Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a XI-a - H1 - Tehnic
Soluții și bareme

Problema 1. Se consideră matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și pentru orice $a \in \mathbb{R}$, considerăm matricea $\mathbf{X}(a) = \mathbf{I}_2 + a\mathbf{A}$.

a) Demonstrați, că $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(b) = \mathbf{X}(a + b + 5ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(c) = \mathbf{X}(c)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

c) Determinați $t \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\mathbf{X}\Big(\frac{14}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(\frac{9}{5}\Big) \cdot \ldots \cdot \mathbf{X}\Big(-\frac{6}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(-\frac{11}{5}\Big) = \mathbf{X}(t).$$

Soluție

a) $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(b) = \big(\mathbf{I}_2 + a\mathbf{A}\big)\big(\mathbf{I}_2 + b\mathbf{A}\big) = \mathbf{I}_2 + (a+b)\mathbf{A} + ab\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2 + (a+b)\mathbf{A} + ab \cdot 5\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 + (a+b+5ab)\mathbf{A} = \mathbf{X}(a+b+5ab)$ **2p**

b) $\mathbf{X}(a)\mathbf{X}(c) = \mathbf{X}(a + c + 5ac) = \mathbf{X}(c) \Rightarrow a + c + 5ac = c \Rightarrow c = -\dfrac{1}{5}$ **1p**

c) $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(b) = \mathbf{X}(a + b + 5ab) = \mathbf{X}(b + a + 5ba) = \mathbf{X}(b) \cdot \mathbf{X}(a) \Rightarrow \mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}\Big(-\dfrac{1}{5}\Big) = \mathbf{X}\Big(-\dfrac{1}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}(a) = \mathbf{X}\Big(-\dfrac{1}{5}\Big), \forall a \in \mathbb{R} \quad (\mathbf{1})$ **1p**

Din asociativitate înmulțirii matricelor și din $(\mathbf{1})$ rezultă că

$$\mathbf{X}\Big(\frac{14}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(\frac{9}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(\frac{4}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(-\frac{1}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(-\frac{6}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(-\frac{11}{5}\Big) =$$

$$= \Big[\mathbf{X}\Big(\frac{14}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(\frac{9}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(\frac{4}{5}\Big)\Big] \cdot \mathbf{X}\Big(-\frac{1}{5}\Big) \cdot \Big[\mathbf{X}\Big(-\frac{6}{5}\Big) \cdot \mathbf{X}\Big(-\frac{11}{5}\Big)\Big] = \mathbf{X}\Big(-\frac{1}{5}\Big)$$ **2p**

Deci $\mathbf{X}\Big(-\dfrac{1}{5}\Big) = \mathbf{X}(t) \Rightarrow t = -\dfrac{1}{5}$ **1p**

Problema 2. Se consideră matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x+3 & x \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinați numărul real m astfel încât $\big[m \cdot \mathbf{A}(-1) + \mathbf{A}(m)\big] \cdot \mathbf{A}(0) = (m^2 + 17) \cdot \mathbf{I}_2$.

Soluție

$\big[m \cdot \mathbf{A}(-1) + \mathbf{A}(m)\big] \cdot \mathbf{A}(0) = \left[m \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m+3 & m \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$ **1p**

$= \begin{pmatrix} 3m+3 & 0 \\ m+1 & -3m-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$ **1p**

$= \begin{pmatrix} 9m+9 & 0 \\ 0 & 9m+9 \end{pmatrix} = (9m+9) \cdot \mathbf{I}_2$ **2p**

Deci $m^2 + 17 = 9m + 9 \iff m^2 - 9m + 8 = 0$, rezolvând ecuația de gradul doi rezultă că $m \in \{1, 8\}$ **3p**

Problema 3.

a) Studiați existența limitei funcției $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{7x - 3 + 6x^2}{9 + 12x + 4x^2}$ în punctul $x_0 = -\dfrac{3}{2}$.

b) Determinați valoarea numărului real m pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{mx^2 - 3x + 5}{(2m+1)x^2 - 4x + 7} = \dfrac{2}{5}$.

Soluție

a) Înlocuind valoarea $-\dfrac{3}{2}$ în funcția f se deduce cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ **1p**

$f(x) = \dfrac{6x^2 + 7x - 3}{4x^2 + 12x + 9} = \dfrac{(2x+3)(3x-1)}{(2x+3)^2} = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ **1p**

$l_s\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2} \\ x<-\frac{3}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2} \\ x<-\frac{3}{2}}} \dfrac{3x-1}{2x+3} = \dfrac{-\frac{11}{2}}{o_-} = +\infty$,

$l_d\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2} \\ x>-\frac{3}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2} \\ x>-\frac{3}{2}}} \dfrac{3x-1}{2x+3} = \dfrac{-\frac{11}{2}}{o_+} = -\infty$ **1p**

Din $l_s\left(-\dfrac{3}{2}\right) = +\infty$ și $l_d\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\infty$ se trage concluzia că funcția f nu are limită în punctul $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ **1p**

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{mx^2-3x+5}{(2m+1)x^2-4x+7} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\left(m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2m+1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)} = \dfrac{m}{2m+1}$, dacă $m \neq -\dfrac{1}{2}$ și

$+\infty$ dacă $m = -\dfrac{1}{2}$, ... **2p**

dar limita este $\dfrac{2}{5}$, deci $m \neq -\dfrac{1}{2}$ și $\dfrac{m}{2m+1} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 5m = 4m+2 \Leftrightarrow m = 2$. **1p**

Problema 4. În reperul cartezian xOy fie punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați, că punctele O, A_1 și A_2 sunt coliniare.

b) Câte drepte trec prin cel puțin două puncte dintre punctele O, A_0, A_1, A_2?

c) Calculați aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1} și A_{n+2}, unde $n \in \mathbb{N}$.

Soluție

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow O, A_1$ și A_2 sunt coliniare. **1p**

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow A_0$ nu aparține dreptei $O - A_1 - A_2$ deci 4 drepte sunt care corespund cerinței. **1p**

c) $\Delta = \begin{vmatrix} n & 2^n & 1 \\ n+1 & 2^{n+1} & 1 \\ n+2 & 2^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+1 & 2 & 1 \\ n+2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot [(2n+4n+4+n+2) - (2n+4+4n+n+1)] =$

$= 2^n \cdot [(7n+6) - (7n+5)] = 2^n$ **4p**

$T_{A_nA_{n+1}A_{n+2}} = \dfrac{|\Delta|}{2} = \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ **1p**