CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –

CLASA a IX-a
SECȚIUNEA H2 – filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

O progresie aritmetică are primul termen $a_1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ și rația $r \in \mathbb{R}^*$.

3p Pentru $r = 2$ determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n = 5a_1$.

4p Determinați cea mai mică valoare naturală a rației pentru care progresia are cel puțin un termen număr natural prim.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $a_n = a_1 + (n-1)r$, $a_n = 2n+118$	**1p**
$a_n = 5a_1 \Rightarrow 600 = 2n+118 \Rightarrow n = 241$	**2p**
b) $a_n = 120 + (n-1)r$, iar $r \mid r(n-1)$ pentru orice $r \in \mathbb{N}^*$ Dacă $r \in \{2,3,4,5,6\} \Rightarrow r \mid 120$, atunci $r \mid a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și a_n nu este prim	**2p**
Pentu $r = 1$ rezultă $a_{12} = a_1 + 11r = 131$ care este număr prim	**2p**

Enunț subiect 2:

Se consideră mulțimea $A = \{2^p + p^3 \mid p \in \mathbb{N}\}$.

3p **a)** Arătați că $2024 \in A$.

4p **b)** Determinați numărul natural *p* cu proprietatea $\left[\dfrac{2^4\cdot 5^3}{2^p + p^3}\right] = 4$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x*.

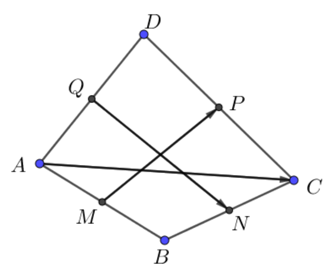
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Se observă că $2^{10} + 10^3 = 1024 + 1000 = 2024$	**3p**
b) $\dfrac{2000}{500} \le \dfrac{2000}{2^p + p^3} < \dfrac{2000}{400} \Rightarrow$	**2p**
$\Rightarrow 400 < 2^p + p^3 \le 500$	**1p**
Singurul număr de forma $2^p + p^3$ cuprins între 400 și 500 este 471 și se obține pentru $p = 7$	**1p**

Enunț subiect 3:

Fie patrulaterul $ABCD$ și M, N, P, Q, O mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA respectiv PM.

3p **a)** Arătați că O este mijlocul segmentului QN.

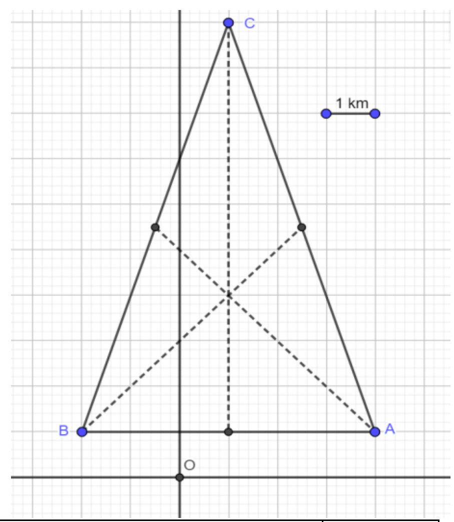
4p **b)** Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN} = a\overrightarrow{AC}$.

Detalii rezolvare		Barem asociat
	**a)** $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$	**2p**
	$\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{ON} \Rightarrow O$ este mijlocul segmentului QN.	**1p**
	b) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$	**1p**
	Cum $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = 2\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}\right)$ și $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$, obținem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$	**2p**
	$a\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow a = 1$	**1p**

Enunț subiect 4:

7p Pe un teren de antrenament pentru cicliști sunt construite pistele din figura alăturată, marcate cu linie continuă. Distanțele din schiță pot fi măsurate ținând cont de unitatea de măsură marcată, ce reprezintă 1 km pe teren.

Se intenționează construirea unor piste suplimentare, reprezentate în desen prin linii punctate. Aceste piste vor porni din punctele A, B și C către mijloacele pistelor BC, AC și respectiv AB. Două dintre aceste piste vor fi perpendiculare. Stabilește care vor fi acestea și justifică răspunsul dat.



Detalii rezolvare	Barem asociat
Considerăm că pistele care se intersectează în O reprezintă axele de coordonate ale unui reper cartezian. Coordonatele punctelor vor fi: $A(4;1)$, $B(-2;1)$ și $C(1;10)$	**1p**
Pistele punctate reprezintă medianele triunghiului ABC și se vor intersecta în punctul $G(1;4)$ centrul de greutate al ΔABC	**2p**
$AB = 6$ km, $AG = BG = 3\sqrt{2}$ km	**2p**
$AG^2 + BG^2 = AB^2$, deci triunghiul ABG este dreptunghic în G, deci pistele desenate punctat care pornesc din A și B vor fi perependiculare	**2p**