

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Faza locală, 10 februarie 2024

Clasa a X-a

H2 – Filiera teoretică - Profil real - Specializarea Științe ale naturii

Problema 1

Fie numărul $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$

- Verificați egalitatea $a^3 + 3a - 14 = 0$.
- Demonstrați ca numărul $x = \log_2(a^2 + 3) + \log_a\left(\frac{14}{a} - 3\right) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{a} - \log_2 7$ este natural.

Problema 2

Să se calculeze $\sqrt[3]{a^b - b^a}$, unde

$$a = \left(\log_{2024} \frac{2}{1} + \log_{2024} \frac{3}{2} + \dots + \log_{2024} \frac{2024}{2023}\right)^{\log_{2024} \frac{1}{2} + \log_{2024} \frac{2}{3} + \dots + \log_{2024} \frac{2023}{2024}}, \text{ iar}$$

$$b = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Problema 3

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

- Arătați ca funcția f este inversabilă.
- Determinați inversa funcției f și calculați $f^{-1}(-1)$.

Problema 4

Fie numerele complexe $z_1 = 3 - 4i$ și $z_2 = (2 - i)^3$. Să se calculeze $\operatorname{Re} \left[\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 - \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 \right]$.

Notă:

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.