



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

**Secțiunea H2 - clasele IX-XII, filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii
ETAPA LOCALĂ – 9 FEBRUARIE 2024**

CLASA A X-A

1. Fie $a > 1$ și $b > 0$. Să se demonstreze că

$$\sum_{k=1}^{2024} \log_a \left(\frac{a + kb}{k + 1} \right) \geq \sum_{k=1}^{2024} \frac{1 + k \cdot \log_a b}{k + 1}$$

2. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea

$$e^{-x-y} \leq \frac{f(x) \cdot f(y)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \leq \frac{f(x+y)}{(x+y)^2 + 1}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Fie a, b numere reale de același semn și z un număr complex astfel încât

$$\operatorname{Re} \left(\frac{a + zi}{b + z} \right) = 0 \text{ și } \operatorname{Im} \left(\frac{a + z}{b + zi} \right) = 0. \text{ Să se arate că } |z| = \sqrt{ab}.$$

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 + z_2 = z_3$.

$$\text{Calculați } z_1^{2024} + z_2^{2024} + z_3^{2024}.$$

Notă:

Timpul de lucru este de 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.