CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 -

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H2 - filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + ax - 2a}{x^2 - x}$, $a \in \mathbb{R}$, iar D este domeniul maxim de definiție al funcției f.

4p **a)** Pentru $a = 2$ determinați distanța dintre punctele în care asimptota oblică la graficul funcției intersectează axele de coordonate.

3p **b)** Determinați valorile parametrului real a pentru care graficul funcției are o singura asimptotă verticală.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 4}{x^2 - x}$	**1p**
Dreapta d de ecuație $y = x + 1$ este asimptotă oblică la graficul funcției f	**1p**
$d \cap Ox = \{A(-1,0)\}$, $d \cap Oy = \{B(0,1)\}$	**1p**
$AB = \sqrt{2}$	**1p**
b) $x = 0$ soluția ecuației $x^3 + ax - 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ și dreapta de ecuație $x = 1$ este singura asimptotă verticală	**1p**
$x = 1$ soluția ecuației $x^3 + ax - 2a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x}$ și dreapta de ecuație $x = 0$ este singura asimptotă verticală	**1p**
Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ funcția are 2 asimptote verticale cu ecuațiile $x = 0$ și $x = 1$, deci $a \in \{0,1\}$	**1p**

Enunț subiect 2:

Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

3p **a)** Arătați că tr(AB) = tr(BA), unde tr(A) este urma matricei A.

4p **b)** Determinați toate perechile de numere reale (x, y), știind că $AB = \begin{pmatrix} x & 10 \\ 12 & y \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + ct & bz + dt \end{pmatrix}$	**2p**
$\mathrm{tr}(A) = ax + bz + cy + dt$, $\mathrm{tr}(B) = ax + cy + bz + dt \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$	**1p**

b) Conform punctului a), $x+y=30$ și, din $\det(AB)=\det(BA) \Rightarrow xy=200$	**2p**
Deci perechile sunt $(10,20)$ și $(20,10)$	**2p**

Enunț subiect 3:

Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}\sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\\ \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y}\end{vmatrix}$, cu $x,y\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Calculați $D\left(\sin^2\alpha,\cos^2\alpha\right)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

3p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sum_{k=1}^{2024} D(x,k)\geq 0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $D(x,y)=\begin{vmatrix}\sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\\ \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y}\end{vmatrix}=2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\begin{vmatrix}1 & \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\\ 1 & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}\\ 1 & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y}\end{vmatrix}$	**1p**
$D(x,y)=2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\begin{vmatrix}0 & \sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{x}\\ 0 & \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\\ 1 & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{y}\end{vmatrix}=2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left[-\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2-\sqrt[3]{xy}\right]$ $=-2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x}^2-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}^2\right)=-2(x+y)$	**2p**
$D\left(\sin^2\alpha,\cos^2\alpha\right)=-2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=-2\cdot 1=-2$.	**1p**
b) $\sum_{k=1}^{2024} D(x,k)=D(x,1)+D(x,2)+D(x,3)+\ldots+D(x,2024)=$ $=-2\left[(x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots+(x+2024)\right]$	**1p**
$\sum_{k=1}^{2024} D(x,k)=-2\left[2024x+\frac{2024\cdot 2025}{2}\right]$	**1p**
Inecuația devine: $-2\left[2024x+\frac{2024\cdot 2025}{2}\right]\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\frac{2025}{2} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{2025}{2}\right]$	**1p**

Enunț subiect 4:

7p Determinați $k\in\mathbb{Z}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left[\cos(4k+1)x\right]}{x^2}, & x>0\\ \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}, & x<0\end{cases}$ are limită în punctul $x=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1-x-1}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\frac{1}{2}$	**2p**
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln\left[\cos(4k+1)x\right]}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\left[1+\left(\cos(4k+1)x-1\right)\right]}{x^2}=$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\left[1+\left(-2\sin^2\frac{(4k+1)x}{2}\right)\right]}{-2\sin^2\frac{(4k+1)x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{(4k+1)x}{2}}{\frac{(4k+1)^2x^2}{4}}\cdot\frac{(4k+1)^2}{4}=-2\cdot\frac{(4k+1)^2}{4}=-\frac{(4k+1)^2}{2}$	**3p**
f are limită în $x=0$ dacă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{(4k+1)^2}{2}\Leftrightarrow 4k+1=\pm 1$ și, cum $k\in\mathbb{Z}$, se obține $k=0$	**2p**