26. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2024. február 10.

XI. osztály - H1 - Szakközép

1. feladat. Adott az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix és tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén, értelmezzük az $\mathbf{X}(a) = \mathbf{I}_2 + a\mathbf{A}$ mátrixot.

a) Bizonyítsd be, hogy $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(b) = \mathbf{X}(a + b + 5ab)$, bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Határozd meg a $c \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(c) = \mathbf{X}(c)$, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén!

c) Határozd meg a $t \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy

$$\mathbf{X}\left(\frac{14}{5}\right) \cdot \mathbf{X}\left(\frac{9}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{X}\left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \mathbf{X}\left(-\frac{11}{5}\right) = \mathbf{X}(t)!$$

2. feladat. Adott az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x+3 & x \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix. Határozd meg az m valós számot úgy, hogy $\left[m \cdot \mathbf{A}(-1) + \mathbf{A}(m)\right] \cdot \mathbf{A}(0) = (m^2 + 17) \cdot \mathbf{I}_2$.

3. feladat.

a) Tanulmányozd a $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{7x - 3 + 6x^2}{9 + 12x + 4x^2}$ függvény határértékének létezését az $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ pontban!

b) Határozd meg az m valós paraméter értékét, amelyre $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{mx^2 - 3x + 5}{(2m+1)x^2 - 4x + 7} = \dfrac{2}{5}$.

4. feladat. Az xOy koordináta - rendszerben adottak az $O(0,0)$ és $A_n(n, 2^n)$ pontok, ahol $n \in \mathbb{N}$.

a) Bizonyítsd be, hogy az O, A_1 és A_2 pontok kollineárisak!

b) Hány egyenes halad át legalább két ponton az O, A_0, A_1, A_2 pontok közül?

c) Számítsd ki az A_n, A_{n+1} și A_{n+2} pontok által meghatározott háromszög területét, ahol $n \in \mathbb{N}$.

Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.