A 74-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024
Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră funcția $f:(0,4)\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3} & ,\ 0<x<3\\ -\dfrac{\sin\left(2\cdot(x-3)\right)}{8\cdot(x-3)} & ,\ 3<x<4\end{cases},$$

unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să aibă limită în punctul $x_0=3$.

Problema 2. Se consideră matricea $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $H=\{\mathbf{X}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid \exists k\in\mathbb{N}, k\geq 2, \mathbf{X}^k=\mathbf{O}_2\}$.

a) Arătați că $\mathbf{A}\in H$.

b) Dacă $\mathbf{X}\in H$, demonstrați că $\mathbf{X}^2=\mathbf{O}_2$.

c) Dacă $\mathbf{X}\in H$, arătați că $\det\left(\mathbf{I}_2+\mathbf{X}+\mathbf{X}^2+\cdots+\mathbf{X}^{2024}\right)=1$.

Problema 3. Se consideră matricea $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(\mathbf{A})=9$. Arătați că $\det\left(\mathbf{A}^2+5\mathbf{A}+9\mathbf{I}_2\right)$ este un pătrat perfect!

Gazeta matematică

Problema 4. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1=2$ și $a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{a_n(n+2)}{3}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstrați că

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{a_k}\right]=\frac{a_n}{2},$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.