CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Faza locală, 12 februarie 2024

Clasa a XI-a

H1- Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Barem

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{Z}$.
   a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.(3p)
   b) Arătați că *X(a)* este matrice inversabilă, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.(4p)

   a) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + abA^2$ 1p
   $A^2 = A \cdot A = 3A \Rightarrow X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$ 2p
   b) *X(a)* este matrice inversabilă=> $\det(X(a)) \neq 0$ 1p

   $\det(X(a)) = \begin{vmatrix} 1+a & -a \\ -2a & 1+2a \end{vmatrix} = 1 + 3a$ 2p
   $1 + 3a \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{3}$ 1p

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(-2,-4), B(2,6) , C(0, -4) și D(x, 2)
   a) Aflați valorile numărului real x pentru care triunghiurile BAC și BAD au ariile egale. (4p)
   b) Aflați valoarea numărului real x pentru care punctele B, C și D sunt coliniare.(3p)

   a) $A_{BAC} = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2}|-4| = 2$ 1p
   $A_{BAD} = |5a + 4|$ 1p
   $a = -\frac{2}{5}$ $și\ a = -\frac{6}{5}$ 2p
   b) B, C și D coliniare => $\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = 0$ 1P
   $10x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$ 2p

3. Să se calculeze :
   a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2})$ (3p)
   b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x - 2^x}{\ln(x+1)}$ (4p)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}) + \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) =$ 1p

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = 0 - 0 = 0$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-2^x}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-1-2^x+1}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{5^x-1}{x}-\frac{2-1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}} =$ 2p

$= \frac{ln5-ln2}{1} = ln\frac{5}{2}$ 2p

4. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului a, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{2x+5}\right)^{x^2} = 0$ (7p)

Dacă $a \in (0;2) => \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{2x+5}\right)^{x^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\infty} = 0$ 1p

Dacă $a = 2 => \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{x^2} = 1^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+5}-1\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+5}\right)^{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-4}\cdot\frac{-4x^2}{2x+5}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2}{2x+5}} = e^{-\infty} = 0$...4p

Dacă $a \in (2;\infty) => \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{2x+5}\right)^{x^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\infty} = \infty$ 1p

Deci $a \in (0;2]$ 1p