CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI"
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H2 - filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră grupul $(G,*)$, unde $G=(0,\ 2)$ și $x*y=\dfrac{xy}{xy-x-y+2}$, pentru orice $x,y\in G$.

4p **a)** Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to(0,2),\ f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ este un izomorfism între grupurile $((0,\infty),\cdot)$ și $(G,*)$.

3p **b)** Determinați numărul natural n, pentru care $f\left(\dfrac{1}{2}\right)*f\left(\dfrac{2}{3}\right)*f\left(\dfrac{3}{4}\right)*\ldots\ldots*f\left(\dfrac{2023}{2024}\right)=2-\dfrac{2}{n+1}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $f(x\cdot y)=\dfrac{2}{xy+1}$ și $f(x)*f(y)=\dfrac{f(x)\cdot f(y)}{f(x)\cdot f(y)-f(x)-f(y)+2}=\dfrac{\frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{y+1}}{\frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{y+1}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{y+1}+2}=\dfrac{4}{2+2xy}=\dfrac{2}{1+xy}$ $\Rightarrow f(xy)=f(x)*f(y),\ (\forall)x,y\in(0,\infty)$, deci *f* este morfism între grupurile $((0,\infty),\cdot)$ și $(G,*)$	**2p**
Demonstrația bijectivității lui f și concluzia f este izomorfism de grupuri	**2p**
b) $f\left(\frac{1}{2}\right)*f\left(\frac{2}{3}\right)*f\left(\frac{3}{4}\right)*\ldots\ldots*f\left(\frac{2023}{2024}\right)=f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{2023}{2024}\right)=f\left(\frac{1}{2024}\right)=\frac{2\cdot 2024}{2025}$	**2p**
$2-\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{2\cdot 2024}{2025}\Rightarrow n=2024$	**1p**

Enunț subiect 2:

Se consideră legea de compoziție $x\circ y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right)$, unde $x,y\in[0,\infty)$.

4p **a)** Determinați numărul $x\in[0,\infty)$ pentru care $x\circ(x+1)\circ(x+2)=1+3\log_2 3$.

3p **b)** Arătați că, dacă $m,n\in\mathbb{N}$ astfel încât $m\circ n\in\mathbb{N}$, atunci $m\cdot n=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $(x\circ y)\circ z=\left(\log_2\left(2^x+2^y-1\right)\right)\circ z=\log_2\left(2^x+2^y+2^z-2\right),\ (\forall)x,y,z\in[0,\infty)$	**1p**

Ecuația devine $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2=54 \Rightarrow 2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=56 \Rightarrow 2^x\cdot 7=56 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3$	**3p**
b) Dacă $m\circ n=p\Rightarrow \log_2\left(2^m+2^n-1\right)=p\Leftrightarrow 2^m+2^n-1=2^p$, cu $m,n,p\in\mathbb{N}$	**1p**
Caz 1. $m=0\Rightarrow 2^0+2^n-1=2^p\Rightarrow 2^n=2^p\Rightarrow n=p\Rightarrow m\cdot n=0$	**1p**
Caz 2. $m\geq 1$; dacă:(i) $n=0\Rightarrow m\cdot n=0$ (ii) $n\geq 1$, atunci $2^m+2^n-1\neq 2^p$ (un număr impar nu poate fi egal cu un număr par)	**1p**

Enunț subiect 3:

7p Calculați $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=I_1+I_2$	**2p**
$I_1=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{e^x+1}dx$; pentru $x=-t\Rightarrow$ $I_1=-\int_{1}^{0}\frac{t^2}{e^{-t}+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{t^2}{e^{-t}+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{x^2}{e^{-x}+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{x^2\cdot e^x}{e^x+1}dx$	**3p**
Atunci $I_1+I_2=\int_{0}^{1}\frac{x^2\cdot e^x}{e^x+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{x^2\cdot\left(e^x+1\right)}{e^x+1}dx=\int_{0}^{1}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^1=\frac{1}{3}$	**2p**

Enunț subiect 4:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=e^{-x^2}$.

4p **a)** Arătați că $\int_{-k}^{k}x^{2k+1}f(x)dx+\int_{e^k}^{e^{k+1}}f\left(\sqrt{\ln x}\right)dx$ nu depinde de k, pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

3p **b)** Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{e^3}\leq\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}f\left(x\right)dx\leq 1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Funcția $x\mapsto x^{2k+1}f(x)$ este impară pe intervalul $\left[-k,k\right]$, deci $\int_{-k}^{k}x^{2k+1}f(x)dx=0$	**2p**
$\int_{e^k}^{e^{k+1}}f\left(\sqrt{\ln x}\right)dx=\int_{e^k}^{e^{k+1}}e^{-\ln x}dx=\int_{e^k}^{e^{k+1}}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\|_{e^k}^{e^{k+1}}=1$, iar suma celor două integrale este 1 și nu depinde de k	**2p**
b) Pentru $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$, $\frac{1}{e^3}\leq f\left(x\right)\leq 1\Rightarrow$	**2p**
$\frac{2\sqrt{3}}{e^3}\leq\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}f\left(x\right)dx\leq 2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{1}{e^3}\leq\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}f\left(x\right)dx\leq 1$	**1p**