



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

**Secțiunea H2 - clasele IX-XII, filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii
ETAPA LOCALĂ – 9 FEBRUARIE 2024**

CLASA A XII-A

1. Se consideră mulțimea

$$M_p = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p, p > 2, p \text{ prim} \right\} \text{ și matricea } I = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

- Arătați că dacă $A, B \in M_p$, atunci $A \cdot B \in M_p$.
- Dați exemplu de două matrice $A, B \in M_p$ care nu comută.
- Arătați că $A^p = I, \forall A \in M_p$.
- Dați exemplu de un grup necomutativ cu 2017^3 elemente.

2. Fie (G, \cdot) grup și $x, y \in G$. Arătați că:

- $(x \cdot y \cdot x^{-1})^{2024} = x \cdot y^{2024} \cdot x^{-1}$
- Dacă $(y \cdot x \cdot y^{-1})^4 = e$ și $x \cdot y = y \cdot x^2$ atunci $x = e$.

3. Fie $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Să se demonstreze că:

$$2 \cdot f^2(2) \leq 2 \cdot \int_0^2 f^2(x) dx + \int_0^2 (x \cdot f'(x))^2 dx$$

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- Calculați $\int_{-2024}^{2024} f(x) dx$.
- Calculați $\int_1^2 \sqrt{f(x)} dx$.

Notă:

Timpul de lucru este de 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.