

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICA APLICATA ADOLF HAIMOVICI

ETAPA LOCALA , 12.10.2024

CLASA a XII-a

H2-Filiera teoretică-Profil real-Specializarea Științe ale naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ M(x) = I_2 + xA \mid x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\} \right\}$
 - a) Să demonstreze că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y + 4xy)$, $x, y \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$.
 - b) Să se arate că $G = \left\{ M(x) \mid x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\} \right\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.
 - c) Arătați că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(M(x)) = 4x + 1$ este un izomorfism de la (G, \cdot) la (\mathbb{R}^*, \cdot) .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$
 - a) Determinați elementul neutru al legii,
 - b) Arătați că $x \circ x \geq \frac{3}{2}, (\forall) x \in \mathbb{R}$,
 - c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2024 \text{ ori}} = 2$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)\ln x, & x \geq 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}, & x < 1 \end{cases}$
 - a) Arătați că f admite primitive pe \mathbb{R}
 - b) Calculați $\int_0^2 f(x) dx$.
4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e}$.
 - a) Demonstrați că $f(x) + f(1-x) = 1, (\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - b) Determinați primitiva F a funcției f care verifică $F(0) = 0$
 - c) Calculați $\int_0^1 f(x) \cdot \sin(\pi x) dx$.