CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Faza locală, 12 februarie 2024

Clasa a XII-a

H1- Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acorda numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul I .

(2p) a) Verificarea relațiilor din mulțimea G pentru compunerea perechilor.

$(ac + 3bd)^2$-3$(ad + bc)^2 = 1$ și a,b,c,d∈ $\mathbb{Z}$

(2p) b) Verificarea proprietăților de comutativitate și asociativitate.

(3p) c) a=26 sau a=-26

Subiectul II.

(4p) a) Se verifica cele patru axiome ale grupului (Câte 1p pentru fiecare).

(3p) b) Se calculează $x \circ x \circ x = (x-1)^{ln^2(x-1)} + 1$ (2p)

$x = e^2 + 1 \in G$ (1p)

Subiectul III.

(2p) a) f continuă în 0, f continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$

(1p) b) $F(x) = e^x + x + C$, deci $a_n = e^{n+1} - e^n$, $a_{n-1} = e^n - e^{n-1}$, $a_{n+1} = e^{n+2} - e^{n+1}$

(1p) $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_n)^2$, deci a_n este progresie geometrică

(1p) c) Din $x^2 \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x^2) = e^{x^2} + 1$

(2p) $\int xf(x^2)dx = \int x\left(e^{x^2}+1\right)dx = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}+x^2\right)+C$

Subiectul IV.

(2p) a) Cum $F'(x) = f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 0)$, de unde f este strict crescătoare;

(1p) b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{x-1}dx + \int_{0}^{1} ln(x+1)dx$ =

(1p) = ln2

(1p) c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x^2}$ (teorema de existență a primitivei)

(2p) $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x+1)}{2x}$ =0 (regula lui L'Hospital).