



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”  
ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024  
CLASA A IX-A  
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările**

- Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = 4n - 1$ . Arătați că  $2023^3$  este termen al șirului dat.
  - Într-o progresie geometrică se cunosc:  
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2024} = 2$  și  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2024}} = 1$ .  
Să se calculeze produsul  $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2024}$ .
- Un muncitor și-a propus să realizeze 47 de piese în 4 zile. El dorește să realizeze în fiecare zi mai multe piese decât în ziua precedentă și numărul pieselor realizate în a patra zi să fie de două ori mai mare decât numărul pieselor realizate în prima zi.
  - Poate realiza 7 piese în prima zi ?
  - Câte piese ar trebui să realizeze în fiecare zi ? Aflați toate soluțiile posibile.
- Să se arate că punctele  $H, A, I$  sunt coliniare dacă și numai dacă există trei numere  $m, o, v$  – cel puțin unul nenul astfel încât  $m \cdot \overrightarrow{PH} + o \cdot \overrightarrow{PA} + v \cdot \overrightarrow{PI} = \vec{0}$ , unde  $P$  este un punct în plan.
- Fie paralelogramul  $ABCD$  și punctele  $M \in AB, N \in BC, P \in CD, Q \in AD$  astfel încât  $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = a$ . Arătați că  $MNPQ$  este paralelogram.

**Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”  
ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024  
CLASA A X-A  
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările**

1.

- a) Arătați că numerele  $a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}}$  și  $b = \frac{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}} + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}$  sunt naturale.
- b) Determinați numărul real  $m$  astfel încât numărul  $z = \frac{2+mi}{2-m-i}$  să fie real.

2. Determinați valorile reale ale lui  $x$  astfel încât expresia  $E(x) = \log_{5-2x}(x^2 - 3x + 2)$  să fie bine definită.

3. Se consideră ecuația  $z^2 - 2z + 2 = 0$ , cu soluțiile complexe  $z$  și  $z_2$ .

- a) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.
- b) Calculați  $z_1^2 + z_2^2$ .
- c) Demonstrați că  $z_1^{2024}$  și  $z_2^{2024}$  sunt numere reale.

4. Arătați că  $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3^2}} \cdot 4^{\frac{1}{3^3}} \cdot \dots \cdot 4^{\frac{1}{3^n}} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”  
ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024  
CLASA A XI-A  
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  și punctele  $A(-1,1)$ ,  $B(3,-3)$ ,  $C(4;-1)$ . Dacă punctul  $D(x,y)$  se situează pe graficul funcției  $f$ , determinați:
  - a) elementele mulțimii:  $M = \{D \in G_f \mid A, B, D \text{ --- coliniare}\}$ ;
  - b) coordonatele punctului  $D$  pentru care aria  $\triangle DBC$  este minimă.
2. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{2^x + 3^x}{2}} \right)^{\frac{1}{x}}$
3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \cos x$ 
  - a) Să se calculeze  $f(0)$  și  $f(\pi)$
  - b) Să se arate că  $f(x) \geq x - 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
  - c) Să se identifice un  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(a) = a - 1$  și să se calculeze limita funcției  $f$  la  $+\infty$ .
4. Un porumbel își ia zborul dintr-un copac situat într-un punct  $A(1,3)$  direct spre un alt copac situat în punctul  $B(-1,9)$ .
  - a) Stabiliți dacă porumbelul, în zborul său, întâlnește un stâlp de telegraf situat în punctul  $C(\frac{1}{3}, 5)$ .
  - b) Scrieți ecuația dreptei pe care se deplasează porumbelul.

**Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 9 FEBRUARIE 2024

CLASA A XII-A

Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{A^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ .
- a) (3p) Calculați  $A^{2024}$ .
- b) (4p) Arătați că  $(G, \cdot)$  este grup abelian.
2. Pe  $\mathbb{R}$  definim legea de compoziție „ $*$ ” dată prin  $x * y = \sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 - x^3 - y^3 + 2}$  ( $\forall x, y \in \mathbb{R}$ )
- a) (2p) Determinați suma cuburilor rădăcinilor ecuației
- $$1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{2^{2024}} = x^5 - 3x^3 + 2x + 1$$
- b) (3p) Să se demonstreze că funcția  $f: (\mathbb{R}, *) \rightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$  dată prin
- $$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$
- realizează izomorfism de grupuri
- c) (2p) Calculați  $\sqrt[3]{2^3 + 1} * \sqrt[3]{3^3 + 1} * \dots * \sqrt[3]{2024^3 + 1}$
3. Pentru optimizarea analizorului de gaze care măsoară cantitatea  $x$  de emisii ale motorului autovehiculelor rutiere, s-a stabilit relația matematică dată de funcția  $f: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  care admite o primitivă  $F$  cu proprietatea că
- $$e^x \cdot F(x) = f(x), (\forall) x \geq 0 \text{ și } f(0) = e.$$
- a) (3p) Arătați că  $f(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$
- b) (4p) Să se determine funcția  $f(x)$  pentru a putea calibra analizorul de gaze.
4. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  și  $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \ln \sqrt{x+1}$ .
- a) (3p) Arătați că funcția  $g$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- b) (4p) Calculați  $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$ .

**Notă:**

Timpul de lucru este de 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.