\mathbb{N}$, de unde rezultă $a=1$..	1p

Problema 4.

a*) Dacă* $a,b\in\left(1,\infty\right)$, *demonstrați că* $a^{\sqrt[n]{\log_a b}}=b^{\sqrt[n]{\log_b^{n-1} a}}$, *pentru orice* număr natural $n, n\ge 2$.
b) Dacă $a,b,c\in\left(1,\infty\right)$, *demonstrați că* $\left(ab\right)^{\sqrt{\log_a b}}+\left(bc\right)^{\sqrt{\log_b c}}+\left(ca\right)^{\sqrt{\log_c a}}\ge a^2+b^2+c^2$.

Soluție:

a) $a^{\sqrt[n]{\log_a b}}=b^{\sqrt[n]{\log_b^{n-1} a}}\overset{\substack{\text{logaritmăm}\\ \text{în baza } a}}{\Leftrightarrow}\sqrt[n]{\log_a b}=\sqrt[n]{\log_b^{n-1} a}\cdot\log_a b\Leftrightarrow\sqrt[n]{\log_a b}=\sqrt[n]{\log_b^{n-1} a}\cdot\frac{1}{\log_b a}\Leftrightarrow$	3 p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$\sqrt[n]{\log_a b} = \sqrt[n]{\dfrac{\log_b^{n-1} a}{\log_b^n a}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\log_a b} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{\log_b a}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\log_a b} = \sqrt[n]{\log_a b}$, adevărat	
b) Pentru $n = 2$, identitatea de la a) devine $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$	1p
$(ab)^{\sqrt{\log_a b}} = a^{\sqrt{\log_a b}} \cdot b^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}} \cdot b^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_a b}}$	1 p
Din inegalitatea $m_a \geq m_g \Rightarrow \sqrt{\log_b a} + \sqrt{\log_a b} \geq 2\sqrt{\sqrt{\log_b a \cdot \log_a b}} = 2$ se obține $(ab)^{\sqrt{\log_a b}} \geq b^2$	1 p
Prin adunarea $(ab)^{\sqrt{\log_a b}} \geq b^2$, $(bc)^{\sqrt{\log_b c}} \geq c^2$, $(ca)^{\sqrt{\log_c a}} \geq a^2$ se obține inegalitatea considerată..	1 p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro