INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 9 februarie 2024

Clasa a VIII-a - Enunţuri

1. **a)** Fie $u,v\in\mathbb{R}$ astfel încât $[u]+\{v\}\in\mathbb{Z}$. Demonstraţi că $v\in\mathbb{Z}$.

b) Determinaţi toate numerele reale x care verifică relaţia $[2022x]+\{2023x\}=2023$, unde cu $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a, iar cu $\{a\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real a.

Gazeta Matematică Nr. 10/2023, supliment

2. **a)** Fie $a\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

b) Determinaţi toate valorile posibile ale numărului $x\in\mathbb{N}$ pentru care 625^x+25^x+1 este număr natural prim.

3. Pe latura AB a tetraedrului $ABCD$ considerăm punctele P,Q astfel încât $AP\equiv PQ\equiv QB$. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ACD. Fie S simetricul lui G faţă de P.

a) Demonstraţi că $GQ\parallel(BCD)$.

b) Demonstraţi că $AS\parallel(BCD)$.

4. **a)** Fie $x,y\in\mathbb{R}$ şi $a,b\in(0,\infty)$. Demonstraţi că $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}\geq\dfrac{(x+y)^2}{a+b}$.

b) Fie $x,y,z\in(0,\infty)$ cu $x+y+z=1$. Demonstraţi că $\dfrac{x^2+1}{y+z}+\dfrac{y^2+1}{x+z}+\dfrac{z^2+1}{x+y}\geq 5$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Punctajul minim de calificare la etapa județeană este de 14 puncte;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.