A 74-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a VIII-a
Soluții și bareme

Problema 1. Fie mulțimile $A = \{3x+1, |2x-1| \leqslant 3, x \in \mathbb{R}\}$ și $B = \{x, |x+2| \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$.

a) Determinați intervalele A și B.

b) Demonstrați că suma elementelor întregi ale intervalelor A și B este număr prim.

Soluție
$|2x-1| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant 2x-1 \leqslant 3 \iff -2 \leqslant 2x \leqslant 4 \iff -1 \leqslant x \leqslant 2$

$-1 \leqslant x \leqslant 2 \iff -3 \leqslant 3x \leqslant 6 \iff -2 \leqslant 3x+1 \leqslant 7$ deci $A = [-2; 7]$ **2p**

$|x+2| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \iff -3 \leqslant x \leqslant -1 \iff B = [-3; -1]$ **2p**

Suma elementelor mulțimii $A \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, \ldots 7\}$ este 25 .... **1p**

Suma elementelor mulțimii $B \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1\}$ este -6 .... **1p**

În total suma este 19, ceea ce este număr prim. **1p**

Problema 2. Determinați valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $S = \dfrac{\sqrt{17-12\sqrt{2}} + (1+\sqrt{2})^2}{x+2} \in \mathbb{N}$.

Soluție
$(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$ **1p**

$17 - 12\sqrt{2} = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = (3-2\sqrt{2})^2$ **2p**

$\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} = |3-2\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2}$ **1p**

$S = \dfrac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{x+2} = \dfrac{6}{x+2}$ **1p**

$\dfrac{6}{x+2} \in \mathbb{N} \iff x+2 \in D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ **1p**

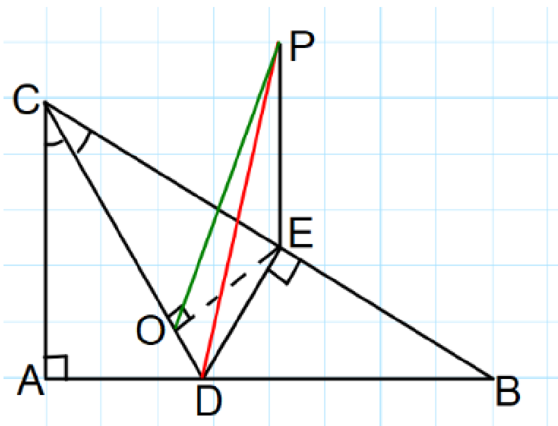
$x \in \{-1, 0, 1, 4\}$ **1p**

Problema 3. În triunghiul ABC avem $\sphericalangle A = 90°$, $AC = 12$ cm, $BC = 20$ cm. Fie CD bisectoarea unghiului ACB, $D \in AB$, și $DE \perp BC$, $E \in BC$. În punctul E, pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara $PE = 6$ cm. Calculați:

a) lungimea segmentului DE și distanța de la punctul P la punctul D;

b) distanța de la punctul P la dreapta CD.

Soluție



desen **1p**

a) În tr.dr. ABC cu t. lui Pitagora avem $AB = 16$cm.

CD bisectoare, aplicând teorema bisectoarei în tr. ABC, avem $\frac{AD}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$AD = 3$k, $DB = 5$k, $AD + DB = AB = 16$, deci $AD = 6$ cm **1p**

$\triangle CAD \equiv \triangle CED(unghi, ipot.) \implies AD \equiv DE, DE = 6$ cm **1p**

$PE \perp (ABC), DE \subset (ABC) \implies PE \perp DE$, cu t.Pit $\triangle PED \implies PD = 6\sqrt{2}$cm **1p**

b) $PE \perp (ABC)$, $EO \perp CD$ cu t. 3perp $\implies PO \perp CD \implies d(P, CD) = PO$ **1p**

$\triangle CAD : CD = 6\sqrt{5}$cm, $\triangle CED : EO = \frac{CE \cdot DE}{CD} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$cm **1p**

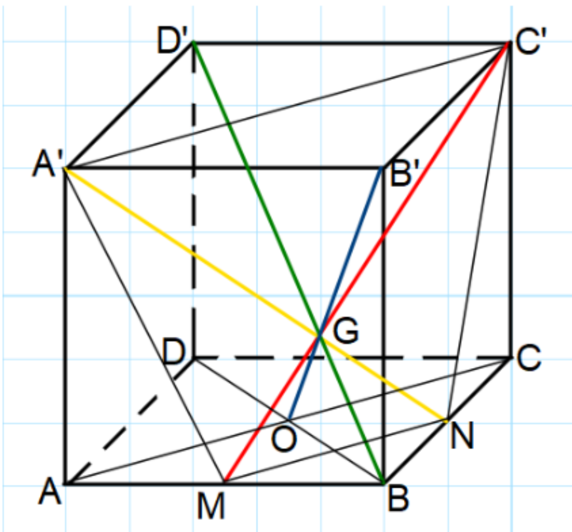
$\triangle PEO : PO = \frac{18\sqrt{5}}{5}$cm **1p**

Problema 4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu O centrul feței $ABCD$, iar punctele M și N mijloacele muchiilor AB, respectiv BC. Arătați că:

a) Patrulaterul $MNC'A'$ are diagonalele perpendiculare;

b) Dreptele $D'B$, $A'N$, $C'M$ și $B'O$ sunt concurente.

Soluție



a) MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, rezultă $MN \parallel AC$, dar $AC \parallel A'C'$, deci $MN \parallel A'C'$.
Din congruența triunghiurilor $A'AM$ si $C'CN$ rezultă $A'M = C'N$, deci patrulaterul $MNC'A'$, este un trapez isoscel. Rezultă că diagonalele sunt congruente, adică $A'N = C'M$ **1p**

Notăm muchia cubului cu a.

În triunghiul dreptunghic ABN, $AN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, iar în triunghiul dreptunghic $A'AN$ calculăm $A'N$,

$A'N^2 = A'A^2 + AN^2 \implies A'N^2 = a^2 + \dfrac{5a^2}{4} \implies$ A'N$= \dfrac{3a}{2}$ **1p**

În trapezul $MNC'A'$ notăm intersecția diagonalelor $A'N \cap C'M = \{G\}$. $MN \parallel A'C'$, rezultă că

triunghiurile $A'C'G$ și MNG sunt asemenea, deci $\dfrac{A'G}{GN} = \dfrac{C'G}{GM} = \dfrac{A'C'}{MN} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{1}$.(1)

Din relația (1) $\dfrac{A'G}{GN} = \dfrac{C'G}{GM} = \dfrac{2}{1} \implies \dfrac{A'G}{A'N} = \dfrac{C'G}{A'M} = \dfrac{2}{3}$

Înlocuind $\dfrac{A'G}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{C'G}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{2}{3}$. Efectuând calculele, obținem $A'G = C'G = a$ **1p**

În triunghiul $A'C'G$, avem $A'C'^2 = A'G^2 + C'G^2$, pe baza teoremei reciproce a lui Pitagora triunghiul $A'C'G$ este dreptunghic in G, adică $A'N \perp C'M$, deci trapezul $MNC'A'$ este ortodiagonal **1p**

b) În trapezul $A'D'NB$, $(BN \parallel A'D')$ notăm intersecția diagonalelor $A'N \cap D'B = \{G'\}$.

Triunghiurile $A'D'G'$ si NBG' sunt asemenea, deci $\dfrac{A'G'}{G'N} = \dfrac{D'G'}{G'B} = \dfrac{A'D'}{BN} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2}{1}$.(2) **1p**

În trapezul $D'B'BO$, $(BO \parallel D'B')$ notăm intersecția diagonalelor $D'B \cap B'O = \{G''\}$. Triunghiurile $D'B'G''$ si BOG'' sunt asemenea, deci $\dfrac{D'G''}{G''B} = \dfrac{B'G''}{G''O} = \dfrac{D'B'}{OB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{1}$. (3) **1p**

Din relațiile (1) si (2) rezultă $\dfrac{A'G}{GN} = \dfrac{A'G'}{G'N}$, de aici $G = G'$, iar din relațiile (2) si (3) $\dfrac{D'G'}{G'B} = \dfrac{D'G''}{G''B}$, adică $G' = G''$. Rezultă $G = G' = G''$, deci punctele G, G' si G'' coincid, dreptele $D'B$, $A'N$, $C'M$ si $B'O$ sunt concurente **1p**