MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a XII-a - H2 - Științe ale naturii

Problema 1. Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20}$.

a) Demonstrați că $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4}$, pentru orice $x, y \in G$.

b) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că $f : (0, +\infty) \to (2, +\infty), f(x) = \sqrt{x + 4}$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, *)$.

c) Rezolvați în G ecuația $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de 2024 ori}} = \sqrt{5}$.

Problema 2. Se consideră funcțiile $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \dfrac{\text{arctg } x}{1 + x^2}$ și $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_2(x) = \dfrac{x^4 \cdot \text{arctg } x}{1 + x^2}$.

a) Determinați primitiva F_1 a funcției f_1 pentru care $F_1(1) = 0$.

b) Calculați: $\int f_2(x)\, dx$.

Problema 3. Se consideră mulțimea

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

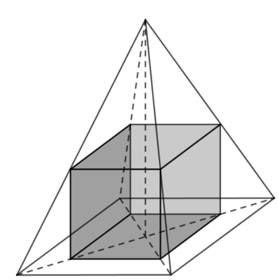
a) Demontsrați că $A(x) \cdot A(y) = A\left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\right)$ pentru oricare $A(x), A(y) \in G$.

b) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Calculați $A^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4.

Construiți o piramidă regulată de volum minim, circumscrisă unui cub de latură 1 metru (baza piramidei este în planul determinat de o față a cubului, iar vârfurile cubului care nu sunt în acest plan sunt situate pe muchiile piramidei, vezi figura alăturată). Ce lungime are înălțimea piramidei?



Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.