CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024-

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H1 - filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră matricele $A(m)=\begin{pmatrix}5m+1 & -4\\ 1 & m\end{pmatrix}$, cu $m\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Calculați suma elementelor matricei $A(1)+A(2)+A(3)+...+A(100)$.

4p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(\log_2 x)\right)=22$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $A(1)+A(2)+A(3)+...+A(100)=\begin{pmatrix}5(1+2+3+...+100)+100 & -4\cdot 100\\ 100 & 1+2+3+...+100\end{pmatrix}$	**2p**
$=\begin{pmatrix}5\cdot 50\cdot 101+100 & -4\cdot 100\\ 100 & 50\cdot 101\end{pmatrix}$	**1p**
$S=30100$	**1p**
b) $\det\left(A(m)\right)=5m^2+m+4$	**1p**
$5m^2+m+4=22\Rightarrow m_1=-2,\ m_2=\dfrac{9}{5}$	**1p**
$x_1=\dfrac{1}{4}, x_2=2^{\frac{9}{5}}$ care convin	**2p**

Enunț subiect 2:

Se consideră determinantul $D(m)=\begin{vmatrix}m^3-2m^2+m & m^3+m^2 & (m^2-1)(m+1)\\ m^3-m^2 & m^3+2m^2+m & (m^2-1)(m-1)\\ (m^2-m)^2 & (m^2+m)^2 & (m^2-1)^2\end{vmatrix}$.

3p **a)** Calculați $D(2)$.

4p **b)** Arătați că $D(m)$ este multiplu de 9, pentru orice număr întreg m.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $D(2)=\begin{vmatrix}2 & 12 & 9\\ 4 & 18 & 3\\ 4 & 36 & 9\end{vmatrix}$	**1p**

$=2\cdot 6\cdot 3\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 6 & 3\end{vmatrix}$	**1p**
$=36\cdot 13=468$	**1p**
b) $D(m)=m^2(m-1)^2(m+1)^2\begin{vmatrix}m-1 & 1 & 2\\ m & 1 & -1\\ m(m-1) & 2m & (m-1)\end{vmatrix}=$	**2p**
$=m^2(m-1)^2(m+1)^2(3m^2+1)$	**1p**
$m(m-1)(m+1)\vdots 3\Rightarrow m^2(m-1)^2(m+1)^2\vdots 9$, deci $D(m)$ este multimplu de 9, $\forall m\in\mathbb{Z}$	**1p**

Enunț subiect 3:

7p Determinați asimptotele funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x+|x^2-4|}{|x-2|}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{-x+2}, x\in(-\infty,-2)\\ \dfrac{-x^2+3x+4}{-x+2}, x\in[-2,2)\\ \dfrac{x^2+3x-4}{x-2}, x\in(2,\infty)\end{cases}$	**2p**
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\Rightarrow$ funcția nu admite asimptote orizontale	**1p**
$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$; $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-4-x^2+2x}{-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-4}{-x+2}=-5$ $y=-x-5$ este ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$. $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-4-x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-4}{x-2}=5$ $y=x+5$ este ecuația asimptotei oblice spre ∞.	**1p** **1p**
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\dfrac{-4+6+4}{+0}=\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\dfrac{4+6-4}{+0}=\infty\Rightarrow$ $x=2$ este ecuația asimptotei verticale bilaterale.	**1p** **1p**

Enunț subiect 4:

2p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 mx}{x^2}$, pentru orice număr real nenul m.

5p **b)** Fie $\alpha=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ și $\beta=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)(1-\cos^3 x)}{\sin^6 x}$. Arătați că $3\alpha=2\beta$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 mx}{x^2}=m^2$	**2p**
b) $\alpha=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
$\beta=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)(1-\cos^3 x)}{\sin^6 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^3}{\sin^6 x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)=$ $=6\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right)^3=6\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right)^3=6\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3}{4}.$	**2p**
$3\alpha=2\beta\Leftrightarrow 3\cdot\dfrac{1}{2}=2\cdot\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ ceea ce este adevărat	**1p**