Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a IX-a - H1 - Tehnic
Soluții și bareme

Problema 1.

a) Arătați că $n+2 \leq \sqrt{n^2+6n} < n+3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

b) Arătați că $\left[\sqrt{n^2+6n}-2\right] = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Vizi István, Miercurea Ciuc

Soluție

a) $n+2 < \sqrt{n^2+6n} \leq n+3 \Longleftrightarrow n^2+4n+4 \leq n^2+6n < n^2+6n+9 \Longleftrightarrow 4 \leq 2n < 2n+9$ ceea ce este adevărat pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

.... **4p**

b) Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ avem: $n+2 \leq \sqrt{n^2+6n} < n+3 \Longrightarrow \left[\sqrt{n^2+6n}\right] = n+2$.

.... **2p**

$\left[\sqrt{n^2+6n}-2\right] = \left[\sqrt{n^2+6n}\right] - 2 = n+2-2 = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

.... **1p**

Problema 2. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este $S_n = 2n^2 - n$.

a) Calculați al șaselea termen al progresiei.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$1+5+9+\ldots+x = 496.$$

*****

Soluție

a) Notăm cu r și a_n rația respectiv termenul general al progresiei aritmetice.

$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$

$a_2 = S_2 - S_1 = 2 \cdot 2^2 - 2 - 1 = 5$

$r = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$

$a_6 = a_1 + 5 \cdot r = 1 + 5 \cdot 4 = 21$

.... **3p**

b) $S_n = 496 \Longleftrightarrow 2n^2 - n = 496 \Longleftrightarrow 2n^2 - n - 496 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-496) = 3969 > 0$

$n_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3969}}{4} = \dfrac{1 \pm 63}{4} \Longrightarrow n_1 = -\dfrac{31}{2}, n_2 = 16$

Din $n \in \mathbb{N}$ obținem $n = 16$.

.... **3p**

$x = a_{16} = 1 + 15 \cdot 4 = 61$

. . . . **1p**

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC, și fie punctele M, N, P mijloacele laturilor BC, AC respectiv AB, iar $\{G\} = AM \cap BN \cap CP$.

a) Realizați un desen corespunzător datelor problemei.

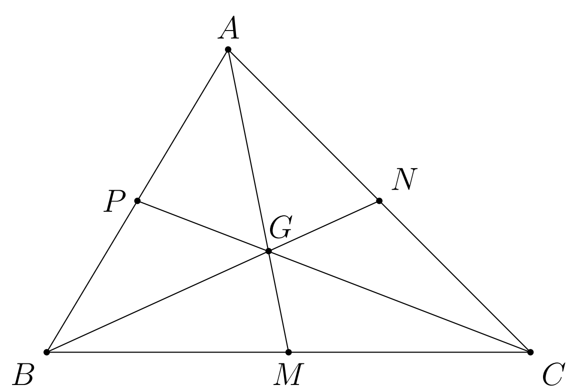
b) Arătați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$.

c) Arătați că $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$.

*****

Soluție

a)



. . . . **1p**

b) M e mijlocul lui $BC \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

N e mijlocul lui $AC \Longrightarrow \overrightarrow{BN} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$.

P e mijlocul lui $AB \Longrightarrow \overrightarrow{CP} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$.

. . . . **3p**

Adunăm relațiile obținute: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \overrightarrow{0}$

. . . . **1p**

c) G e centrul de greutate a triunghiului $ABC \Longrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

. . . . **1p**

Adunăm relațiile obținute: $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}\right) = \overrightarrow{0}$.

. . . . **1p**

Problema 4. Într-un magazin de modă s-a observat că în fiecare lună s-au vândut de o dată și jumătate de ori mai multe paltoane decât în luna precedentă.

a) Calculați câte paltoane au fost vândute în luna a patra, dacă în prima lună au fost vândute 128 de paltoane.

b) Calculați în a câta lună se va vinde al 5000-lea palton.

Vizi István, Miercurea Ciuc

Soluție

a) Notăm cu a_n cantitatea vândută în a n-a lună și obținem o progresie geometrică:
$a_1 = 128, a_n = a_{n-1} \cdot \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

.... **1p**

$a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 128 \cdot \frac{27}{8} = 432$

Deci în a patra lună s-au vândut 432 de paltoane.

.... **2p**

b) Notăm cu S_n numărul paltoanelor vândute în primele n luni.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2^7 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}} = 2^8 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$$

.... **1p**

$$S_{n-1} < 5000 \leq S_n \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 < \frac{5000}{2^8} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} < \frac{5256}{2^8} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

.... **1p**

$$\left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2187}{2^7} = \frac{4374}{2^8} < \frac{5256}{2^8} \leq \frac{6561}{2^8} = \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

.... **1p**

$n = 8 \Longrightarrow$ Al 5000-lea palton s-a vândut în luna a 8-a.

.... **1p**