INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV — MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Faza locală, 12 februarie 2024

Clasa a XI-a

H2- Filiera teoretică-Profil real- Specializarea Științe ale naturii

Barem

1. Fie numerele reale a, b, c , funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x + 3$ și matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{pmatrix}.$$

   a) Arătați că det(A) = det(B) (3p)
   b) Arătați că pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate întregi, de pe graficul funcției f, aria triunghiului format de aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3. (4p)

a) $\det(B) = \det(B^t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3+2a+3 & b^3+2b+3 & c^3+2c+3 \end{vmatrix}$ 1p

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$ 1p

= det(A) + 0 + 0 = det(A). 1p

b) Fie $A(a; f(a)), B(b; f(b))$ și $C(c; f(c))$ trei puncte oarecare de pe graficul funcției f

$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|, unde\ \Delta = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix} = \det(B) = \det(A).\ A_{ABC} \in M_3 \Rightarrow \Delta \in M_6$ ... 1p

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$ 1p

Dintre numerele a, b, c , două au aceeași paritate , iar diferența lor este un număr par, deci det(A) este divizibil cu 2.

Dacă $a = 3k \Rightarrow f(a) = 3(9k^3 + 2k + 1)$, $dacă\ a = 3k + 1 \Rightarrow f(a) = 3(9k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$,

Dacă $a = 3k + 1 \Rightarrow f(a) = 3(9k^3 + 18k^2 + 14k + 5) \Rightarrow f(a), f(b), f(c) \in M_3 \Rightarrow \det(B) \in M_3. Deci\ \Delta \in M_6 \Rightarrow A_{ABC} \in M_3$ 1p

2. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

   a) Să se rezolve ecuația $det(A(x)) = 0$ (3p)

b) Determinați perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor 48. (4p)

a) $\det(A(x)) = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$ 2p

$x = -2$ și $x = 1$ 1p

b) $A(a)A(b) = \begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix}$ 1p

$S = 3(a+2)(b+2) => (a+2)(b+2) = 16$ 1p

$a, b \in \mathbb{N} => a+2 \geq 2$ și $b+2 \geq 2 => (a; b) = \{(0; 6), (2; 2), (6; 0)\}$ 2p

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 1}{ax+b}, & pentru\ x < 0 \\ x^2 - x + 2, & pentru\ x \geq 0 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Să se determine unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0$ *sau* $b \neq 0$, astfel încât funcția *f* să fie continuă pe $\mathbb{R}$ (7p)

$f(0) = f(0+0) = 2$ 1p

Dacă $a = 0$ și $b \neq 0 => f(0-0) = 0 => f$ *nu e continuă în* $x = 0$ 2p

Dacă $b = 0$ și $a \neq 0 => f(0-0) = \frac{\ln 3}{a}$ 2p

f *continuă pe* $\mathbb{R}$ *dacă* f *e continuă în* $x = 0 => f(0) = f(0+0) = f(0-0) =>$
$a = \frac{\ln 3}{2}$ 2p

4. Să se determine asimptotele la graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției. (7p)

$x^2 - 1 \geq 0 => D = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ 1p

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0 =>$
dreapta de ecuație $y = 0$ *este asimptotă orizontală către* $-\infty$ 2p

$\lim_{x \to -1, x < -1} f(x) = -1 => G_f$ *nu are asimptotă verticală în* $x = -1$ 1p

$\lim_{x \to 1, x > 1} f(x) = 1 => G_f$ *nu are asimptotă verticală în* $x = -1$ 1p

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty => G_f$ *nu are asimptotă orizontală către* ∞ 1p

Calculăm asssimptota oblică de forma $y = mx + n$, *unde*: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} =$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}{x} = 2$, *iar* $n = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$

Dreapta de ecuație $y = 2x$ *este asimptotă oblică către* ∞ 2p