

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –****CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H2 - filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii**

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1:

Se consideră grupul $(G, *)$, unde $G = (0, 2)$ și $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$, pentru orice $x, y \in G$.

4p a) Arătați că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$ este un izomorfism între grupurile $((0, \infty), \cdot)$ și $(G, *)$.

3p b) Determinați numărul natural n , pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{2}{3}\right) * f\left(\frac{3}{4}\right) * \dots * f\left(\frac{2023}{2024}\right) = 2 - \frac{2}{n+1}$.

Subiectul 2:

Se consideră legea de compoziție $x \circ y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$, unde $x, y \in [0, \infty)$.

4p a) Determinați numărul $x \in [0, \infty)$ pentru care $x \circ (x+1) \circ (x+2) = 1 + 3 \log_2 3$.

3p b) Arătați că, dacă $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \circ n \in \mathbb{N}$, atunci $m \cdot n = 0$.

Subiectul 3:

7p Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$.

Subiectul 4:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

4p a) Arătați că $\int_{-k}^k x^{2k+1} f(x) dx + \int_{e^k}^{e^{k+1}} f(\sqrt{\ln x}) dx$ nu depinde de k , pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

3p b) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{e^3} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x) dx \leq 1$.