CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Faza locală, 12 februarie 2024

Clasa a IX-a

H1- Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Subiectul 1 (7p)

Se consideră mulțimea $A = \{x^2 + y^2 \;/\; x, y \in Z\}$.

(2p) a) Arătați că $5 \in A$ și $13 \in A$.

(2p) b) Arătați că, pentru orice $n \in N$, numărul $a_n = (n+3)^2 - (n+1)^2$ este divizibil cu 4.

(3p) c) Demonstrați că dacă $p, q \in A$, atunci $p \cdot q \in A$.

Subiectul 2 (7p)

Fie raportul $F(x;y) = \frac{x^2 - y^2 - 2x - 2y}{x^2 - y^2}$.

(2p) a) Simplificați raportul.

(2p) b) Dacă $x - y - 4 = 0$, atunci aflați valoarea raportului.

(3p) c) Determinați mulțimea $A = \{x \in N \;/\; F(x;1) \in Z\}$.

Subiectul 3 (7p)

(2p) a) Se numerotează 10 cutii de la 1 la 10 și în fiecare cutie se așază un același număr de mere. După o oră, în fiecare cutie se mai pun câteva mere, după regula: în cutia cu numărul n se adaugă n mere. Dacă acum sunt în total 145 mere, calculați câte mere au fost la început în fiecare cutie.

(5p) b) Se știe că în progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt adevărate egalitățile:

$2a_1 + a_4 = 15$ și $2a_2 + a_3 = 18$. Calculați $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{21}$.

Subiectul 4 (7p)

(1p) a) Arătați că $f(f(f(x))) = f(x)$, $\forall\, x \in R$, unde $f: R \to R, f(x) = -x + 1$.

(6p) b) Rezolvați în $Z \times Z$ ecuația $xy + 2x + y = 1$ și stabiliți care dintre soluțiile ei aparțin graficului funcției $f: R \to R, f(x) = -x + 1$.

Notă: *Timp de lucru 3 ore*

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.