MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024-

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H1 - filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$.

3p **a)** Arătați că mulțimea numerelor întregi impare este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{Q}$, în raport cu legea dată.

4p **b)** Determinați valoarea expresiei $E = (-1)^{n^2+n} * (-1)^{n^2+n+1} * (-1)^{n^2+n+2} * \ldots * (-1)^{n^2+n+2024}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) x, y sunt numere întregi impare $\Rightarrow x = 2k+1$, $y = 2p+1$, cu $k, p \in \mathbb{Z}$	**1p**
$x * y = 2(kp + k + p) + 1$ este număr întreg impar, deci mulțimea numerelor întregi impare este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{Q}$, în raport cu legea dată.	**2p**
b) $n^2 + n = n(n+1)$ este număr par	**1p**
$x * (-1) = (-1) * x = -1$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$	**1p**
$E = 1 * (-1) * 1 * \ldots = -1$	**2p**

Enunț subiect 2:

Se consideră monoidul comutativ $(G, \circ)$, unde $G = (1, +\infty)$ și $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, pentru $\forall x, y \in G$.

3p **a)** Arătați că $(G, \circ)$ este grup abelian.

4p **b)** Determinați numerele reale a și b pentru care funcția $g : (0, +\infty) \to G$, $f(x) = \sqrt{ax + b}$ este izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, \circ)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Scrierea corectă a definiției elementului neutru și determinarea acestuia, $e = \sqrt{2}$	**1p**
Demonstrația faptului că $\forall x \in G$ este simetrizabil, cu $x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \in G$	**1p**
Justificarea structurii de grup abelian	**1p**
b) Scrierea condiției de morfism și obținerea relației $axy + b = a^2xy + x(ab - a) + y(ab - a) + b^2 - 2b + 2$ pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$	**1p**
Scrierea egalităților $a^2 = a$, $ab - a = 0$, $b^2 - 2b + 2 = b \Rightarrow a = 0$ și $b \in \{1; 2\}$ sau $a = 1$ și $b = 1$	**2p**
Alegerea corectă $a = 1$ și $b = 1$ și justificarea bijectivității funcției f	**1p**

Enunț subiect 3:

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

3p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă.

4p **b)** Determinați primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{\dfrac{f(x)}{e^x}}$, pentru care $G(2)=\dfrac{1}{2}\ln\left(4+2\sqrt{5}\right)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x)\,\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow F''(x)=f'(x)\,\forall x\in\mathbb{R}$	**1p**
$F''(x)=(x+1)^2 e^x \geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci F este convexă	**2p**
b) $\int g(x)dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]+C \Rightarrow$	**2p**
O primitivă a funcției g este $G(x)=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]+k$, cu $k\in\mathbb{R}$ și $G(2)=\dfrac{2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}+k$	**1p**
Egalitatea $G(2)=\frac{1}{2}\ln\left(4+2\sqrt{5}\right)$ devine $\dfrac{2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}+k=\frac{1}{2}\ln\left(4+2\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow k=\frac{\ln 2}{2}-\sqrt{5}$ Deci $G(x)=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]+\frac{\ln 2}{2}-\sqrt{5}$	**1p**

Enunț subiect 4:

Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_a(x)=\dfrac{1}{1+|x-a|}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Arătați că $\int_0^2 f_2(x)dx=\ln 3$.

4p **b)** Calculați $\int_0^2 f_a(x)dx$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $x\in[0,2]\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{3-x}$	**1p**
$\int_0^2 \dfrac{1}{3-x}dx=-\ln\|x-3\|\Big\|_0^2=\ln 3$	**2p**
b) Pentru $a\leq 0\Rightarrow \|x-a\|=x-a\Rightarrow \int_0^2\dfrac{1}{x+1-a}dx=\ln(x+1-a)\Big\|_0^2=\ln\dfrac{3-a}{1-a}$	**1p**
Pentru $a\geq 2\Rightarrow \|x-a\|=a-x\Rightarrow \int_0^2\dfrac{1}{1+a-x}dx=-\ln(1+a-x)\Big\|_0^2=\ln\dfrac{a+1}{a-1}$	**1p**
Pentru $a\in(0,2)\Rightarrow \int_0^2\dfrac{1}{1+\|x-a\|}dx=\int_0^a\dfrac{1}{1+a-x}dx+\int_2^2\dfrac{1}{1+x-a}dx=-\ln(1+a-x)\Big\|_0^a+\ln(1+x-a)\Big\|_a^2=$ $=\ln(1+a)(3-a)$	**2p**