A 74-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a IX-a
Soluții și bareme

Problema 1.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $|x-3|+|x-1|+|x+1|=5$.

b) Determinați $k \in \mathbb{Z}$ pentru care ecuația $|x-3|+|x-1|+|x+1|=k$ are exact o soluție întreagă.

prelucrare după GM 10/S:L23.241

Soluție

a) Dacă $x \leq -1$, ecuația devine $-x+3-x+1-x-1=5 \Leftrightarrow -3x=2$ nu are soluție întreagă.

Dacă $x \in (-1,1]$, ecuația devine $-x+3-x+1+x+1=5 \Leftrightarrow x=0 \in \mathbb{Z}$.

Dacă $x \in (1,3]$, ecuația devine $-x+3+x-1+x+1=5 \Leftrightarrow x=2 \in \mathbb{Z}$.

Dacă $x>3$, ecuația devine $x-3+x-1+x+1=5 \Leftrightarrow 3x=8$ nu are soluție întreagă.

Deci soluțiile întregi sunt 0 și 2. .... **3p**

b) Studiem câte soluții admite ecuația în mulțimea $(-\infty,-1] \cap \mathbb{Z}$ în funcție de k.

Dacă $x \in (-\infty,-1] \cap \mathbb{Z}$, atunci $|x-3|+|x-1|+|x+1|=-x+3-x+1-x-1=-3x+3$.

$$-3x+3=k \Longleftrightarrow -3x=k-3 \Longleftrightarrow x=-\frac{k}{3}+1 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow k \,\vdots\, 3$$

$$x \leq -1 \Longleftrightarrow -3x+3 \geq 6 \Longrightarrow k \geq 6$$

Dacă $k \in \mathbb{Z}, k \geq 6, k \,\vdots\, 3$, atunci ecuația admite doar soluția $x=-\frac{k}{3}+1$ în mulțimea $(-\infty,-1] \cap \mathbb{Z}$. Altfel ecuația nu admite nici o soluție în mulțimea $(-\infty,-1] \cap \mathbb{Z}$.
.... **1p**

Studiem câte soluții admite ecuația în mulțimea $[3,+\infty) \cap \mathbb{Z}$ în funcție de k.

Dacă $x \in [3,+\infty) \cap \mathbb{Z}$, atunci $|x-3|+|x-1|+|x+1|=x-3+x-1+x+1=3x-3$.

$$3x-3=k \Longleftrightarrow 3x=k+3 \Longleftrightarrow x=\frac{k}{3}+1 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow k \,\vdots\, 3$$

$$x \geq 3 \Longleftrightarrow 3x-3 \geq 6 \Longrightarrow k \geq 6.$$

Dacă $k \in \mathbb{Z}, k \geq 6, k \,\vdots\, 3$, atunci ecuația admite doar soluția $x=\frac{k}{3}+1$ în mulțimea $[3,+\infty) \cap \mathbb{Z}$. Altfel ecuația nu admite nici o soluție în mulțimea $[3,+\infty) \cap \mathbb{Z}$.
.... **1p**

Determinăm, pentru ce $k \in \mathbb{Z}$ se obțin soluțiile $0,1$ și 2.

$$k=|0-3|+|0-1|+|0+1|=3+1+1=5 \in \mathbb{Z}$$

$$k=|1-3|+|1-1|+|1+1|=2+0+2=4 \in \mathbb{Z}$$

$$k=|2-3|+|2-1|+|2+1|=1+1+3=5 \in \mathbb{Z}$$

Dacă $k = 4$, atunci $x = 1$ este soluție, iar dacă $k = 5$, atunci $x = 0$ și $x = 2$ sunt soluții.
.... **1p**

În continuare distingem următoarele cazuri.

Dacă $k \in \mathbb{Z}, k < 4$, atunci ecuația nu admite nici o soluție întreagă.

Dacă $k \in \mathbb{Z}, k \geq 6, k \not\vdots\, 3$, atunci ecuația nu admite nici o soluție întreagă.

Dacă $k \in \mathbb{Z}, k \geq 6, k \,\vdots\, 3$, atunci ecuația admite exact două soluții întregi, acestea fiind $x = \pm\dfrac{k}{3} + 1$.

Dacă $k = 5$, atunci ecuația admite exact două soluții întregi, acestea fiind $x = 0$ și $x = 2$.

Dacă $k = 4$, atunci ecuația admite exact o soluție întreagă, aceasta fiind $x = 1$.

Prin urmare ecuația admite exact o soluție întreagă doar pentru $k = 4$.
.... **1p**

Problema 2. Arătați că numărul $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Nuț Daniel, Toplița

Soluție

Pentru $n = 0$ avem: $3 \cdot 5^1 + 2^1 = 17 \,\vdots\, 17$
.... **1p**

Presupunem că $\left(3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}\right) \vdots\, 17$, pentru $n = k \in \mathbb{N}$. Arătăm că $\left(3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1}\right) \vdots\, 17$.
.... **1p**

$\left(3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}\right) \vdots\, 17 \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ astfel încât $3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = m \cdot 17$

Prin urmare: $3 \cdot 5^{2k+1} = m \cdot 17 - 2^{3k+1}$.
.... **1p**

$$\begin{aligned}
3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} &= 5^2 \cdot 3 \cdot 5^{2k+1} + 2^3 \cdot 2^{3k+1} \\
&= 25 \cdot \left(m \cdot 17 - 2^{3k+1}\right) + 8 \cdot 2^{3k+1} \\
&= 25 \cdot m \cdot 17 - 2^{3k+1} \cdot (25 - 8) \\
&= 17 \cdot \left(25 \cdot m - 2^{3k+1}\right) \Longrightarrow \left(3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1}\right) \vdots\, 17
\end{aligned}$$

.... **3p**

Deci $(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) \,\vdots\, 17, \forall n \in \mathbb{N}$.
.... **1p**

Observație

Prezentăm o altă soluție. Pentru $n = 0$ afirmația e adevărată. Pentru $n \geq 1$ avem:

$$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 15 \cdot 25^n + 2 \cdot 8^n = 17 \cdot 25^n - 2 \cdot 25^n + 2 \cdot 8^n = 17 \cdot 25^n - 2 \cdot (25^n - 8^n)$$

$$= 17 \cdot 25^n - 2 \cdot (25 - 8) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 25^{n-1-k} \cdot 8^k = 17 \cdot \left(25^n - 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 25^{n-1-k} \cdot 8^k\right) \vdots\, 17$$

În penultimul pas s-a folosit formula: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Problema 3. Demonstrați că inegalitățile de mai jos sunt satisfăcute, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$:

a) $\dfrac{a}{a^2 + bc} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{bc}}$

b) $\dfrac{a}{a^2 + bc} \leq \dfrac{1}{4b} + \dfrac{1}{4c}$

c) $\dfrac{a}{a^2 + bc} + \dfrac{b}{b^2 + ca} + \dfrac{c}{c^2 + ab} \leq \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c}$

Mike Ildikó, Târgu Secuiesc

Soluție

a) Aplicăm inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică pentru numerele a^2 și bc. Obținem: $\dfrac{a^2 + bc}{2} \geq \sqrt{a^2bc} \Longleftrightarrow \dfrac{a}{a^2 + bc} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{bc}}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c > 0$

.... **2p**

b) Întâi arătăm că: $\dfrac{1}{2\sqrt{bc}} \leq \dfrac{1}{4b} + \dfrac{1}{4c}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{bc}} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2 = \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}, \forall b, c \in \mathbb{R}, b, c > 0$$

Prin urmare: $\dfrac{a}{a^2 + bc} \leq \dfrac{1}{4b} + \dfrac{1}{4c}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c > 0$.

.... **3p**

c) În mod similar pot fi obținute inegalitățile: $\dfrac{b}{b^2 + ca} \leq \dfrac{1}{4c} + \dfrac{1}{4a}$ și $\dfrac{c}{c^2 + ab} \leq \dfrac{1}{4a} + \dfrac{1}{4b}$.

Adunând parte cu parte aceste trei inegalități, obținem inegalitatea din enunț.

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c > 0.$$

.... **2p**

Problema 4. Pe laturile AB, BC, DE și EF ale hexagonului regulat $ABCDEF$ se consideră punctele M, N, P respectiv Q astfel încât $\dfrac{BM}{MA} = m, \dfrac{BN}{NC} = n, \dfrac{EP}{PD} = p, \dfrac{EQ}{QF} = q$.

a) Arătați că $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{BP} = \left(\dfrac{1}{1+p} - \dfrac{1}{1+m}\right)\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{BQ} = \left(\dfrac{1}{1+q} - \dfrac{1}{1+n}\right)\overrightarrow{BC}$.

b) Știind că $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{0}$, arătați că dreptele MP, NQ și CF sunt concurente.

Mátyás Mátyás, Sfântu Gheorghe

Soluție

a) $\dfrac{BM}{MA}=m \Longrightarrow \overrightarrow{EM}=\dfrac{\overrightarrow{EB}+m\overrightarrow{EA}}{1+m}=\dfrac{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{EA}}{1+m}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{1+m}+\overrightarrow{EA}$

$\dfrac{EP}{PD}=p \Longrightarrow \overrightarrow{BP}=\dfrac{\overrightarrow{BE}+p\overrightarrow{BD}}{1+p}=\dfrac{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+p\overrightarrow{BD}}{1+p}=\dfrac{\overrightarrow{DE}}{1+p}+\overrightarrow{BD}$

$ABCDEF$ fiind hexagon regulat, avem: $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{0}$ și $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}$.

Deci: $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{BP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{1+m}+\cancel{\overrightarrow{EA}}+\dfrac{\overrightarrow{DE}}{1+p}+\cancel{\overrightarrow{BD}}=-\dfrac{\overrightarrow{BA}}{1+m}+\dfrac{\overrightarrow{BA}}{1+p}=\left(\dfrac{1}{1+p}-\dfrac{1}{1+m}\right)\overrightarrow{BA}$.

.... **2p**

$\dfrac{BN}{NC}=n \Longrightarrow \overrightarrow{EN}=\dfrac{\overrightarrow{EB}+n\overrightarrow{EC}}{1+n}=\dfrac{\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+n\overrightarrow{EC}}{1+n}=\dfrac{\overrightarrow{CB}}{1+n}+\overrightarrow{EC}$

$\dfrac{EQ}{QF}=q \Longrightarrow \overrightarrow{BQ}=\dfrac{\overrightarrow{BE}+q\overrightarrow{BF}}{1+q}=\dfrac{\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+q\overrightarrow{BF}}{1+q}=\dfrac{\overrightarrow{FE}}{1+q}+\overrightarrow{BF}$

$ABCDEF$ fiind hexagon regulat, avem: $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{0}$ și $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC}$.

Deci: $\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{BQ}=\dfrac{\overrightarrow{CB}}{1+n}+\cancel{\overrightarrow{EC}}+\dfrac{\overrightarrow{FE}}{1+q}+\cancel{\overrightarrow{BF}}=-\dfrac{\overrightarrow{BC}}{1+n}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{1+q}=\left(\dfrac{1}{1+q}-\dfrac{1}{1+n}\right)\overrightarrow{BC}$.

.... **2p**

b) $\left(\dfrac{1}{1+p}-\dfrac{1}{1+m}\right)\overrightarrow{BA}+\left(\dfrac{1}{1+q}-\dfrac{1}{1+n}\right)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{0}$, de unde rezultă că: $\dfrac{1}{1+p}-\dfrac{1}{1+m}=0,\ \dfrac{1}{1+q}-\dfrac{1}{1+n}=0 \Longrightarrow m=p, n=q$

Prin urmare patrulaterele $BMEP$ și $BNEQ$ sunt paralelograme.

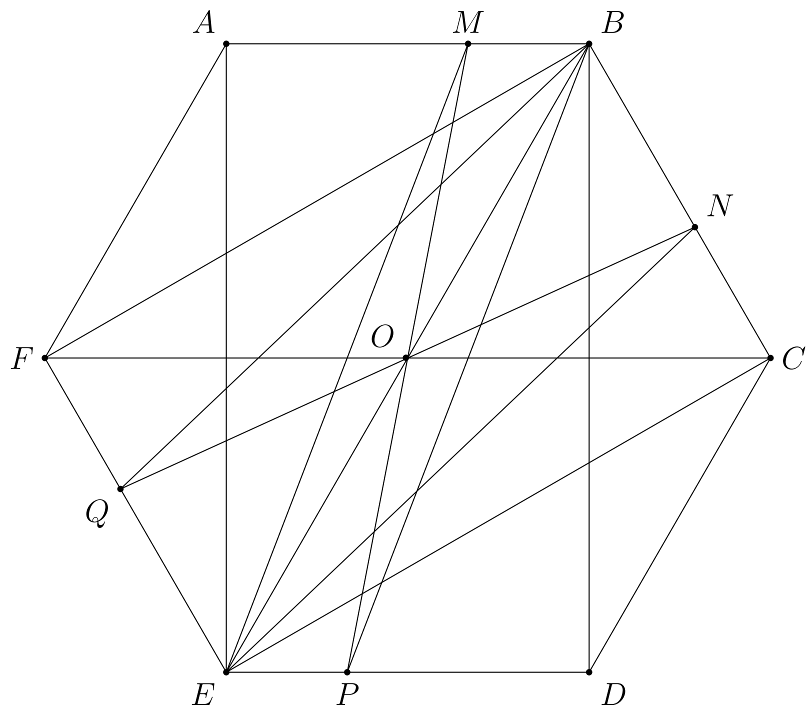
.... **2p**

Fie punctul O centrul cercului circumscris hexagonului regulat $ABCDEF$. Punctul O este mijlocul diagonalelor BE și CF.

În paralelogramele $BMEP$ și $BNEQ$ diagonalele se înjumătățesc. $\Longrightarrow O\in MP, O\in NQ$

Deci $MP\cap NQ\cap CF=\{O\}$ ceea ce era de demonstrat.

.... **1p**


A
M
B
N
O
F
C
Q
E
P
D