**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ**
**„ADOLF HAIMOVICI”**
**ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024**
**CLASA A IX-A**
**Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările**

**Barem de corectare și notare:**

1) a) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1,} a_n = 4n - 1$. Arătați că $2023^3$ este termen al șirului dat.

$4n - 1 = 2023^3 \Rightarrow 4n = 2023^3 + 1 = (2023+1)(2023^2 - 2023 + 1)$......................1p
$2024k = M_4$..........................................................................................................1p

b) Într-o progresie geometrică se cunosc:
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2024} = 2$ și $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2024}} = 1.$

Să se calculeze produsul $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2024}$.

$a_1(1 + q + \cdots + q^{2023}) = 2 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{q^{2024}-1}{q-1} = 2$..........................................1p
$\frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^{2023}}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a_1} \cdot \frac{q^{2024}-1}{(q-1)\cdot q^{2023}} = 1$........................................1p
$a_1^2 \cdot q^{2023} = 2$....................................................................................1p
$P = a_1^{2024} \cdot q^{1+2+\cdots+2-2023} = a_1^{2024} \cdot q^{\frac{2023\cdot 2024}{2}}$..............................................1p
P=$2^{1012}$......................................................................................1p

2) Un muncitor și-a propus să realizeze 47 de piese în 4 zile. El dorește să realizeze în fiecare zi mai multe piese decât în ziua precedent și numărul pieselor realizate în a patra zi să fie de două ori mai mare decât numărul pieselor realizate în prima zi.

a) Poate realiza 7 piese în prima zi ?
b) Câte piese ar trebui sa realizeze în fiecare zi ? Aflați toate soluțiile posibile.

a. Dacă ar realiza în prima zi 7 piese, numărul maxim este:
7 +12 +13 +14 = 46 <47, deci nu poate realiza 7 piese în prima zi……..……….2p
b. Dacă ar realiza în prima zi 9 piese (sau mai multe), numărul mimin este
9 +10 +11+18 = 48 > 47,....................................................................... 1p
Muncitorul trebuie să realizeze 8 piese în prima zi şi 16 în ultima.....................1p
Pentru celelelte două zile rămân 23 de piese....................................................1p
Soluţiile sunt 8,9,14,16 sau 8,10,13,16 sau 8,11,12,16… .................................. 2p

3) Să se arate că punctele $H, A, I$ sunt coliniare dacă și numai dacă există trei numere $m, o, v$ – cel puțin unul nenul astfel încât $m \cdot \overrightarrow{PH} + o \cdot \overrightarrow{PA} + v \cdot \overrightarrow{PI} = \vec{0}$, unde $P$ este un punct în plan.

Punctele $H, A, I$ $sunt\ coliniare \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathcal{R}^*\ astfel$ încât $\overrightarrow{HA} = k \cdot \overrightarrow{HI}$ ..... 1p

$\overrightarrow{HA} = k \cdot \overrightarrow{HI} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PH} = k \cdot \left(\overrightarrow{PI} - \overrightarrow{PH}\right)$ ............................................. 2p

$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PH} = k \cdot \overrightarrow{PI} - k \cdot \overrightarrow{PH} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PH} - k \cdot \overrightarrow{PI} + k \cdot \overrightarrow{PH} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PH}(k-1) + \overrightarrow{PA} - k \cdot \overrightarrow{PI} = \vec{0}$ ........................................................................... 2p

Luăm $m = k - 1, o = 1$ $și$ $v = -k \Rightarrow m \cdot \overrightarrow{PH} + o \cdot \overrightarrow{PA} + v \cdot \overrightarrow{PI} = \vec{0}$ ......... 2p

4) Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in AB, N \in BC, P \in CD, Q \in AD$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = a$. Arătați că $MNPQ$ este paralelogram.

$ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow AD \parallel BC,\ AD = BC \ \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}$ ........................................................................... 2p

$\frac{AM}{MB} = a$ deducem relația vectorială $\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + a \cdot \overrightarrow{r_B}}{1+a}$, $\frac{BN}{NC} = a$ deducem relația vectorială $\overrightarrow{r_N} = \frac{\overrightarrow{r_B} + a \cdot \overrightarrow{r_C}}{1+a}$, $\frac{CP}{PD} = a$ deducem relația vectorială $\overrightarrow{r_P} = \frac{\overrightarrow{r_C} + a \cdot \overrightarrow{r_D}}{1+a}$, $\frac{DQ}{QA} = a$ deducem relația vectorială $\overrightarrow{r_Q} = \frac{\overrightarrow{r_D} + a \cdot \overrightarrow{r_A}}{1+a}$ ....................................... 2p

$\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_P} = \frac{\overrightarrow{r_A} + a \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + a \cdot \overrightarrow{r_D}}{1+a} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} + a \cdot (\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D})}{1+a}$ ............................................ 1p

$\overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_Q} = \frac{\overrightarrow{r_B} + a \cdot \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} + a \cdot \overrightarrow{r_A}}{1+a} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D} + a \cdot (\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C})}{1+a} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} + a \cdot (\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D})}{1+a}$ .................... 1p

Rezultă $\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_Q} \ \Longrightarrow MNPQ$ paralelogram ................................. 1p

**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ**
**„ADOLF HAIMOVICI”**
**ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024**
**CLASA A X-A**
**Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările**

**Subiectul I**

a) Arătați că numerele $a = log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}}$ și $b = \frac{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}} + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}$ sunt naturale.

b) Determinați numărul real $m$ asfel încât numărul $z = \frac{2+mi}{2-m-i}$ să fie real.

**Soluție:**

a) $a = log_{3^{\frac{1}{2}}} \frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}} = 2log_3 \frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - log_3 \frac{3}{5+2\sqrt{6}} =$............................................1p

$= log_3 \frac{81}{5+2\sqrt{6}} \cdot \frac{5+2\sqrt{6}}{3} = 3 \in \mathbb{N}$....................................................................................1p

$b = \left(\sqrt{2024}+\sqrt{2023}\right)^2 + \left(\sqrt{2024}-\sqrt{2023}\right)^2 =$........................................................1p

$= 2024 + 2 \cdot \sqrt{2024} \cdot \sqrt{2023} + 2023 + 2024 - 2 \cdot \sqrt{2024} \cdot \sqrt{2023} + 2023 = 2 \cdot 2024 + 2 \cdot 2023 \in \mathbb{N}$..........................................................................................................................1p

b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.............................................................................................................1p

$\frac{2+mi}{2-m-i} = \frac{2-mi}{2-m+i} \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 2 = 0$.......................................................................1p

$m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$...........................................................................................................1p

**Subiectul II**

Determinați numărul real *x* astfel încât expresia $E(x) = log_{5-2x}(x^2 - 3x + 2)$ să fie bine definită.

**Soluție:**

$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 5 - 2x > 0 \\ 5 - 2x \neq 1 \end{cases}$ ...........................................................................................................
.......................................3p

$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \\ x \neq 2 \end{cases}$ ...........................................................................................................
......................................3p

Finalizare: $x \in (-\infty, 1) \cup$
$\left(2, \frac{5}{2}\right)$……………………………………………………………………………………………1
p

**Subiectul III**

Se consideră ecuația $z^2 - 2z + 2 = 0$, cu soluțiile complexe $z$ și $z_2$.

a) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.

b) Calculați $z_1^{10} + z_2^{10}$.

c) Demonstrați că $z_1^{2024}$ și $z_2^{2024}$ sunt numere reale.

**Soluție:**

a) $\Delta = -4$

$x_{1,2} = 1 \pm i$……………………………………………………………………………………2p

b) $x_1^{10} + x_2^{10} = (1+i)^{10} + (1-i)^{10} = [(1+i)^2]^5 + [(1-i)^2]^5 = (2i)^5 + (-2i)^5 = 0$……….3p

c) $z_1^{2024} = [(1+i)^2]^{1012} = (2i)^{1012} = 2^{1012} \in \mathbb{R}$.

$z_2^{2024} = [(1-i)^2]^{1012} = (-2i)^{1012} = 2^{1012} \in \mathbb{R}$……………………………………………2p

**Subiectul IV**

Arătați că $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3^2}} \cdot 4^{\frac{1}{3^3}} \cdot \ldots \cdot 4^{\frac{1}{3^n}} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**Soluție:**

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3^2}} \cdot 4^{\frac{1}{3^3}} \cdot \ldots \cdot 4^{\frac{1}{3^n}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}} =$……………………………………………………2p

$= 4^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}} =$……………………………………………………………………………………2p

$= 4^{\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} < 4^{\frac{1}{2}} = 2$……………………………………………………………………………3p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ**
**„ADOLF HAIMOVICI”**
**ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024**
**CLASA A XI-A**
**Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările**

1.a) $D \in G_f \Rightarrow y = x^2 - 4x + 2$ ........................................................ 1p

Elementele mulțimii *M* sunt punctele de intersecție ale dreptei *AB* cu $G_f$.

Ecuația dreptei AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$, iar coordonatele lui D sunt soluțiile sistemului:

$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 2 \end{cases}$ ........................................................2p

Găsim $M=\{D_1(2,-2);\ D_2(1,-1)\}$; ........................................................1p

b) Avem $A_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}|\triangle|$

unde $\triangle = \begin{vmatrix} x & x^2 - 4x + 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 > 0$ ......................2p

Deci $A_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1 \geq 1$ cu valoarea minimă egală cu 1 obținută pentru *x*=3, de unde *D*(3, -1) ........................................................1p

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{2^x+3^x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}} = e^u$ , unde $u = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{2^x+3^x}{2}} - 1\right)\frac{1}{x}$ ..................................2p

$u = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{2^x+3^x-2}{x\left(\sqrt{\frac{2^x+3^x}{2}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}}{\sqrt{\frac{2^x+3^x}{2}}+1} = \frac{1}{2}\frac{\ln 2+\ln 3}{2} = \frac{\ln 6}{4} = \ln\sqrt[4]{6}$ ...............4p

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{2^x+3^x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{6}$ ........................................................1p

3. a) Pentru fiecare cerinta corect rezolvata câte un punct ........................................2p
b) cos $x \geq$ -1 $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ ........................................................ 1p
Concluzie........................................................1p
c) Pentru orice *a* corect identificat (de exemplu π ) ........................................ 1p
Folosind corect punctul b, se deduce că limita cerută este $+\infty$ ........................................ 2p

4. a) Se verifică dacă punctele A, B și C sunt coliniare.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ 1/3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$........................................................3p

În concluzie, porumbelul, în zborul său, întâlnește stâlpul de iluminat public ....................1p

b) AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 6 = 0$,……………………………………………....…….3p

Notă: Orice rezolvare corectă, diferită de cea din barem, se notează cu 7p.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ**
**„ADOLF HAIMOVICI”**
**ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024**
**CLASA A XII-A**
**Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $G=\{A,A^2,I_3\}$și mulțimea $G=\{A^n, n\in N^*\}$.

a) **(3p)** Calculați $A^{2024}$.
b) **(4p)** Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

**Barem de corectare și notare**

**a)** $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3=I_3 \Rightarrow A^{2024}=A^2$ ........................**3p**

........................**1p**
........................**3p**

**b)** $G=\{A,A^2,I_3\}$

Tabla legii și scrierea proprietăților grupului

**2.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție „ $*$ ” dată prin

$x*y=\sqrt[3]{x^3\cdot y^3-x^3-y^3+2}\quad (\forall)\, x.y\in\mathbb{R}$

**a)** **(2p)** Determinați suma cuburilor rădăcinilor ecuației

$$1*\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\cdots*\frac{1}{2^{2024}}=x^5-3x^3+2x+1$$

**b)** **(3p)** Să se demonstreze că funcția $f:(\mathbb{R},*)\to(\mathbb{R},.)$ dată prin

$f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$ realizează izomorfism de grupuri

**c)** **(2p)** Calculați $\sqrt[3]{2^3+1}*\sqrt[3]{3^3+1}*\cdots*\sqrt[3]{2024^3+1}$

**Barem de corectare și notare**

a) Legea dată se rescrie astfel $x*y=\sqrt[3]{(x^3-1)(y^3-1)+1}$ și obținem **1p**

$$1*\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\cdots*\frac{1}{2^{2024}}=1$$ **1p**

Ecuația devine $x^5-3x^3+2x=0$ cu soluțiile

$x\in\{0,-1,1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ respectiv suma cuburilor rădăcinilor este 0

b)

$f(x*y)=\sqrt[3]{(x*y)^3-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{(x^3-1)(y^3-1)+1}\right)^3-1}=$

$=\sqrt[3]{(x^3-1)(y^3-1)+1-1}=\sqrt[3]{(x^3-1)}\cdot\sqrt[3]{(y^3-1)}=f(x)\cdot f(y)$ **1p**

deci f realizează morfism de grupuri

Pentru demonstrarea injectivității presupunem $f(x_1)=f(x_2)$ de unde

$\sqrt[3]{(x_1^3-1)}=\sqrt[3]{(x_2^3-1)}$ . După calcule obținem $x_1=x_2$ **1p**

Pentru demonstrarea surjectivității fie $f(x)=y$ de unde $x=\sqrt[3]{y^3+1}$ și ținem cont de faptul că x este real deci se obține y real, așadar imaginea funcției coincide cu codomeniul funcției **1p**

c) Din b) avem $f\left(\sqrt[3]{2^3+1}*\sqrt[3]{3^3+1}*\dots*\sqrt[3]{2024^3+1}\right)=$

$=f\left(\sqrt[3]{2^3+1}\right)\cdot f\left(\sqrt[3]{3^3+1}\right)\cdot\dots\cdot f\left(\sqrt[3]{2024^3+1}\right)=2\cdot3\cdot\dots\cdot2024=2024!$ **1p**

Pe baza bijectivității obținem $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$ de unde **1p**

$\sqrt[3]{2^3+1}*\sqrt[3]{3^3+1}*\dots*\sqrt[3]{2024^3+1}=f^{-1}(2024!)=\sqrt[3]{(2024!)^3+1}$

**3.** Pentru optimizarea analizorului de gaze care măsoară cantitatea x de emisii ale motorului autovehiculelor rutiere , s-a stabilit relația matematică dată de funcția $f:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$ care admite o primitivă F cu proprietatea că

$e^x\cdot F(x)=f(x),\ (\forall)\,x\geq0$ și $f(0)=e.$

a) **(3p)** Arătați că $f(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

b) **(4p)** Să se determine funcția f(x) pentru a putea calibra analizorul de gaze.

**Barem de corectare și notare**

a) Din ipoteză avem $e^x\cdot F(x)=f(x)$ de unde $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ **…1p**

Dar F este derivabilă, f este derivabilă deci prin derivarea relației de mai sus se obține $F'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'$ de unde $f(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ **…2p**

b) Din punctul a) avem $\frac{f'(x)}{f(x)}=e^x+1$ **…1p**

**…1p**

Prin integrare se obține $\ln f(x)=e^x+x+C$ **…1p**

Așadar $f(x)=e^{e^x+x+C}$

Dar $f(0)=e$ , prin urmare $e^{1+C}=e\ deci\ C=0$ **…1p**

Astfel funcția cerută este $f(x) = e^{e^x+x}$

**4.** Se consideră funcțiile $f, g : (0,\infty) \to R,\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ *si* $g(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \ln\sqrt{x+1}$.

**a) (3p)** Arătați că funcția g este o primitivă a funcției f.

**b) (4p)** Calculați $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$.

**Barem de corectare și notare**

a) g este funcție continuă și derivabilă pe $(0,\infty)$ -compunere de funcții elementare **...1p**

calculul derivatei g'(x)=f(x) **…2p**

b) $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx = \int_1^e g'(x)g(x)dx = \left.\frac{g^2(x)}{2}\right|_1^e = \frac{g^2(e)-g^2(1)}{2}$ **…4p**