Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a XI-a - H1 - Tehnic

Problema 1. Se consideră matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și pentru orice $a \in \mathbb{R}$, considerăm matricea $\mathbf{X}(a) = \mathbf{I}_2 + a\mathbf{A}$.

a) Demonstrați, că $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(b) = \mathbf{X}(a + b + 5ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\mathbf{X}(a) \cdot \mathbf{X}(c) = \mathbf{X}(c)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

c) Determinați $t \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\mathbf{X}\left(\frac{14}{5}\right) \cdot \mathbf{X}\left(\frac{9}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{X}\left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \mathbf{X}\left(-\frac{11}{5}\right) = \mathbf{X}(t).$$

Problema 2. Se consideră matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x+3 & x \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinați numărul real m astfel încât $\big[m \cdot \mathbf{A}(-1) + \mathbf{A}(m)\big] \cdot \mathbf{A}(0) = (m^2 + 17) \cdot \mathbf{I}_2$.

Problema 3.

a) Studiați existența limitei funcției $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{7x - 3 + 6x^2}{9 + 12x + 4x^2}$ în punctul $x_0 = -\dfrac{3}{2}$.

b) Determinați valoarea numărului real m pentru care
$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{mx^2 - 3x + 5}{(2m+1)x^2 - 4x + 7} = \frac{2}{5}$.

Problema 4. În reperul cartezian xOy fie punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați, că punctele O, A_1 și A_2 sunt coliniare.

b) Câte drepte trec prin cel puțin două puncte dintre punctele O, A_0, A_1, A_2?

c) Calculați aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1} și A_{n+2}, unde $n \in \mathbb{N}$.

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.