

26. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2024. február 10.
XII. osztály - H1 - Szakközép

1. feladat.

A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 12x - 12y + 156$ asszociatív műveletet.

- Oldd meg az $x * x = 93$ egyenletet!
- Számítsd ki $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \dots * \sqrt{2024}$ értékét!
- Határozd meg azokat az m természetes számokat, amelyekre $m * m * m = m$.

2. feladat.

Számítsd ki!

- $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$
- $I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$ és $I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

3. feladat.

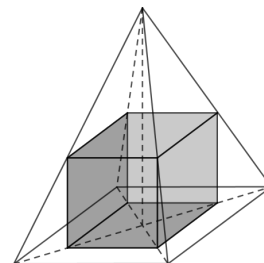
A $G = (2, +\infty)$ halmazon értelmezett a $*$ művelet:

$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20} \quad \forall x, y \in G$$

- Igazold, hogy $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4}$
- Oldd meg a G halmazon az $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2024\text{-szer}} = \sqrt{5}$ egyenletet!
- Igazold, hogy az $f : (0, +\infty) \rightarrow (2, +\infty), f(x) = \sqrt{x + 4}$ függvény csoportizomorfizmus a (\mathbb{R}_+^*, \cdot) és $(G, *)$ csoportok között!

4. feladat.

Írjunk az 1 m oldalélű kocka köré minimális térfogatú szabályos négyoldalú gúlát úgy, hogy az alapja a kocka egyik lapjának síkjában legyen és a kocka többi négy csúcsa a gúla oldalélein helyezkedjen el. Mekkora a magassága ennek a gúlának?



Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.