Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a XI-a - H2 - Științele naturii
Soluții și bareme

Problema 1. Fie funcția $f : (0,4) \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3}, & 0 < x < 3, \\ \frac{-sin2(x-3)}{8(x-3)}, & 3 < x < 4. \end{cases}$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția să aibă limită în $x = 3$.

Soluție

$l_s(3) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} a \cdot \frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} a \cdot \frac{3-x}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2+x+4})} = -\frac{a}{8}$ **3p**

$l_d(3) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} -\frac{sin2(x-3)}{8(x-3)} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} -\frac{1}{4} \cdot \frac{sin2(x-3)}{2(x-3)} = -\frac{1}{4}$ **3p**

f are limită în $x = 3 \Leftrightarrow l_s(3) = l_d(3) \Rightarrow a = 2$ **1p**

Problema 2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{M(a) = I_2 + aA | a \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $M(a) \cdot M(b) \in G$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
b) Utilizând, eventual, identitatea $a + b + 3ab = 3(a + \frac{1}{3})(b + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}$, determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $(M(a))^{2023} = M(-\frac{2}{3})$.

Supliment GM nr. 10 / S:L23.262. modificată

Soluție

a) $A^2 = 3A$ **1p**

$M(a) \cdot M(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a + b + 3ab)A = M(a + b + 3ab) \in G$ **2p**

b) $(M(a))^2 = M(3(a + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3})$ **1p**

Demonstrarea prin inducție matematică că $(M(a))^n = M(3^{n-1}(a + \frac{1}{3})^n - \frac{1}{3}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

$(M(a))^{2023} = M(-\frac{2}{3}) \Rightarrow M(3^{2022}(a + \frac{1}{3})^{2023} - \frac{1}{3}) = M(-\frac{2}{3})$ **1p**

$3^{2022}(a + \frac{1}{3})^{2023} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow (a + \frac{1}{3})^{2023} = -\frac{1}{3^{2023}} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$ **1p**

Problema 3. Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = |x|\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

a) Determinați D.
b) Determinați asimptotele funcției f.

Soluție

a) $\frac{x-1}{x-2} \geq 0, x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup (2, +\infty) = D$ **2p**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} |x|\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Deci nu există asimptotă orizontală. **1p**

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - x) = \frac{1}{2}$

Deci, $y = x + \frac{1}{2}$ este asimptota oblică spre $+\infty$ **2p**

Analog, $y = -x - \frac{1}{2}$ este asimptota oblică spre $-\infty$ **1p**

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = +\infty$. Deci, $x = 2$ este asimptota verticală. **1p**

Problema 4. Un ecolog studiază distribuția unei specii rare de plante într-o zonă protejată. El observă că aceste plante cresc în principal într-un triunghi format de trei râuri care trec prin acea zonă. Ecologul dorește să determine aria suprafeței ocupate de această specie de plante pentru a planifica măsuri de conservare. Acesta știe că un râu are traiectoria dată de o funcție de forma $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = \frac{1}{m}x + m$, unde m este un parametru rațional pozitiv, iar G_m este graficul funcției f_m. Ajută-l pe ecolog!

a) Dacă G_p și G_q reprezintă graficele a două râuri ($p, q \in \mathbb{Q}_+^*$), află punctul M de intersecție a celor două râuri.

b) Află aria triunghiului format de graficele celor trei râuri G_a, G_b și G_c, știind că a, b și c sunt trei numere naturale consecutive.

Soluție

a) $f_p(x) = f_q(x)$ **1p**

$x = pq$ și $y = p + q$. Adică $M(pq, p + q)$ **2p**

b) a, b, c numere consecutive $\Rightarrow b = a + 1, c = a + 2$

$G_a \cap G_b = \{A_1\} \Rightarrow A_1(ab, a + b)$

$G_b \cap G_c = \{A_2\} \Rightarrow A_2(bc, b + c)$

$G_c \cap G_a = \{A_3\} \Rightarrow A_3(ca, c + a)$ **1p**

$A_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} ab & a+b & 1 \\ bc & b+c & 1 \\ ca & c+a & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$ **2p**

$A_{\Delta A_1A_2A_3} = 1$ **1p**