



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

**Secțiunea H2 - clasele IX-XII, filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii
ETAPA LOCALĂ – 9 FEBRUARIE 2024**

CLASA A XI-A

Barem de corectare și notare

1. Să se determine parametrii reali $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie îndeplinită egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - ax^2 - bx - c) = 0.$$

Barem de corectare și notare

Dacă $a \neq 1 \Rightarrow$ limita este $\pm\infty$, deci nu convine, rezultă $a = 1$ 2p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - x^2 - bx - c) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1-b)x^3 - (2c + b^2)x^2 - 2bcx - c^2}{\sqrt{x^4 + 2x^3} + x^2 + bx + c} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2(1-b) - \frac{b^2 + 2c}{x} - \frac{2bc}{x^2} - \frac{c^2}{x^3} \right)}{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)} = \begin{cases} +\infty, \text{ pentru } b < 1 \\ -\infty, \text{ pentru } b > 1 \\ -\frac{2c+1}{2}, \text{ pentru } b = 1 \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

Deci pentru $b \neq 1$, limita este $\pm\infty$, ceea ce nu convine, rezultă $b = 1$

$$-\frac{2c+1}{2} = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

2. Fie o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+y) = f(x) + f(y)$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că f este impară;

b) Demonstrați că dacă f este strict crescătoare pe \mathbb{R} , atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Barem de corectare și notare

a) Pentru $x=y=0$ obținem $f(0) = 0$ 1p

$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă f impară.....1p



b) Se demonstrează prin inducție că $f(nx) = nf(x) \forall n \in \mathbb{N}$ și $\forall x \in \mathbb{R}$1p

Din f impară se deduce că relația de mai sus este adevărată pentru n întreg.....1p

f este crescătoare pe \mathbb{R} și $x \geq [x] \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq f([x]) = [x] \cdot f(1) \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

$f(1) > f(0) = 0$1p

Trecând la limită în inegalitatea de mai sus, se obține cerința.....1p

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2023^x & (\ln 2)^x & 2024^x \\ 2024^x & 2023^x & (\ln 2)^x \\ (\ln 2)^x & 2024^x & 2023^x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

Să se arate că matricea A nu este inversabilă dacă și numai dacă $x=0$.

Barem de corectare și notare

Pentru $x=0$, determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este nul, de unde rezultă că matricea A nu este inversabilă.....1p

Dacă matricea A nu este inversabilă, atunci determinantul matricei A este 0.....1p

Fie matricea $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Calculând determinantul matricei B, se obține:

$\det B =$

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (c - b)^2]$$

.....2p

Observăm că dacă $a + b + c \neq 0$, atunci $\det B = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + (c - b)^2 = 0$, de unde rezultă $a=b=c$ (1).....2p

Considerând $a = 2023^x$, $b = (\ln 2)^x$, $c = 2024^x$, avem $B=A$, de unde rezultă că $\det B = \det A$.

Condiția $2023^x + (\ln 2)^x + 2024^x \neq 0$ și observația (1) conduc la $2023^x = (\ln 2)^x = 2024^x$, de unde rezultă $x=0$1p



4. Într-un parc, un porumbel zboară dintr-un copac situat într-un punct A(1,3) în alt copac situat în punctul B(-1,9), pe drumul cel mai scurt.

a) Stabiliți dacă porumbelul, în zborul său, întâlnește un stâlp de iluminat public situat în punctul $C(\frac{1}{3}, 5)$.

b) Scrieți ecuația dreptei pe care se deplasează porumbelul.

Barem de corectare și notare

a) Se verifică dacă punctele A, B și C sunt coliniare.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ 1/3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots 2p$$

Se verifică dacă stâlpul C este situat între copacul A și copacul B ($AC+CB=AB$)2p

În concluzie, porumbelul, în zborul său, întâlnește stâlpul de iluminat public.

b) (AB): $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 6 = 0, \dots\dots\dots 3p$

Notă: Se punctează orice rezolvare corectă, diferită de cea din barem.