Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 10 februarie 2024
Clasa a IX-a - H2 - Științele naturii
Soluții și bareme

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left(2x+\frac{5}{2}\right)+\left(2x+\frac{1}{2}\right)+\left(2x-\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(2x-\frac{43}{2}\right)=201,5+x.$$

Nuț Daniel, Toplița

Soluție

Partea stângă a ecuației este suma primelor 13 termeni din progresia aritmetică cu primul termen $2x+\frac{5}{2}$ și rația -2.

. . . . **2p**

$$\left(2x+\frac{5}{2}\right)+\left(2x+\frac{1}{2}\right)+\left(2x-\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(2x-\frac{43}{2}\right)=201,5+x \iff$$

$$\iff \frac{\left[\left(2x+\frac{5}{2}\right)+\left(2x-\frac{43}{2}\right)\right]\cdot 13}{2}=201,5+x \iff$$

$$\iff \frac{\left(4x-\frac{38}{2}\right)\cdot 13}{2}=201,5+x \iff$$

$$\iff \frac{52x-247}{2}=201,5+x \iff$$

$$\iff 52x-247=403+2x \iff$$

$$\iff 50x=650 \iff x=13\in\mathbb{R}$$

. . . . **5p**

Problema 2. În triunghiul ABC fie punctele $M\in AB, N\in AC$ și $P\in BC$ astfel încât $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}$ și $\overrightarrow{PC}=\frac{2}{9}\overrightarrow{PB}$.

a) Realizați un desen corespunzător datelor problemei.

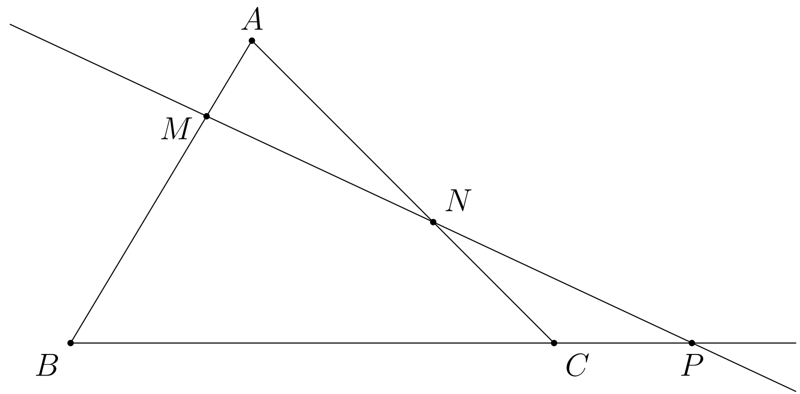
b) Arătați că $\overrightarrow{MP}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{9}{7}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{MN}=-\frac{7}{20}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

c) Arătați că punctele M, N și P sunt coliniare.

Kovács Lívia, Covasna

Soluție

a)



. . . . **1p**

b) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MB} \Longrightarrow \overrightarrow{MB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP} - \frac{2}{9}\overrightarrow{BP} = \frac{7}{9}\overrightarrow{BP} \Longrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{9}{7}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{9}{7}\overrightarrow{BC}.$

. . . . **2p**

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AN} \Longrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = -\frac{7}{20}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}.$

. . . . **2p**

c) $\overrightarrow{MN} = -\frac{7}{20}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{7}{15} \cdot \left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{9}{7}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{7}{15} \cdot \overrightarrow{MP} \Longrightarrow$ Punctele M, N și P sunt coliniare.

. . . . **2p**

Observație

$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PB}{PC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 1 \Longrightarrow$ din reciproca teoremei lui Menelau rezultă că punctele M, N și P sunt coliniare.

Problema 3. Arătați că numărul $10^n + 18n - 28$ este divizibil cu 27, pentru orcie $n \in \mathbb{N}$.

Nuț Daniel, Toplița

Soluție

Pentru $n = 0$ avem: $10^0 + 0 - 28 = -27 \vdots 27$

. . . . **1p**

Presupunem că $\left(10^k + 18k - 28\right) \vdots 27$, pentru $n = k \in \mathbb{N}$. Arătăm că $\left[10^{k+1} + 18(k+1) - 28\right] \vdots 27$.

. . . . **1p**

$\left(10^k + 18k - 28\right) \vdots 27 \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ astfel încât $10^k + 18k - 28 = m \cdot 27$

Prin urmare: $10^k = m \cdot 27 - 18 \cdot k + 28$.

. . . . **1p**

$$\begin{aligned}
10^{k+1} + 18 \cdot (k+1) - 28 &= 10 \cdot 10^k + 18 \cdot k - 10 = \\
&= 10 \cdot (m \cdot 27 - 18 \cdot k + 28) + 18 \cdot k - 10 = \\
&= 10 \cdot m \cdot 27 - 180 \cdot k + 280 + 18 \cdot k - 10 = \\
&= 10 \cdot m \cdot 27 - 162 \cdot k + 270 = \\
&= 27 \cdot (10 \cdot m - 6 \cdot k + 10) \Longrightarrow \left[10^{k+1} + 18 \cdot (k+1) - 28\right] \vdots 27
\end{aligned}$$

. . . . **3p**

Deci $(10^n + 18n - 28) \vdots 27, \forall n \in \mathbb{N}$.

. . . . **1p**

Observație

Prezentăm o altă soluție. Pentru $n = 0$ afirmația e adevărată. Pentru $n \geq 1$ avem:

$10^n + 18n - 28 = 10^n - 1 + 18n - 27 = \underbrace{\overline{99\ldots9}}_{\text{n ori}} + 18n - 27 = 9 \cdot (\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{n ori}} + 2n) - 27$

Dacă $n = 3k$, avem: $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{n ori}} + 2n = \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{3k ori}} + 6k$

$3k \vdots 3 \Longrightarrow \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{3k} \vdots 3 \Longrightarrow (\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{3k} + 6k) \vdots 3$

Dacă $n = 3k+1$, avem: $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{n ori}} + 2n = \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{(3k+1) ori}} + 6k + 2 = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{\text{3k ori}}3} + 6k$

$(3k+3) \vdots 3 \Longrightarrow \overline{\underbrace{11\ldots1}_{\text{3k ori}}3} \vdots 3 \Longrightarrow (\overline{\underbrace{11\ldots1}_{\text{3k ori}}3} + 6k) \vdots 3$

Dacă $n = 3k+2$, avem: $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{n ori}} + 2n = \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{(3k+2) ori}} + 6k + 4 = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{\text{(3k+1) ori}}5} + 6k$

$(3k+6) \vdots 3 \Longrightarrow \overline{\underbrace{11\ldots1}_{\text{(3k+1) ori}}5} \vdots 3 \Longrightarrow (\overline{\underbrace{11\ldots1}_{\text{(3k+1) ori}}5} + 6k) \vdots 3$

Deci: $(\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{n ori}} + 2n) \vdots 3 \Longrightarrow \left[9 \cdot \left(\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{n ori}} + 2n\right) - 27\right] \vdots 27$

Problema 4. Un rezervor poate fi umplut prin două robinete. Dacă ambele robinete sunt deschise în același timp, rezervorul gol este umplut în 12 minute. Când rezervorul este exact pe jumătate umplut, unul dintre robinete se închide. Dacă primul robinet este cel închis, atunci rezervorul se umple cu 5 minute mai târziu, decât în situația în care al doilea robinet ar fi cel închis.

a) Determinați în cât timp se va umple rezervorul gol, dacă doar primul robinet este deschis.

b) Determinați în cât timp se va umple rezervorul gol, dacă în primele 5 minute doar al doilea robinet este deschis și apoi se va deschide și primul robinet.

Mátyás Mátyás, Sfântu Gheorghe

Soluție

a) Notăm cu x și y timpul necesar pentru a umple rezervorul gol folosind doar primul respectiv doar al doilea robinet.

Dacă doar al doilea robinet este deschis, atunci rezervorul exact pe jumătate umplut se umple cu 5 minute mai târziu. $\Longrightarrow \dfrac{x}{2}+5=\dfrac{y}{2} \Longrightarrow x+10=y$

.... **1p**

Într-un minut primul robinet umple $\dfrac{1}{x}$ din rezervor, al doilea robinet umple $\dfrac{1}{y}$ din rezervor, iar împreună robinetele umple $\dfrac{1}{12}$ din rezervor. $\Longrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}$

.... **1p**

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{1}{12} \Longleftrightarrow \dfrac{2x+10}{x(x+10)}=\dfrac{1}{12} \Longleftrightarrow x^2-14x-120=0$

.... **1p**

$\Delta=(-14)^2-4\cdot(-120)=676>0$

$x_{1,2}=\dfrac{14\pm\sqrt{676}}{2}=\dfrac{14\pm 26}{2} \Longrightarrow x_1=-6<0, x_2=20>0$

Dacă doar primul robinet este deschis rezervorul gol se umple în 20 de minute.

.... **2p**

b) $y=x+10=30 \Longrightarrow$ Dacă doar al doilea robinet este deschis rezervorul gol se umple în 30 de minute.

Notăm cu m minutele în care ambele robinete au fost deschise.

$$\frac{5}{30}+\frac{m}{12}=1 \Longleftrightarrow \frac{m}{12}=\frac{25}{30} \Longleftrightarrow m=\frac{12\cdot 25}{30}=10$$

Dacă în primele 5 minute doar al doilea robinet este deschis și apoi se va deschide și primul robinet, rezervorul se umple în $m+5=15$ minute.

.... **2p**