A 74-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024
Clasa a XI-a
Soluții și bareme

Problema 1. Se consideră funcția $f:(0,4)\backslash\{3\}\rightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3} & ,\ 0<x<3 \\ -\dfrac{\sin\left[2\cdot(x-3)\right]}{8\cdot(x-3)} & ,\ 3<x<4 \end{cases},$$

unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să aibă limită în punctul $x_0=3$.

Soluție

$$l_s(3)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} a\cdot\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} a\cdot\frac{(x^2+7)-(x^2+x+4)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2+x+4}\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{a}{8}\cdot\frac{-x+3}{x-3}=-\frac{a}{8}$$ **3p**

$$l_d(3)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{-\sin 2(x-3)}{8(x-3)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{-\sin 2(x-3)}{4\cdot 2(x-3)}=-\frac{1}{4}$$ **2p**

f are limită în punctul $x_0=3\iff l_s(3)=l_d(3)\iff -\dfrac{a}{8}=-\dfrac{1}{4}\iff a=2$ **2p**

Problema 2. Se consideră matricea $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $H=\{\mathbf{X}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid \exists k\in\mathbb{N}, k\geq 2, \mathbf{X}^k=\mathbf{O}_2\}$.

a) Arătați că $\mathbf{A}\in H$.

b) Dacă $\mathbf{X}\in H$, demonstrați că $\mathbf{X}^2=\mathbf{O}_2$.

c) Dacă $\mathbf{X}\in H$, arătați că $\det\left(\mathbf{I}_2+\mathbf{X}+\mathbf{X}^2+\cdots+\mathbf{X}^{2024}\right)=1$.

Soluție

a) $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}_2\Rightarrow\mathbf{A}\in H$ **1p**

.

b) Dacă $\mathbf{X}\in H\Rightarrow\mathbf{X}^k=\mathbf{O}_2\Rightarrow\det\left(\mathbf{X}^k\right)=\det(\mathbf{O}_2)=0\Rightarrow\left(\det(\mathbf{X})\right)^k=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\det(\mathbf{X})=0$ **1p**

Din teorema lui Cayley - Hamilton avem $\mathbf{X}^2-\mathrm{Tr}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{X}+\underbrace{(\det(\mathbf{X}))}_{=0}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathbf{X}^2=\mathrm{Tr}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{X}\quad(\mathbf{1})$ **1p**

Se demonstrează prin inducție că $\mathbf{X}^n=(\mathrm{Tr}(\mathbf{X})^{n-1}\cdot\mathbf{X},\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2$ **1p**

Din $X^k=\mathbf{O}_2,k\in\mathbb{N},k\geq 0\Rightarrow(\mathrm{Tr}(\mathbf{X}))^{k-1}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}_2\Rightarrow(\mathrm{Tr}(\mathbf{X}))^{k-1}=0\Rightarrow\mathrm{Tr}(\mathbf{X})=0$ și din $(\mathbf{1})$ avem $\mathbf{X}^2=\mathbf{O}_2$ **1p**

c) Din b) avem $\mathbf{X}^k = \mathbf{O}_2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Fie $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{X}) = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)(d+1) - bc = (ad-bc) + (a+d) + 1$ **1p**

Din a) și b) $\Rightarrow \det(\mathbf{X}) = 0, \mathrm{Tr}(\mathbf{X}) = 0 \Rightarrow ad - bc = 0, a + d = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{X}) = 1$ **1p**

Problema 3. Se consideră matricea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(\mathbf{A}) = 9$. Arătați că $\det\left(\mathbf{A}^2 + 5\mathbf{A} + 9\mathbf{I}_2\right)$ este un pătrat perfect!

(GM 11/S:L23.302.)

Soluție

Din teorema lui Cayley - Hamilton avem $\mathbf{A}^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} + 9\mathbf{I}_2 = \mathbf{O}_2$ **1p**

$\det(\mathbf{A}^2 + 5\mathbf{A} + 9\mathbf{I}_2) = det[(\mathbf{A}^2 -$
$Tr(A) \cdot \mathbf{A} + 9\mathbf{I}_2) + ((5 + \mathrm{Tr}(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{A})] = \det[(5 + \mathrm{Tr}(A)) \cdot \mathbf{A}] =$
$= (5 + \mathrm{Tr}(\mathbf{A}))^2 \cdot \det(\mathbf{A}) =$ **2p**

$= (5 + \mathrm{Tr}(\mathbf{A}))^2 \cdot 9 = [3 \cdot (5 - \mathrm{Tr}(\mathbf{A}))]^2$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \cdot (5 - \mathrm{Tr}(\mathbf{A})) \in \mathbb{Z}$, deci $\det\left(\mathbf{A}^2 + 5\mathbf{A} + 9\mathbf{I}_2\right)$ este un pătrat perfect. **2p**

Problema 4. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 2$ și $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{a_n(n+2)}{3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{a_k}\right] = \frac{a_n}{2},$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Soluție

Se calculează câteva elemente ale șirului $(a_n)_{n\geq 1}$. Avem $a_1 = 2 = 1 \cdot 2$, $a_2 = 6 = 2 \cdot 3$, $a_3 = 12 = 3 \cdot 4$.

Generalizare: $P(n) : a_n = n \cdot (n+1), n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Demonstrăm prin inducție: $P_1, P_2, \ldots, P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \dfrac{a_{k+1}(k+3)}{3} \iff 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) + a_{k+1} = \dfrac{a_{k+1}(k+3)}{3}$,

$\displaystyle\sum_{p=1}^{k} p(p+1) = \sum_{p=1}^{k} p^2 + \sum_{p=1}^{k} p = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Deci $\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3} + a_{k+1} = \dfrac{a_{k+1}(k+3)}{3} \Rightarrow a_{k+1} = (k+1)(k+2) \Rightarrow P(k+1)$ adevărat, conform inducției matematice $P(n)$ este adevărat pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ **3p**

Avem $k^2 < k^2 + k < (k+1)^2$ pentru $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \Rightarrow k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{a_k}\right] = k, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ **1p**

Deci $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{a_k}\right] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a_n}{2}$ **1p**