A 74-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024
Clasa a VII-a
Soluţii şi bareme

Problema 1.

a) Dacă $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2024}$ și $B = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{2023}{2024}$ atunci calculați media aritmetică a celor două numere.

Tuzson Réka și Tuzson Zoltán, Odorheiu Secuiesc

b) Se consideră numerele $C = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + ... + \frac{1}{99 \cdot 300}$ și

$D = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} + \frac{10}{21} + ... + \frac{70}{441}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{63}\right)}$. Calculați $C \cdot D + \frac{1}{100}$.

Balog Katalin, Târgu Secuiesc

Soluţie:

a) $m_a = \frac{A+B}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2024} + \frac{2023}{2024}\right)}{2}$ **1p**

$m_a = \frac{1 + 1 + ... + 1}{2} = \frac{2023}{2}$ **1p**

b) $C = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100}\right)$ **1p**

$C = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{99}{100} = \frac{33}{100}$ **1p**

$D = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{10}{21} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{70}{441} - \frac{1}{63}\right)}$ **1p**

$D = \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 63} = 3$ **1p**

$C \cdot D + \frac{1}{100} = \frac{33}{100} \cdot 3 + \frac{1}{100} = 1$ **1p**

Problema 2.

Aflați numerele $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, știind că $x + \frac{1}{y} = 2$, $y + \frac{1}{z} = 3$ și $xyz = 1$.

(Supliment S:E23.262)

Soluţie: $x = 2 - \frac{1}{y}$, $z = \frac{1}{3-y}$ **2p**

$\left(2 - \frac{1}{y}\right) \cdot y \cdot \left(\frac{1}{3-y}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2y-1}{y} \cdot y \cdot \frac{1}{3-y} = 1$ **1p**

$\dfrac{2y-1}{3-y}=1 \Rightarrow 2y-1=3-y \Rightarrow 3y=4 \Rightarrow y=\dfrac{4}{3}$ **2p**

$x=\dfrac{5}{4}$, $z=\dfrac{3}{5}$ **2p**

Problema 3.

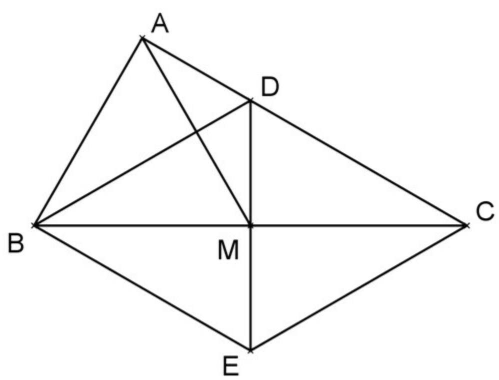
Se consideră ΔABC cu $\sphericalangle A=90^\circ$ și $\sphericalangle C=30^\circ$. Bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în punctul D. Fie M mijlocul laturii BC și E simetricul punctului D față de M. Arătați că:

a) Patrulaterul $BDCE$ este romb;

b) $AM \perp CE$.

Balog Katalin, Târgu Secuiesc

Soluţie:



Desen **1p**

a) $\left.\begin{array}{l} BM \equiv MC \\ DM \equiv ME \end{array}\right\} \Rightarrow BDCE$ paralelogram **1p**

$\sphericalangle BAC=90^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC=90^\circ-\sphericalangle ACB=60^\circ$; $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBC \Rightarrow \sphericalangle DBC=\dfrac{\sphericalangle ABC}{2}=30^\circ$ **1p**

$\left.\begin{array}{l} \Delta DBC: \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DCB \Rightarrow BD \equiv DC \\ BDCE \text{ paralelogram} \end{array}\right\} \Rightarrow BDCE$ romb **1p**

b) $\Delta ABC: \sphericalangle A=90^\circ, \sphericalangle C=30^\circ \Rightarrow AB=\dfrac{BC}{2}$, dar $BM=\dfrac{BC}{2}$ **1p**

ΔABM isoscel, BD bisectoarea $\sphericalangle ABM \Rightarrow BD \perp AM$ **1p**

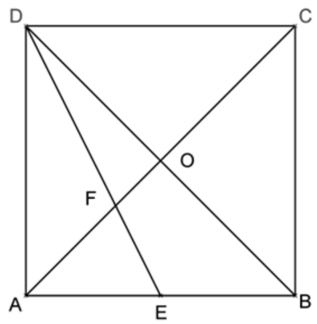
Dar $BD \parallel EC \Rightarrow AM \perp CE$ **1p**

Problema 4.

Intersecția diagonalelor pătratului $ABCD$ este punctul O, mijlocul laturii AB este punctul E și $AC \cap DE = \{F\}$. Determinați raportul dintre aria patrulaterului $BEFO$ și aria pătratului $ABCD$.

Deák Zsuzsánna, Odorheiu Secuiesc

Soluţie:



Notăm $AB = a$

$\mathcal{A}_{ABCD} = a^2$ **1p**

$\mathcal{A}_{\Delta DAB} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$; $\mathcal{A}_{\Delta DOA} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{4} = \dfrac{a^2}{4}$ **1p**

DE mediană în $\Delta ABD \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta DEB} = \mathcal{A}_{\Delta DEA} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta DEB} = \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta DAB}}{2} = \dfrac{a^2}{4}$ **1p**

AO și DE mediane în $\Delta DAB \Rightarrow F$ centru de greutate al $\Delta DAB \Rightarrow FO = \dfrac{1}{3}AO$ **1p**

$FO = \dfrac{1}{3}AO \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta DOF} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{\Delta DOA} = \dfrac{a^2}{12}$ **1p**

$\mathcal{A}_{BEFO} = \mathcal{A}_{\Delta DEB} - \mathcal{A}_{\Delta DOF} = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{12} = \dfrac{a^2}{6}$ **1p**

$\dfrac{\mathcal{A}_{BEFO}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \dfrac{a^2}{6} : a^2 = \dfrac{1}{6}$ **1p**