CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H1 - filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră expresia $E(x)=(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)$, $x\in[0;\infty)$.

3p **a)** Demonstrați că $E(x)=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x\in[0;\infty)$.

4p **b)** Determinați câte numere naturale *n*, $n\le 2024$, au proprietatea $E(n)\in\mathbb{N}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $E(x)=(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)=(x-1)\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)=$	**2p**
$=\sqrt{x}-1-\sqrt[3]{x}+1=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$.	**1p**
b) $E(n)\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=p^6$	**2p**
Cum $3^6<2024<4^6\Rightarrow n\in\{0,1,2^6,3^6\}$, deci sunt 4 numere.	**2p**

Enunț subiect 2:

Se consideră mulțimile $A=\{1,2,...,2024\}$ și $B=\{1,2,...,23\}$.

3p **a)** Calculați numărul $n=3\cdot\log_{2024}2+\frac{1}{2}\cdot\log_{2024}121-\log_{2024}\frac{1}{23}$.

4p **b)** Determinați numărul perechilor de numere (b,c), cu $b\in B, c\in\mathbb{N}^*$, b și c numere prime, cu proprietatea $\log_a b=\frac{1}{c}, a\in A$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $n=3\cdot\log_{2024}2+\frac{1}{2}\cdot\log_{2024}121-\log_{2024}\frac{1}{23}=\log_{2024}8+\log_{2024}11+\log_{2024}23=$	**2p**
$\log_{2024}(8\cdot11\cdot23)=1$	**1p**
b) $\log_a b=\frac{1}{c}\Leftrightarrow\log_b a=c\Leftrightarrow a=b^c$	**1p**

Deoarece $b^c \le 2024 \Rightarrow b^c \in \{2^2, 2^3, 2^5, 2^7, 3^2, 3^3, 3^5, 5^2, 5^3, 7^2, 7^3, 11^2, 11^3, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2\}$	**2p**
Sunt 17 perechi $(b,c) \in \{(2,2),(2,3),\ldots,(23,2)\}$	**1p**

Enunț subiect 3:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx-3$, unde $m\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f este bijectivă.

3p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(1)+f(2)+\ldots+f(50)=4950$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $m=0$, atunci $f(x)=-3$ pentru $(\forall)x\in\mathbb{R}$, deci f nu este injectivă	**1p**
Pentru $m\in\mathbb{R}^*$, f este strict monotonă, deci injectivă $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$, deci f este surjectivă.	**2p**
Deci f este bijectivă pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$	**1p**
b) $S=\sum_{k=1}^{50} f(k)=\sum_{k=1}^{50}(mk-3)=m\sum_{k=1}^{50}k-150$	**1p**
$S=m\cdot\frac{50\cdot 51}{2}-150=1275m-150$	**1p**
$1275m-150=4950\Rightarrow m=4$	**1p**

Enunț subiect 4:

Fie numerele complexe $z_1=\frac{19+7i}{9-i}$ și $z_2=\frac{20+5i}{7+6i}$.

3p **a)** Arătați că $z_2=\overline{z_1}$.

2p **b)** Arătați că z_1 și z_2 sunt soluțiile ecuației $z^2-4z+5=0$.

2p **c)** Dacă $S_n=z_1^n+z_2^n$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, arătați că $S_{n+2}=4\cdot S_{n+1}-5\cdot S_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $z_1={}^{9+i)}\frac{19+7i}{9-i}=\frac{164+82i}{82}=2+i$, $z_2={}^{7-6i)}\frac{20+5i}{7+6i}=\frac{170-85i}{85}=2-i$, deci $z_2=\overline{z_1}$	**3p**
b) $S=z_1+z_2=4$ și $P=z_1\cdot z_2=5$, deci z_1 și z_2 sunt soluțiile ecuației $z^z-4z+5=0$	**2p**
c) $z_1^2=4z_1-5\,\vert\cdot z_1^n\Rightarrow z_1^{n+2}=4z_1^{n+1}-5z_1^n$ și, analog, $z_2^{n+2}=4z_2^{n+1}-5z_2^n$; adunând relațiile obținem $S_{n+2}=4\cdot S_{n+1}-5\cdot S_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$	**2p**