A 74-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024
Clasa a IX-a

Problema 1

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $|x-3|+|x-1|+|x+1|=5$.

b) Determinați $k \in \mathbb{Z}$ pentru care ecuația $|x-3|+|x-1|+|x+1|=k$ are exact o soluție întreagă.

Problema 2. Arătați că numărul $3 \cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ este divizibil cu 17, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Problema 3. Demonstrați că inegalitățile de mai jos sunt satisfăcute, oricare ar fi numerele reale $a, b, c>0$:

a) $\dfrac{a}{a^2+bc} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{bc}}$

b) $\dfrac{a}{a^2+bc} \leq \dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{4c}$

c) $\dfrac{a}{a^2+bc}+\dfrac{b}{b^2+ca}+\dfrac{c}{c^2+ab} \leq \dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}$

Problema 4. Pe laturile AB, BC, DE și EF ale hexagonului regulat $ABCDEF$ se consideră punctele M, N, P respectiv Q aftel încât $\dfrac{BM}{MA}=m, \dfrac{BN}{NC}=n, \dfrac{EP}{PD}=p, \dfrac{EQ}{QF}=q$.

a) Arătați că $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{BP}=\left(\dfrac{1}{1+p}-\dfrac{1}{1+m}\right)\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{BQ}=\left(\dfrac{1}{1+q}-\dfrac{1}{1+n}\right)\overrightarrow{BC}$.

b) Știind că $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{0}$, arătați că dreptele MP, NQ și CF sunt concurente.

Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.