MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a XII-a - H1 - Tehnic
Soluții și bareme

Problema 1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă
$x * y = xy - 12x - 12y + 156$.

a) Să se rezolve ecuația $x * x = 93$

b) Să se calculeze valoarea $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \cdots * \sqrt{2024}$

c) Să se determine numerele naturale m, pentru care $m * m * m = m$.

Soluție

a) $x * x = 93 \Rightarrow x^2 - 24x + 63 = 0$ **1p**
$x_1 = 3, x_2 = 21$ **1p**

b) $x * 12 = 12 * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$, demonstrație prin calcule **1p**

$$\underbrace{\sqrt{2} * \sqrt{3} * \cdots}_{A} * \sqrt{144} * \underbrace{\sqrt{145} \cdots * \sqrt{2024}}_{B} = (A * 12) * B = 12 * B = 12$$

.... **1p**

c) $x * y = (x - 12)(y - 12) + 12$
$m * m = (m - 12)^2 + 12$
$m * m * m = (m - 12)^3 + 12$
.... **1p**
$(m - 12)^3 - (m - 12) = 0 \Leftrightarrow (m - 12)\left[(m - 12)^2 - 1\right] = 0$
.... **1p**
$m_1 = 12, m_2 = 13, m_3 = 11$ **1p**

Problema 2. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int (x^2 + 1)e^{-x}\, dx$

b) $\displaystyle I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx$ și $\displaystyle I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

Soluție

a) $\displaystyle\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x = -(x^2+1)e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x =$ **1p**

$\displaystyle = -(x^2+1)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$ **1p**

$= e^{-x}(-x^2-2x-3)+C$ **1p**

b) $\displaystyle I_1 - I_2 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C$ **1p**

$\displaystyle I_1 + I_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x - \cos x| + C$

$\displaystyle = \ln(\cos x - \sin x) + C$, deoarece $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ **2p**

Deci $\displaystyle I_1 = \frac{x + \ln(\cos x - \sin x)}{2} + C$ și $\displaystyle I_2 = \frac{\ln(\cos x - \sin x) - x}{2} + C$ **1p**

Problema 3.

Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ definim legea de compoziție " $*$ "

$x * y = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20} \quad \forall x, y \in G$

a) Să se demonstreze că $x * y = \sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}$

b) Să se rezolve în G ecuația $\underbrace{x * x * x * ... * x}_{2024-ori} = \sqrt{5}$

c) Să se demonstreze, că funcția $f : (0, +\infty) \to (2, +\infty), f(x) = \sqrt{x+4}$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, *)$

Soluție

a) $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20} = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16 + 4} =$

$\sqrt{x^2(y^2-4) - 4(y^2-4) + 4} = \sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}$ sau

$\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4} = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16 + 4} =$

$= \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20} = x * y, \forall x, y \in G$ **1p**

b) Conform punctului a) avem $\underbrace{x * x * x * ... * x}_{2024-ori} = \sqrt{(x^2-1)^{2024}+4} = \sqrt{5}$

$(x^2-1)^{2024}+4=5$, adică $(x^2-1)^{2024}=1$ **1p**

$x^2-4=1$ sau $x^2-4=-1$ **1p**

$x=\sqrt{5}\in G,\qquad x=-\sqrt{5}\notin G,\qquad x=\pm\sqrt{3}\notin G$

.... **1p**

c) f este injectivă deoarece $f(x)=f(y)\Rightarrow\sqrt{x+4}=\sqrt{y+4}\Rightarrow x=y,\forall x,y\in G$ **1p**

f este surjevtivă deoarece $\forall y\in G,\exists x=y^2-4\in(0,+\infty)$ astfel încât $f(x)=y$

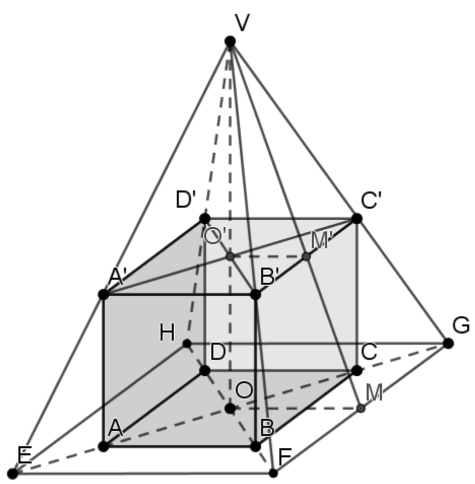
deci f este bijectivă. **1p**

f este morfism $f(x)*f(y)=\sqrt{(f^2(x)-4)(f^2(y)-4)+4}=\sqrt{xy+4}=f(x\cdot y)$ **1p**

Problema 4.

Construiți o piramidă regulată de volum minim, circumscrisă unui cub de latură 1 metru (baza piramidei este în planul determinat de o față a cubului, iar vârfurile cubului care nu sunt în acest plan sunt situate pe muchiile piramidei, vezi figura alăturată). Ce lungime are înălțimea piramidei?

Soluție



Conform notațiilor din figură avem $O'M'=\dfrac{1}{2}, OO'=1$, fie $VO'=x$.

$$\frac{O'M'}{OM}=\frac{VO'}{VO}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}}{OM}=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow OM=\frac{x+1}{2x}. \text{ .... } \mathbf{2p}$$

Baza piramidei este $EF=2OM=\dfrac{x+1}{x}$, deci volumul piramidei se poate calcula prin formula

$$V(x)=\frac{VO\cdot A_{EFGH}}{3}=\frac{(x+1)\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}{3}=\frac{(x+1)^3}{3x^2}. \text{ .... } \mathbf{1p}$$

Pentru a obține volumul minim determinăm punctele de extrem ale funcției $V(x)$.

$V'(x) = \dfrac{3(x+1)^2 \cdot 3x^2 - (x+1)^3 \cdot 6x}{9x^4} = \dfrac{(x+1)^2(3x-2x-2)}{3x^3} = \dfrac{(x+1)^2(x-2)}{3x^3}$.............. **2p**

Din ecuația $V'(x) = 0$ și condiția $x > 0$ fiind o distanță, obținem $x = 2$ punct de extrem, iar pentru $x < 2$, avem $V'(x) < 0$ și pentru $x > 2$, avem $V'(x) > 0$, deci $x = 2$ este punct de minim, deci înălțimea piramidei cu volum minim este 3.. **2p**