CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

CLASA a IX-a
SECȚIUNEA H1 – filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Un primar a fost informat că, în medie, un locuitor din comuna lui a produs 300 kg de deşeuri în anul 2023 şi s-a hotărât să înceapă o campanie de sensibilizare cu privire la reciclarea deşeurilor. El speră ca, pe această cale, să reducă producţia de deşeuri cu 2% pe an, începând din 2024.

3p **a)** Care va fi cantitatea de deşeuri, în kg produsă de un locuitor în 2024? Dar în 2025?

4p **b)** Pentru orice număr natural *n* se notează cu d_n cantitatea de deşeuri, măsurată în kg din anul $2023+n$ (deci $d_0=300$). Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, exprimaţi d_{n+1} în funcţie de d_n şi determinaţi o formulă generală de calcul pentru d_n.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) În 2024 cantitatea de deşeuri va fi $300\cdot\left(1-\frac{2}{100}\right)=300\cdot 0,98=294$	**2p**
Analog, în 2025 cantitatea de deşeuri va fi $294\cdot 0,98=288,12$	**1p**
b) $d_{n+1}=d_n\cdot\left(1-\frac{2}{100}\right)=0,98\,d_n$	**2p**
Şirul $(d_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică având primul termen $d_0=300$ şi raţia 0,98. Prin urmare $d_n=300\cdot(0,98)^n$.	**2p**

Enunț subiect 2:

3p **a)** Demonstraţi că $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ oricare ar fi numărul natural $n>1$.

4p **b)** Determinaţi partea întreagă a numărului $S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2024^2}$.

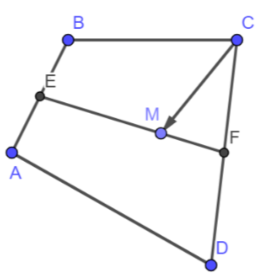
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $n(n-1)<n^2<n(n+1), \forall n\geq 1$	**1p**
$\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}, \forall n\geq 2$	**2p**
b) Scrierea inegalităților, pentru $n\in\{2,3,\ldots,2024\}$, conform punctului a) și obținerea relației $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2024\cdot 2025}<S<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{2024\cdot 2023}$	**1p**
$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \forall k=\overline{2,2024} \Rightarrow 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2025}<S<1+1-\frac{1}{2024}$	**2p**

$1+\frac{2023}{2\cdot 2025}<S<2-\frac{1}{2024}\Rightarrow [S]=1.$	**1p**

Enunț subiect 3:
Se consideră patrulaterul *ABCD* și punctele *E* și *F* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *CD*.

3p **a)** Arătați că $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

4p **b)** Dacă punctul M este situat pe segmentul EF, astfel încât $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$, determinaţi numerele reale *a*, *b*, *c* astfel încât $\overrightarrow{CM}=a\overrightarrow{BC}+b\overrightarrow{AD}+c\overrightarrow{AB}$.

Detalii rezolvare		**Barem asociat**
	**a)** $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}\right)$	**1p**
	$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$	**1p**
	$\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{EA}$ și finalizare $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.	**1p**
	b) $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$	**1p**
	$\overrightarrow{CM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$	**1p**
	$a=-\frac{2}{3};b=\frac{1}{3};c=-\frac{1}{2}.$	**1p**

Enunț subiect 4:

Se consideră mulțimea $A=\{1,2,...,2024\}$ și numerele $c=\min(A)$, iar $d=\max(A)$.

3p **a)** Într-un reper cartezian se dau punctele $P\left(n^2,c\right)$, $Q(c,d)$, $R(2n,d)$ și $S(d-1,c)$, cu $n\in A$. Determinați n pentru care $PQRS$ este un paralelogram.

4p **b)** Determinați toate perechile de numere (a,b), cu $a,b\in A$, $a<b$, astfel încât media geometrică a numerelor a și $\frac{1}{b}$ să fie egală cu 11.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $PQRS$ paralelogram $\Leftrightarrow n^2+2n=c+d-1$ și $c+d=d+c$	**1p**
$n^2+2n=2024\Rightarrow n(n+2)=44\cdot 46$ și, cum $n\in A$, se obține $n=44$.	**2p**
b) $\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}=11$	**1p**
$\Rightarrow a=11^2\cdot b$ și, cum $a,b\in A$, rezultă $b<a$, deci nu există perechi cu proprietatea cerută. Sau $a=11^2\cdot b\Rightarrow a\,\vdots\,11^2\Rightarrow (a,b)\in\left\{\left(11^2,1\right),\left(11^2\cdot 2,2\right),\left(11^2\cdot 3,3\right),...,\left(11^2\cdot 16,16\right)\right\}$, dar cum $a<b$, nu există nicio pereche cu proprietatea cerută.	**3p**