MINISTERUL EDUCAȚIEI — INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA / KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE — INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA / HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

**Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”**
**Etapa zonală, 10 februarie 2024**

# Clasa a XII-a - H2 - Științe ale naturii
# Soluții și bareme

**Problema 1.**
Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20}$.

a) Demonstrați că $x * y = \sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}$, pentru orice $x, y \in G$.

b) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că

$$f : (0, +\infty) \to (2, +\infty), f(x) = \sqrt{x+4}$$

este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, *)$.

c) Rezolvați în $G$ ecuația $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de 2024 ori}} = \sqrt{5}$.

**Soluție**

a) $x*y = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20} = \sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16 + 4} = \sqrt{x^2(y^2-4) - 4(y^2-4) + 4} = \sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}$ ........ **1p**

b) f injectivă, deoarece $f(x) = f(y) \Rightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = y, \forall x, y \in G$
f surjectivă, deoarece $\forall y \in G, \exists x \in (0, +\infty)$, astfel încât $f(x) = y, x = y^2 - 4 \in (0, +\infty)$
deci f bijectivă ........ **2p**
$f(xy) = \sqrt{xy+4}$
$f(x) * f(y) = \sqrt{(f^2(x)-4)(f^2(y)-4)+4} = \sqrt{xy+4}$
$f(xy) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G \Rightarrow$ f morfism
f bijectivă și morfism $\Rightarrow$ f izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, *)$ ........ **1p**

c) Conform punctului a) și metodei inducția matematică avem
$\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de 2024 ori}} = \sqrt{(x^2-4)^{2024}+4} = \sqrt{5}$ ........ **1p**
$(x^2-4)^{2024} + 4 = 5$ adică $(x^2-4)^{2024} = 1$
$x^2 - 4 = 1$ sau $x^2 - 4 = -1$ ........ **1p**

$x = \sqrt{5} \in G, x = -\sqrt{5} \notin G, x = \pm\sqrt{3} \notin G$

$x = \sqrt{5}$ .................................................................................... **1p**

**Problema 2.**

Se consideră funcțiile $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \dfrac{arctg\, x}{1+x^2}$ și $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_2(x) = \dfrac{x^4 \cdot arctg\, x}{1+x^2}$.

a) Determinați primitiva $F_1$ a funcției $f_1$ pentru care $F_1(1) = 0$.

b) Calculați: $\int f_2(x)\, dx$.

**Soluție**

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, $f_1$ admite primitive.

$\int f_1(x)dx = \int \dfrac{arctg\, x}{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}(arctg\, x)^2 + C$ ........................................... **2p**

$F_1(1) = \dfrac{1}{2}(arctg\, 1)^2 + C = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 + C = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{\pi^2}{32}$

$F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_1(x) = \dfrac{1}{2}(arctg\, x)^2 - \dfrac{\pi^2}{32}$ ..................................................... **1p**

b) $\int f_2(x)\, dx = \int \dfrac{x^4 \cdot arctg\, x}{1+x^2}\, dx = \int x^2 arctg\, x\, dx - \int arctg\, x\, dx + \int \dfrac{arctg\, x}{1+x^2}\, dx$ ............ **1p**

$\int x^2 arctg\, x\, dx = \int \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' arctg\, x\, dx = \dfrac{x^3}{3} arctg\, x - \dfrac{1}{3}\int \dfrac{x^3}{x^2+1}\, dx =$

$= \dfrac{x^3}{3} arctg\, x - \dfrac{1}{3}\int x - \dfrac{x}{x^2+1}\, dx = \dfrac{x^3}{3} arctg\, x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6} ln(x^2+1) + C_1$ ................. **2p**

$\int arctg\, x\, dx = \int (x)' arctg\, x\, dx = x arctg\, x - \int \dfrac{x}{1+x^2}\, dx = x arctg\, x - \dfrac{1}{2} ln(x^2+1) + C_2$

$I = \left(\dfrac{x^3}{3} - x\right) arctg\, x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{2}{3} ln(x^2+1) + \dfrac{(arctg\, x)^2}{2} + C$ ............................ **1p**

**Problema 3.**

Se consideră mulțimea

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \right\}$$

a) Demosntrați că $A(x) \cdot A(y) = A\left(\dfrac{1}{2} - 2\left(\dfrac{1}{2} - x\right)\left(\dfrac{1}{2} - y\right)\right)$ pentru oricare $A(x), A(y) \in G$.

b) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Calculați $A^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**Soluție**

a) $A(x) \cdot A(y) = A(x+y-2xy) = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + x + y - 2xy\right) = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + x + 2y\left(\frac{1}{2} - x\right)\right) =$
$A\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x\right) + 2y\left(\frac{1}{2} - x\right)\right) = A\left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\right)$ ...................... **1p**

b) Dacă $A(x), A(y) \in G$, atunci $A(x) \cdot A(y) = A(x+y-2xy) \in G, x+y-2xy \neq \frac{1}{2}$ ........ **1p**
Asociativitate: înmulțirea matricelor este asociativă.
Comutativitate: $A(x) \cdot A(y) = A(x+y-2xy) = A(y+x-2yx) = A(y) \cdot A(x)$ pentru oricare $A(x), A(y) \in G$ ...................................................................... **1p**
Element neutru:

$$\exists A(e) \in G : A(x) \cdot A(e) = A(e) \cdot A(x) = A(x), \forall A(x) \in G$$

$$A(x) \cdot A(e) = A(x) \Leftrightarrow e(1-2x) = 0, x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e = 0, A(0) \in G$$

$A(0) \cdot A(x) = A(x) \cdot A(0)$. Deci $A(0)$ element neutru. .................................... **1p**
Fiecare element din G este simetrizabil:

$$\forall A(x) \in G, \exists A(x') \in G : A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0)$$

$x + x' - 2xx' = 0 \Rightarrow x' = \frac{x}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}, \frac{x}{2x-1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow A(x') = A(\frac{x}{2x-1}) \in G.$
Privind cele de mai sus, $(G, \cdot)$ este grup abelian. .......................................... **1p**

c) $A^2(x) = A\left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)$
$A^3(x) = A\left(\frac{1}{2} - 2^2\left(\frac{1}{2} - x\right)^3\right)$
Se demonstrează prin inducție matematică: $p(n) : A^n(x) = A\left(\frac{1}{2} - 2^{n-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)^n\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$
$p(1) : A^1(x) = A(x)$
$p(k) \Rightarrow p(k+1)$
$p(k) : A^k(x) = A\left(\frac{1}{2} - 2^{k-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)^k\right)$

$$p(k+1) : A^{k+1}(x) = A\left(\frac{1}{2} - 2^k\left(\frac{1}{2} - x\right)^{k+1}\right)$$

$$A^{k+1}(x) = A^k(x)\cdot A(x) = A\left(\frac{1}{2} - 2^{k-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)^k + x - 2\cdot\left(\frac{1}{2} - 2^{k-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)^k\right)\cdot x\right) =$$

$$= A\left(\frac{1}{2} - 2^{k-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)^k + 2^k\left(\frac{1}{2} - x\right)^k\cdot x\right) = A\left(\frac{1}{2} - 2^k\left(\frac{1}{2} - x\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2} - x\right)\right) =$$

$$= A\left(\frac{1}{2} - 2^k\left(\frac{1}{2} - x\right)^{k+1}\right) \Rightarrow p(k+1) \text{ adevărat.}$$

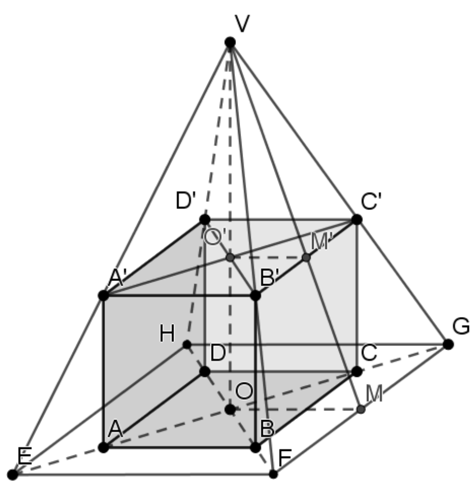
Folosind metoda inducției matematice, rezultă că

$A^n(x) = A\left(\frac{1}{2} - 2^{n-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)^n\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ .............................................. **2p**

**Problema 4.**

Construiți o piramidă regulată de volum minim, circumscrisă unui cub de latură 1 metru (baza piramidei este în planul determinat de o față a cubului, iar vârfurile cubului care nu sunt în acest plan sunt situate pe muchiile piramidei, vezi figura alăturată). Ce lungime are înălțimea piramidei?

**Soluție**




Conform notațiilor din figură avem $O'M' = \frac{1}{2}, OO' = 1$, fie $VO' = x$.

$\frac{O'M'}{OM} = \frac{VO'}{VO} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{OM} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow OM = \frac{x+1}{2x}$. .............................................. **2p**

Baza piramidei este $EF = 2OM = \frac{x+1}{x}$, deci volumul piramidei se poate calcula prin formula

$V(x) = \frac{VO\cdot A_{EFGH}}{3} = \frac{(x+1)\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}{3} = \frac{(x+1)^3}{3x^2}$. .............................................. **1p**

Pentru a obține volumul minim determinăm punctele de extrem ale funcției $V(x)$ .

$V'(x) = \dfrac{3(x+1)^2 \cdot 3x^2 - (x+1)^3 \cdot 6x}{9x^2} = \dfrac{(x+1)^2(3x-2x-2)}{3x} = \dfrac{(x+1)^2(x-2)}{3x}$ .............. **2p**

Din ecuația $V'(x) = 0$ și condiția $x > 0$ fiind o distanță, obținem $x = 2$ punct de extrem, iar pentru $x < 2$, avem $V'(x) < 0$ și pentru $x > 2$, avem $V'(x) > 0$, deci $x = 2$ este punct de minim, deci înălțimea piramidei cu volum minim este 3. .................................................. **2p**