MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

A 74-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a XII-a
Soluții și bareme

Problema 1. Se consideră funcția

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1-[x]}{x+\{x\}+1}$$

.

Demonstrați că funcția f admite primitive și determinați primitivele sale.

Notație : $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a și $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a.

Soluție Deosebim următoarele cazuri:

cazul I: $x\in(-1,0)$ Avem $[x]=-1$ și $\{x\}=x-[x]=x+1$, deci $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

cazul II: $x\in[0,1)$ Avem $[x]=0$ și $\{x\}=x$, deci $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$

deci

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\in(-1,0),\\ \dfrac{1}{2x+1}, & x\in[0,1).\end{cases}$$

.... **2p**

- f este continuă pe $(-1,0)$ și $(0,1)$ pentru că este egal cu raportul a două funcții elementare, (1)
- Avem

$$\left.\begin{aligned} f(0-0)=\lim_{x\nearrow 0}f(x)=\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x+1}=1,\\ f(0)=\frac{1}{2\cdot 0+1}=1\\ f(0+0)=\lim_{x\searrow 0}f(x)=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2x+1}=1,\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Longrightarrow f(0-0)=f(0)=f(0+0) \qquad \Rightarrow f \text{ este continuă în } x=0 \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că f este continuă pe (-1,1), deci admite primitive.

.... **2p**

Fie $\quad F:(-1,1)\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\in(-1,0),\\ F_2(x), & x\in[0,1).\end{cases}$ primitivele funcției f, unde

$$F_1(x)=\int\frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x=\ln(x+1)+\varphi_1 \quad \text{pentru} \quad x\in(-1,0)$$

$$F_2(x)=\int\frac{1}{2x+1}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\ln(2x+1)+\varphi_2 \quad \text{pentru} \quad x\in[0,1)$$

Deci

$$F:(-1,1)\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}\ln(x+1)+\varphi_1, & x\in(-1,0),\\ \frac{1}{2}\cdot\ln(2x+1)+\varphi_2, & x\in[0,1).\end{cases}$$

.... **2p**

F trebuie să fie derivabilă pe $(-1,1)$ $\Rightarrow$ F trebuie să fie continuă pe $(-1,1)$, deci și în punctul $x=0\Rightarrow\varphi_1=\varphi_2=\varphi$ și atunci

$$F:(-1,1)\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}\ln(x+1)+\varphi, & x\in(-1,0),\\ \frac{1}{2}\cdot\ln(2x+1)+\varphi, & x\in[0,1).\end{cases}$$

F este derivabilă pe $(-1,0)$ și pe $(0,1)$

$F^{'}(x)=\dfrac{1}{x+1},\forall x,y\in(-1,0)$ și $F^{'}(x)=\dfrac{1}{2x+1},\forall x,y\in(0,1)$

$$\lim_{x\nearrow 0}F^{'}(x)=\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x+1}, \qquad \lim_{x\searrow 0}F^{'}(x)=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2x+1}\Rightarrow \text{F este derivabilă și în } x=0$$

.... **1p**

Problema 2. Pentru $x,y\in(1,2)$ fie $x*y=\dfrac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$.

a) Să se arate că $x*y$ are sens pentru orice $x,y\in(1,2)$ și că $x*y\in(1,2)$ pentru orice $x,y\in(1,2)$

b) Să se determine valoarea numărului real a astfel încât funcția $f:(0.+\infty)\to(1,2), f(x)=\dfrac{x+a}{x+1}$ să fie bijectivă și să satisfacă condiția $f(xy)=f(x)*f(y)$ pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$

Soluție

a) Din $x,y\in(1,2)$ rezultă $-\dfrac{1}{2}<x-\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{2}$ și $-\dfrac{1}{2}<y-\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{2}$,

adică $-\dfrac{1}{4}<(x-\dfrac{3}{2})(y-\dfrac{3}{2})<\dfrac{1}{4}$

$-\dfrac{1}{4}<(x-\dfrac{3}{2})(y-\dfrac{3}{2})<\dfrac{1}{4} \qquad |\cdot 2$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 2(x-\frac{3}{2})(y-\frac{3}{2}) < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2(x-\frac{3}{2})(y-\frac{3}{2}) + \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < 2xy - 3x - 3y + 5 < 1$

Deci numitorul fracției nu se anulează și este pozitivă.

.... **1p**

$$x * y \in (1,2) \Leftrightarrow 1 < \frac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5} < 2 \qquad | \cdot (2xy-3x-3y+5) > 0$$

$\Leftrightarrow 2xy - 3x - 3y + 5 < 3xy - 4x - 4y + 6 < 4xy - 6x - 6y + 10$

Prima inegalitate se scrie în forma $xy - x - y + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0$ ceea ce este adevărat pentru orice $x, y \in (1,2)$

.... **1p**

A doua inegalitate se scrie în forma $xy - 2x - 2y + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) > 0$ ceea ce este adevărat pentru orice $x, y \in (1,2)$

.... **1p**

b) $f : (0, +\infty \to (1,2), f(x) = \frac{x+a}{x+1}$ dacă este bine definită, atunci este derivabilă și $f^{'}(x) = \frac{1-a}{(x+1)^2}$

Dacă $a < 1$, atunci f este strict crescătoare

Dacă $a = 1$, atunci f este constantă

Dacă $a > 1$, atunci f este strict descrescătoare

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \qquad f \text{ este bijevtivă și } = (1,2)$$

implică $a = 2$. Deci $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

.... **2p**

Verificăm egalitatea $f(xy) = f(x) * f(y), \quad \forall x, y \in (0, +\infty)$

$f(xy) = \frac{xy+2}{xy+1}, \quad \forall x, y \in (0, +\infty)$

$$f(x) * f(y) = \frac{3f(x)f(y) - 4f(x) - 4f(y) + 6}{2f(x)f(y) - 3f(x) - 3f(y) + 5} = \frac{3\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{y+2}{y+1} - 4 \cdot \frac{x+2}{x+1} - 4 \cdot \frac{y+2}{y+1} + 6}{2 \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{y+2}{y+1} - 3 \cdot \frac{x+2}{x+1} - 3 \cdot \frac{y+2}{y+1} + 5} =$$

$$\frac{3(x+2)(y+2)-4(x+2)(y+1)-4(x+1)(y+2)+6(x+1)(y+1)}{2(x+2)(y+2)-3(x+2)(y+1)-3(x+1)(y+2)+5(x+1)(y+1)}=\frac{xy+2}{xy+1}, \quad \forall x,y\in(0,+\infty)$$

Deci $f(xy)=f(x)*f(y), \quad \forall x,y\in(0,+\infty)$

.... **2p**

Problema 3. Determinați funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, știind că admite o primitivă F astfel încât $x\cdot f(x)+F(x)=\dfrac{x+1}{x\cdot(1+xe^x)}$ pentru orice $x>0$ *GM 10/S:L23.277*

Soluție

F fiind primitiva lui f, $F^{'}(x)=f(x),\forall x>0$

Relația dată se poate scrie în forma $\big(xF(x)\big)'=\dfrac{x+1}{x(1+xe^x)}$

.... **2p**

Calculăm $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}\ \mathrm{d}x=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}\ \mathrm{d}x=$

$t=xe^x\Rightarrow dt=(e^x+xe^)dx=(x+1)e^x$

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\ \mathrm{d}t=\ln\mid t\mid-\ln\mid t+1\mid+\varphi=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+\varphi=\ln\frac{xe^x}{xe^x+1}+\varphi$$

.... **3p**

Deci $x\cdot F(x)=\ln\dfrac{x\cdot e^x}{xe^{x+1}+1}+k$ unde $k\in\mathbb{R}$, de unde obținem că $F(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln\dfrac{x\cdot e^x}{xe^x+1}+\dfrac{k}{x}$ .. **1p**

adică $f(x)=F^{'}(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln\dfrac{x\cdot e^x}{xe^x+1}+\dfrac{x+1}{x^2(xe^x+1)}-\dfrac{k}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ **1p**

Problema 4. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Notăm cu $Z(G)=\{g\in G\mid gx=xg,\forall x\in G\}$ centrul grupului G.

a) Să se arate că $(Z(G),\cdot)$ este subgrup al lui $(G,\cdot)$
b) Să se arate că dacă pentru un $x\in G$ avem $x^{12}\in Z(G)$ și $x^{21}\in Z(G)$, atunci $x^3\in Z(G)$
c) Să se arate că dacă $x^{2023}\in Z(G)$ și $x^{2025}\in Z(G)$, pentru orice $x\in G$, atunci $G,\cdot)$ este un grup comutativ.

Soluție

a) Fie e elementul neutru a lui G, $x\cdot e=e\cdot x$ pentru orice $x\in G$, deci $e\in Z(G)$ Rezultă că $Z(G)\neq\varnothing$ **1p**
Fie $g_1,g_2\in Z(G)$ două elemente arbitrare.

Rezultă că $g_1x = xg_1, \forall x \in G$ și $g_2x = xg_2, \forall x \in G \Rightarrow g_1g_2 = g_2g_1$

$(g_1g_2)x = g_1(g_2x) = g_1(xg_2) = (g_1x)g_2 = (xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$ pentru orice $x \in G$

Deci $g_1g_2 \in G$ (1) **1p**

Fie $g \in Z(G)$ din $gx = xg \Rightarrow g^{-1}(gx) = g^{-1}(xg) \Rightarrow x = (g^{-1}x)g \Rightarrow xg^{-1} = g^{-1}x$ oricare ar fi x din G.

Deci $g^{-1} \in Z(G)$ (2)

Din (1) și (2) rezultă că $(Z(G), \cdot) \leq (G, \cdot)$ **1p**

b) $3 = 12 \cdot (-5) + 21 \cdot 3 \Rightarrow x^2 = x^{21\cdot3+12\cdot(-5)} = x^{21\cdot3} \cdot \cdot x^{12\cdot(-5)} = (x^{21})^3 \cdot \left((x^{12})^5\right)^{-1} \in Z(G)$ pentru că $(Z(G), \cdot) \leq (G, \cdot)$

$x^{21} \in Z(G) \Rightarrow (x^{21})^3 \in Z(G)$

$x^{12} \in Z(G) \Rightarrow (x^{12})^5 \Rightarrow \left((x^{12})^5\right)^{-1} \in Z(G)$

.... **2p**

c) Deoarece 2023 și 2025 sunt prime între ele, există $k, l \in \mathbb{Z}$ asfel încât $2023k + 2025l = 1$

Fie $x \in G$ un element arbitrar. $x = x^{2023k+2025l=1} = (x^{2023})^k \cdot (x^{2025})^l \in Z(G)$ pentru că $(Z(G), \cdot) \leq (G, \cdot)$

Deci $xy = yx, \forall y \in G$. Rezultă că $(G, \cdot)$ este grup comutativ. **2p**