

Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată
„Adolf Haimovici”

Etapă zonală, 10 februarie 2024

Clasa a XII-a - H1 - Tehnologic

Problema 1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 12x - 12y + 156$.

- Să se rezolve ecuația $x * x = 93$
- Să se calculeze valoarea $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \dots * \sqrt{2024}$
- Să se determine numerele naturale m , pentru care $m * m * m = m$.

Problema 2. Să se calculeze

- $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$
- $I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$ și $I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

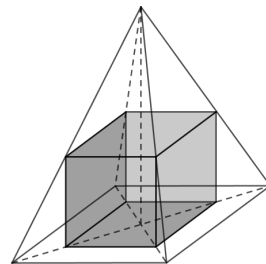
Problema 3. Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ definim legea de compoziție ” $*$ ”

$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20} \quad \forall x, y \in G$$

- Să se demonstreze că $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4}$
- Să se rezolve în G ecuația $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2024\text{-ori}} = \sqrt{5}$
- Să se demonstreze, că funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (2, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x + 4}$ este izomorfism între grupurile (\mathbb{R}_+^*, \cdot) și $(G, *)$

Problema 4.

Construiți o piramidă regulată de volum minim, circumscrisă unui cub de latură 1 metru (baza piramidei este în planul determinat de o față a cubului, iar vârfurile cubului care nu sunt în acest plan sunt situate pe muchiile piramidei, vezi figura alăturată). Ce lungime are înălțimea piramidei?



Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.