INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 9 februarie 2024

Clasa a VIII-a - Barem

1. **a)** Din $[u]+\{v\}\in\mathbb{Z}$ obţinem $\{v\}\in\mathbb{Z}$ de unde $\{v\}=0$ deci $v\in\mathbb{Z}$. **2p**

b) Punctul anterior conduce la $2023x\in\mathbb{Z}$ deci există $z\in\mathbb{Z}$ cu $x=\frac{z}{2023}$. **1p**

Din $[2022x]=2023$ obţinem $2023\le 2022x<2024$ echivalent cu $\frac{2023}{2022}\le\frac{z}{2023}<\frac{2024}{2022}$ sau $1+\frac{1}{2022}\le\frac{z}{2023}<1+\frac{1}{1011}$ şi apoi $2023+\frac{2023}{2022}\le z<2023+\frac{2023}{1011}$. Obţinem unica posibilitate $z=2025$. **3p**

Deducem că $x=\frac{2025}{2023}$. **1p**

2. **a)** Verificare **1p**

b) Cu notaţia $5^x=a$ obţinem $625^x+25^x+1=a^4+a^2+1$ **1p**

Descompunerea de la punctul anterior şi ipoteza conduc la $a^2-a+1=1$ de unde obţinem unica posibilitatea $a=1$. **4p**

În consecinţă $x=0$. **1p**

3. **a)** Fie M mijlocul muchiei CD. Atunci $\frac{AQ}{QB}=\frac{AG}{GM}$ deci $GQ\parallel BM$ şi concluzia. **3p**

b) Figura $QGAS$ este paralelogram deoarece diagonalele se înjumătăţesc. **3p**

Atunci $AS\parallel GQ$ de unde obţinem concluzia. **1p**

4. **a)** Verificare. **2p**

b) Avem $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{y+z+x+z+x+y}=\frac{1}{2}$. **2p**

Apoi $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{(1+1+1)^2}{y+z+x+y+x+z}=\frac{9}{2}$. **2p**

Adunăm cele două relaţii şi obţinem concluzia. **1p**

NOTĂ

- Orice altă rezolvare se punctează corespunzător.