CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H1-filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Enunț subiect 1:

Se consideră expresia $E(x)=(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)$, $x\in[0;\infty)$.

3p **a)** Demonstrați că $E(x)=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x\in[0;\infty)$.

4p **b)** Determinați câte numere naturale *n*, $n\le 2024$, au proprietatea $E(n)\in\mathbb{N}$.

Enunț subiect 2:

Se consideră mulțimile $A=\{1,2,...,2024\}$ și $B=\{1,2,...,23\}$.

3p **a)** Calculați numărul $n=3\cdot\log_{2024}2+\frac{1}{2}\cdot\log_{2024}121-\log_{2024}\frac{1}{23}$.

4p **b)** Determinați numărul perechilor de numere (b,c), cu $b\in B, c\in\mathbb{N}^*$, b și c numere prime, cu proprietatea $\log_a b=\frac{1}{c}, a\in A$.

Enunț subiect 3:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx-3$, unde $m\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f este bijectivă.

3p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(1)+f(2)+...+f(50)=4950$.

Enunț subiect 4:

Fie numerele complexe $z_1=\frac{19+7i}{9-i}$ și $z_2=\frac{20+5i}{7+6i}$.

3p **a)** Arătați că $z_2=\overline{z_1}$.

2p **b)** Arătați că z_1 și z_2 sunt soluțiile ecuației $z^2-4z+5=0$.

2p **c)** Dacă $S_n=z_1^n+z_2^n$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, arătați că $S_{n+2}=4\cdot S_{n+1}-5\cdot S_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.