A 74-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024
Clasa a X-a
Soluții și bareme

Problema 1.

Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} + \log_2(2 - x - x^2)$

a. Determinați domeniul maxim de definiție D a funcției f.

b. Determinați mulțimea $A = \{p \in \mathbb{C} | p \cdot (p - f(0)) + p \cdot f(-1) + 2 = 0\}$

Soluție

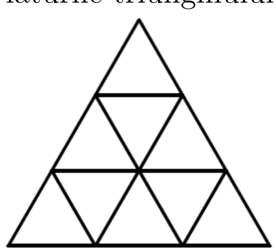
a. $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, \infty)$ **1p**
$2 - x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2; 1)$ **2p**
$D = [-1, \infty) \cap (-2; 1) = [-1; 1)$ **1p**

b. $f(0) = 2, f(-1) = 1$ **1p**
Avem ecuația $p^2 - p + 2 = 0$ **1p**
$A = \{\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}\}$ **1p**

Problema 2.

Pe laturile și în interiorul unui triunghi echilateral se iau 10 puncte distincte, două câte două. Să se arate că dacă lungimea laturilor triunghiului este egală cu 1m, există două puncte din cele luate care au distanța între ele mai mică decât 34 cm.

Soluție
Divizăm triunghiul în nouă triunghiuri echilaterale în modul următor: divizăm laturile în trei și unim punctele obținute cu segmente paralele cu laturile triunghiului cel mare.



Deci obținem nouă triunghiuri echilaterale congruente, cu latura $\frac{a}{3}$, unde a $= 100$ cm este latura triunghiului mare. **3p**

Dacă nu luăm toate 10 puncte în vârfurile triunghiurilor mici, atunci va exista cel puțin un punct în interiorul uni triunghi mic. Astfel dinstanța acelor puncte va fi mai puțin, decât latura, adică mai mică decât $\frac{a}{3}$. **2p**

Dacă luăm cele 10 puncte în vârfurile triunghiurilor mici, atunci distanța lor va fi exact $\frac{a}{3}$. **1p**

Altfel nu putem lua cele 10 puncte distincte, două câte două.
Acum avem, că $\frac{a}{3} = \frac{100}{3} < 34$ cm. **1p**

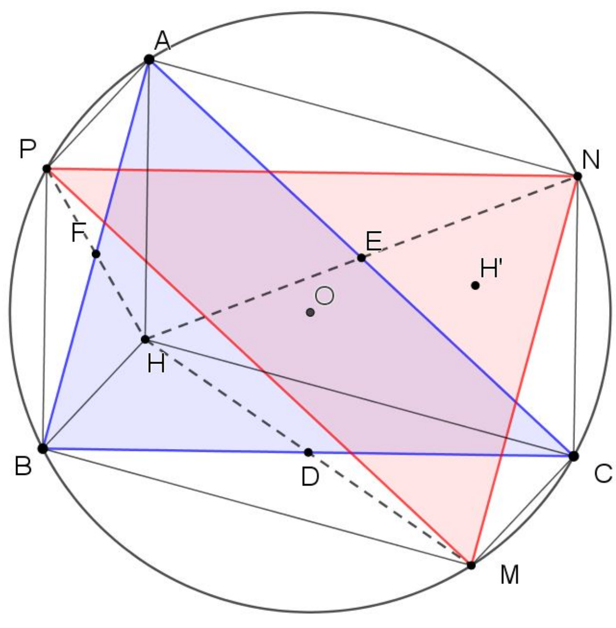
Problema 3.

În triunghiul ABC notăm cu O centrul cercului circumscris, cu H ortocentrul, iar cu D, E respectiv F mijloacele laturilor BC, AC respectiv AB. Notăm cu M, N respectiv P simetricele punctului H față de D, E respectiv F. Fie H' ortocentrul triunghiului MNP. Să se arate că $HH' = 2OH$.

Soluție

Soluția 1.

Punem în O originea planului complex, si notăm cu a, b, c, h, m, n, p respectiv h' afixele punctelor A, B, C, H, M, N, P respectiv H' **1p**
Din teorema lui Sylvester: $h = a + b + c$ **1p**
$HBMC$ fiind paralelogram avem $h + m = b + c$, de unde $m = -a$ și analog $n = -b$ și $p = -c$ **2p**
Deci punctele M, N, P se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. **1p**
Aplicăm din nou teorema lui Sylvester: $h' = m + n + p = -(a + b + c) = -h$ **1p**
Prin urmare O este mijlocul segmentului HH', adică $HH' = 2OH$ **1p**



Soluția 2.

In patrulaterul $HBMC$ diagonalele se înjumătățesc, deci este paralelogram **1p**

Deci $BM \parallel HC$ și $CM \parallel HB$
Cum $HC \perp AB$ și $BH \perp AC$
Rezultă că $BM \perp AB$ și $MC \perp AC$
Adică patrulaterul $ABMC$ este inscriptibil, M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. .. **1p**

În mod asemănător punctele N și P sunt pe cercul circumsris triunghiului ABC **2p**

Unghiul ABM este dreptunghic, adică AM este diametru.
Analog BN și CP sunt diametre. **1p**

Aplicăm teorema lui Sylvester în triunghiurile ABC și MNP:
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ **1p**

$\overrightarrow{OH'} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OH}$
Adică O este mijlocul segmentului HH' **1p**

Soluția 3.

Omotetia de centru H și raport 2 duce punctele D, E, F în M, N, P. **2p**
Ortocentrul triunghiului DEF este O (este intersecția mediatoarelor laturilor BC, AC și AB, deci $DO \perp BC$, iar FE linie mijlocie, deci $FE \parallel BC$, astfel $DO \perp FE$, analog $EO \perp FD$, și$FO \perp DE$) . **3p**
Deci omotetia de mai sus duce punctul O în ortocentrul triunghiului MNP, adică O este mijlocul lui HH', deci $HH' = 2OH$. **2p**

Problema 4.

Fie $a = \log_{45} 25$ și $b = \log_{15} 27$. Arătați că $3a + ab + 2b = 6$.

GM 10/S:L23.251

Soluție

$a = \log_{45} 25 = \dfrac{\log_3 25}{\log_3 45} = \dfrac{2\log_3 5}{2 + \log_3 5}$ **2p**

$b = \log_{15} 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 15} = \dfrac{3}{1 + \log_3 5}$ **2p**

notăm $y = \log_3 5$ și obținem $3a + ab + 2b = 3 \cdot \dfrac{2y}{y+2} + \dfrac{6y}{(y+2)(y+1)} + \dfrac{6}{y+1} =$ **1p**

$= 6 \cdot \dfrac{y^2 + 3y + 2}{(y+1)(y+2)} = 6$ **2p**