OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 9 februarie 2024

Clasa a VI-a - Barem

1. Dacă $a = d \cdot x, b = d \cdot y$ unde $(x, y) = 1$ avem $(a, b) = d$ și $[a, b] = d \cdot x \cdot y$, iar
$2 \cdot [a, b] + 5 \cdot (a, b) = 115 \Longrightarrow d \cdot (2xy + 5) = 115$........2p
Cum $D_{115} = \{1,5,23,115\}$, iar $2xy + 5 > 7$ și $a < b$ avem cazurile:........1p
$I. 2xy + 5 = 23, d = 5 \Longrightarrow xy = 9 \Rightarrow a = 5, b = 45$........2p
$II. 2xy + 5 = 115, d = 1 \Longrightarrow xy = 55 \Rightarrow a = 1, b = 55$ sau $a = 5, b = 11$........2p

2. **a)** $(OE$ și $(OA$ semidrepte opuse $\Rightarrow m(\sphericalangle AOE) = 180^0$;
$(OD \perp (OB \Rightarrow m(\sphericalangle BOD) = 90^0$........2p
$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle DOE) = 90^0$; $m(\sphericalangle DOE) = 9m(\sphericalangle AOB)$
$\Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 9^0$; $\Rightarrow m(\sphericalangle DOE) = 81^0$; $m(\sphericalangle COD) = 9^0$........2p
b) $(OF$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle DOE \Rightarrow m(\sphericalangle DOF) = 40^0 30'$, iar $(OG$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle DOC \Rightarrow m(\sphericalangle DOG) = 4^0 30'$........2p
$\Rightarrow m(\sphericalangle FOG) = 45^0$........1p

3. **a)** $135 = 3^3 \cdot 5$, $D_{135} = \{1,3,5,3^2, 3 \cdot 5, 3^3, 3^2 \cdot 5, 3^3 \cdot 5\}$........1p
$135^4 = 3^{12} \cdot 5^4$, iar $p = 3^{12} \cdot 5^4$ deci 135 este special........2p
b) Notăm $d_1, d_2, \dots, d_k$ divizorii numărului n, atunci $p = d_1 d_2 \dots d_k$, iar k este numărul divizorilor lui n. Observăm că dacă d_i este un divizor al lui n atunci $\frac{n}{d_i} = d_j$ este un alt divizor al lui n astfel încât $d_i \cdot d_j = n \Longrightarrow p^2 = (d_1 d_2 \dots d_k)(d_1 d_2 \dots d_k) = n^k$. Cum $n^4 = p \Longrightarrow k = 8 \Longrightarrow$ n are exact 8 divizori........2p
Deducem apoi că n poate avea una din formele $n = a^7$, $n = a \cdot b \cdot c$ sau $n = a^1 \cdot b^3$ cu a, b și c numere prime........1p
Cum $n = a^7$ este imposibil, deoarece $2^7 = 128$, rămâne ca $n = a \cdot b \cdot c$ sau $n = a^1 \cdot b^3$. Distingem următoarele cazuri favorabile $n \in \{24,30,40,42,54,56,66,70,78,88\}$........1p

4.

a) $A_2B_2 = OA_1 + A_1A_2 + OB_1 + B_1B_2 = 2cm$ ……………………………………………1p

b) $A_{2023}B_{2023} = OA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{2022}A_{2023} + OB_1 + B_1B_2 + \cdots + B_{2022}B_{2023} =$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2024} + \frac{2023}{2024}\right) = 2023cm$…………..…………………….2p

c) $OB_{2023} > OA_{2023} \Longrightarrow M$ se află pe semidreapta $(OY$ 1p

$$OM = MA_{2023} - OA_{2023} = \frac{OA_{2023} + OB_{2023}}{2} - OA_{2023} = \frac{OB_{2023} - OA_{2023}}{2} =$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{2022}{2024}\right)$..1p

Observăm că $\frac{1}{3} < \frac{2}{4} < \frac{3}{5} < \cdots < \frac{2022}{2024}$, atunci $OM < \frac{1}{2} \cdot \frac{2022}{2024} \cdot 2022 < 1011$……………………2p

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează similar baremului