Ministerul Educației — Inspectoratul Școlar Județean Covasna / Kovászna Megye Tanfelügyelősége — Inspectoratul Școlar Județean Harghita / Hargita Megye Tanfelügyelősége

74. Országos matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2024. február 10.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $f:(0,4)\backslash\{3\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3} & ,\ 0<x<3\\ -\dfrac{\sin\left(2\cdot(x-3)\right)}{8\cdot(x-3)} & ,\ 3<x<4\end{cases}$$

függvény, ahol $a\in\mathbb{R}$. Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ számot úgy, hogy az f függvénynek legyen határértéke az $x_0=3$ pontban!

2. feladat. Adott az $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix és a $H=\{\mathbf{X}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid \exists k\in\mathbb{N}, k\geq 2, \mathbf{X}^k=\mathbf{O}_2\}$ halmaz.

a) Igazold, hogy $\mathbf{A}\in H$.

b) Ha $\mathbf{X}\in H$, bizonyítsd be, hogy $\mathbf{X}^2=\mathbf{O}_2$.

c) Ha $\mathbf{X}\in H$, igazold, hogy $\det\left(\mathbf{I}_2+\mathbf{X}+\mathbf{X}^2+\cdots+\mathbf{X}^{2024}\right)=1$.

3. feladat. Adott az $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mátrix úgy, hogy $\det(\mathbf{A})=9$. Igazold, hogy a $\det\left(\mathbf{A}^2+5\mathbf{A}+9\mathbf{I}_2\right)$ szám egy teljes négyzet!

Gazeta matematică

4. feladat. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat, ahol $a_1=2$ és $a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{a_n(n+2)}{3}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{a_k}\right]=\frac{a_n}{2},$$

ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.