CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Faza locală, 12 februarie 2024

Clasa a XI-a

H2- Filiera teoretică-Profil real- Specializarea Științe ale naturii

1. Fie numerele reale a, b, c , funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x + 3$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{pmatrix}$.
   a) Arătați că det(A) = det(B) (3p)
   b) Arătați că pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate întregi, de pe graficul funcției f, aria triunghiului format de aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3. (4p)

2. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se rezolve ecuația det(A(x)) = 0 (3p)
   b) Determinați perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor 48. (4p)

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 1}{ax+b}, & pentru\ x < 0 \\ x^2 - x + 2, & pentru\ x \geq 0 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.
   Să se determine unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0\ sau\ b \neq 0$, astfel încât funcția f să fie continuă pe $\mathbb{R}$ (7p)

4. Să se determine asimptotele la graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției. (7p)