

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Faza locală, 10 februarie 2024

Clasa a X-a

H1 – Filiera tehnologică - Toate profilurile și specializările

Problema 1

a) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care următorul logaritm este bine definit:

$$\log_{x-3}(x^2 - 5x + 6).$$

b) Fie $a = \log_{\frac{1}{2024}} 2024$ și $b = \log_{2024} \frac{1}{2024}$. Să se arate că $\frac{a^{2024} + b^{2024}}{(a \cdot b)^{2024}}$ este număr natural.

Problema 2

Să se calculeze media geometrică a numerelor a^2 și b^2 , unde

$$a = (\log_{2024} \frac{2}{1} + \log_{2024} \frac{3}{2} + \dots + \log_{2024} \frac{2024}{2023})^{\log_{2024} \frac{1}{2} + \log_{2024} \frac{2}{3} + \dots + \log_{2024} \frac{2023}{2024}}, \text{ iar}$$

$$b = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Problema 3

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ 3x + 1, & x > 2 \end{cases}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $g(x) = x + 1$. Să se determine valoarea expresiei $E = (g \circ f)(4) - (g \circ f)(1)$.

Problema 4

Fie numerele complexe $z_1 = 2 - 2i$ și $z_2 = 1 + i$.

Calculați $\frac{z_1 z_2}{z_1 - 2z_2}$; $|z_1| + |z_2|$; $(\frac{z_1 - \bar{z}_2}{\sqrt{2}})^{2024}$.

Notă:

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.