MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a X-a - H2 - Științele naturii
Soluții și bareme

Problema 1. Fie $x=\sqrt{5-\sqrt{3}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ și $y=\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-1$.

a) Demonstrați că x și y sunt numere iraționale!

b) Demonstrați că $\frac{x+y}{x-y}-2\sqrt{6}$ este număr rațional!

Soluție

a. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}$ **1p**

$x=\sqrt{5-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ **1p**

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=\left|1+\sqrt{2}\right|=1+\sqrt{2}$ **1p**

$y=\sqrt{2+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}-1=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-1=1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ **1p**

b. $\frac{x+y}{x-y}-2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}=$ **1p**

$=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{3-2}-2\sqrt{6}==3+2\sqrt{6}+2-2\sqrt{6}=5\in\mathbb{Q}$ **2p**

Problema 2. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2-x+1=0$!

a) Calculați valoarea expresiei $|x_1+\overline{x_2}|$!

b) Demonstrați că $x_1^3+x_2^3=-2$.

c) Determinați cel mai mic număr $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ pentru care $x_1^n+x_2^n=1$.

Soluție

a) Dacă rezolvăm ecuația, rezultă că $x_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, și $x_2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

$|x_1+\overline{x_2}|=\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}\right|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2\,.$ **2p**

b) Observăm, că $x^2-x+1=0\Rightarrow(x+1)(x^2-x+1)=0\iff x^3+1=0.$ **1p**

Știm, că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-x+1=0$, deci sunt rădăcinile și ecuației $x^3+1=0$, de aceea $x_1^3=x_2^3=-1$, din care rezultă $x_1^3+x_2^3=-1-1=-2$. **1p**

c) $x_1 + x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 1$. Știm, că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - x + 1 = 0$, deci

$$x_1^2 - x_1 + 1 = 0$$
$$x_2^2 - x_2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1 + 1 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 + 2 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 = -1$$

.... **1p**

Am demonstrat deja, că $x_1^3 + x_2^3 = -2$.

$$x_1^2 - x_1 + 1 = 0 \mid \cdot x_1^2 \neq 0$$
$$x_1^4 - x_1^3 + x_1^2 = 0$$

$$x_2^2 - x_2 + 1 = 0 \mid \cdot x_2^2 \neq 0$$
$$x_2^4 - x_2^3 + x_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 - x_1^3 - x_2^3 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$
$$x_1^4 + x_2^4 + 2 - 1 = 0$$
$$x_1^4 + x_2^4 = -1$$

.... **1p**

Multiplicăm ecuațiile cu cubul rădăcinilor, și obținem că

$$x_1^2 - x_1 + 1 = 0 \mid \cdot x_1^3 \neq 0$$
$$x_1^5 - x_1^4 + x_1^3 = 0$$

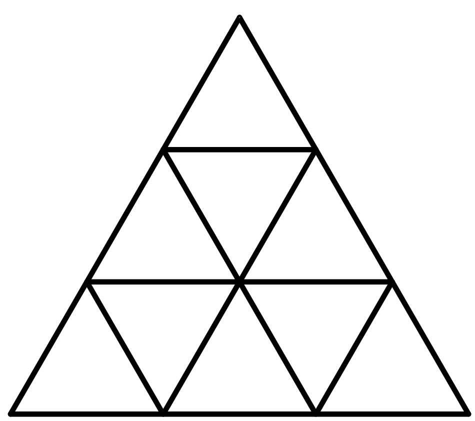
$$x_2^2 - x_2 + 1 = 0 \mid \cdot x_2^3 \neq 0$$
$$x_2^5 - x_2^4 + x_2^3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^5 + x_2^5 - x_1^4 - x_2^4 + x_1^3 + x_2^3 = 0$$
$$x_1^5 + x_2^5 + 1 - 2 = 0$$
$$x_1^5 + x_2^5 = 1$$

Adică cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, este 5. .... **1p**

Problema 3. Pe laturile și în interiorul unui triunghi echilateral se iau 10 puncte distincte, două câte două. Să se arate că dacă lungimea laturilor triunghiului este egală cu 1m, există două puncte din cele luate care au distanța între ele mai mică decât 34 cm.

Soluție Divizăm triunghiul în nouă triunghiuri echilaterale în modul următor: divizăm laturile în trei și unim punctele obținute cu segmente paralele cu laturile triunghiului cel mare.



Deci obținem nouă triunghiuri echilaterale congruente, cu latura $\frac{a}{3}$, unde $a = 100\,cm$ este latura triunghiului mare. **3p**

Dacă nu luăm toate 10 puncte în vârfurile triunghiurilor mici, atunci va exista cel puțin un punct în interiorul uni triunghi mic. Astfel dinstanța aceelor puncte va fi mai puțin, decât latura, adică mai mică decât a. **2p**
Dacă luăm cele 10 puncte în vârfurile triunghiurilor mici, atunci distanța lor va fi exact $\frac{a}{3}$. **1p**
Altfel nu putem lua cele 10 puncte distincte, două câte două.
Acum avem, că $\frac{a}{3} = \frac{100}{3} < 34$ cm. **1p**

Problema 4. În data de 1. ianuarie 2024 un oraș a avut o populație de $N_0 = 23000$ locuitori. Notăm cu $N(t)$ numărul locuitorilor orașului după t ani. Se estimează o creștere exponențială a populației după formula $N(t) = N_0 \cdot 2^{0,05 \cdot t}$.

a) Care va fi populația aproximativă a orașului după 10 ani?

b) După câți ani se va dubla populația orașului?

Soluție a) $N(10) = 23000 \cdot 2^{0,05 \cdot 10} = 23000 \cdot 2^{0,5} = 23000 \cdot \sqrt{2} \approx 32527$ **2p**
Rezultatul depinde de precizia abordării $\sqrt{2}$, de aceea acceptăm orice rezultat între 32200 și 32527.
b) Fie t^* numărul anilor trecuți până la dublarea populației inițiale.
Avem $N(t^*) = 2N_0 \Leftrightarrow N_0 \cdot 2^{0,05 \cdot t^*} = 2N_0$ **2p**

De aici avem $2^{0,05 \cdot t^*} = 2$, de unde $0,05 \cdot t^* = 1$ **2p**

Prin urmare $t^* = \frac{1}{0,05} = 20$. **1p**