CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H2 – filiera teoeretică, profil real, specializarea științele naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Fie a și b două numere reale pozitive, astfel încât $a = b\left(9+4\sqrt{5}\right)$.

2p **a)** Arătați că $\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}\dfrac{a}{b} = 2$.

5p **b)** Determinați numerele a și b, știind că $\dfrac{1}{\log_a(2+\sqrt{5})} + \dfrac{1}{\log_b(2+\sqrt{5})} = 0$.

Subiectul 2

Fie numărul complex $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

4p **a)** Demonstraţi că numărul α este soluţie a ecuaţiei $x^{2024} + x + 1 = 0$.

3p **b)** Determinaţi cel mai mare număr natural n, mai mic decât 2024, pentru care $\alpha^n + \alpha^{n-2} = -1$.

Subiectul 3

7p Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2024]{m\left(m+3\right)x^2 + \left(m+3\right)x + 1}$ este corect definită.

Subiectul 4

7p Determinați numerele reale a și b pentru care funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = \begin{cases} x^2, & x \in \left(-\infty,-2\right] \\ ax+b, & x \in \left(-2,1\right) \\ -x^2+1, & x \in \left[1,+\infty\right) \end{cases}$

este bijectivă.