CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 -

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H2 - filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1:

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + ax - 2a}{x^2 - x}$, $a \in \mathbb{R}$, iar D este domeniul maxim de definiție al funcției f.

4p **a)** Pentru $a = 2$ determinați distanța dintre punctele în care asimptota oblică la graficul funcției intersectează axele de coordonate.

3p **b)** Determinați valorile parametrului real a pentru care graficul funcției are o singura asimptotă verticală.

Subiectul 2:

Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

3p **a)** Arătați că tr(AB) = tr(BA), unde tr(A) este urma matricei A.

4p **b)** Determinați toate perechile de numere reale (x, y), știind că $AB = \begin{pmatrix} x & 10 \\ 12 & y \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$.

Subiectul 3:

Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \\ \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y} \end{vmatrix}$, cu $x, y \in \mathbb{R}$.

4p **a)** Calculați $D\left(\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha\right)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

3p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sum_{k=1}^{2024} D(x, k) \geq 0$.

Subiectul 4:

7p Determinați $k \in \mathbb{Z}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left[\cos(4k+1)x\right]}{x^2}, x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x} - 1}{x}, x < 0 \end{cases}$ are limită în punctul $x = 0$.