CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Faza locală, 12 februarie 2024

Clasa a XII-a

H1- Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

1. Se consideră mulțimea $G = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | a^2 - 3b^2 = 1\}$ și operația $(a,b) * (c,d) = (ac + 3bd, ad + bc)$.
a) Să se arate că, pentru orice $(a,b), (c,d) \in G$, rezultă că $(a,b) * (c,d) \in G$;
b) Să se demonstreze că legea de compoziție "$*$" este comutativă și asociativă;
c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $(a, 15) \in G$.

2. Pe mulțimea $G = (1, \infty) \backslash \{2\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = (x-1)^{ln(y-1)} + 1$.
a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup abelian;
b) Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației $x \circ x \circ x = e^8 + 1$, unde e este baza logaritmului natural.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, x < 0 \\ e^x + 1, x \geq 0 \end{cases}$.
a) Să se arate că f admite primitive pe mulțimea numerelor reale;
b) Fie F primitiva lui f pe intervalul $(0, \infty)$ și $a_n = F(n+1) - F(n) - 1, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că a_n este o progresie geometrică;
c) Să se calculeze $\int x f(x^2) dx, x \in \mathbb{R}$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, x \leq 0 \\ ln(x+1), x > 0 \end{cases}$.
a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intevalul $(-\infty, 0)$;
b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x) dx$;
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.