CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Secțiunea H2 - clasele IX-XII, filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii
ETAPA LOCALĂ – 9 FEBRUARIE 2023
CLASA A XII-A
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se consideră mulțimea $M_p = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in Z_p,\ p>2,\ p\ prim \right\}$ și matricea

$I = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Arătați că dacă $A, B \in M_p$, atunci $A \cdot B \in M_p$.

b) Dați exemplu de două matrice $A, B \in M_p$ care nu comută.

c) Arătați că $A^p = I, \forall A \in M_p$.

d) Dați exemplu de un grup necomutativ cu 2017^3 elemente.

Barem de corectare și notare

a) Fie $A = X(a,b,c), B = X(x,y,z), A, B \in M_p \Rightarrow A \cdot B = X(a+x, b+y+az, c+z) \in M_p$ …..1p

b) Din a) avem că $\begin{matrix} A \cdot B = X(a+x, b+y+az, c+z) \\ B \cdot A = X(x+a, y+b+xc, z+c) \end{matrix}$, deci ………………………………….1p

matricele nu comută dacă $az \neq xc\ pe\ Z_p$

Un exemplu ar fi $A = X(\hat{1},\hat{2},\hat{1}), B = X(\hat{2},\hat{1},\hat{0})$ ……………………………………………………………………1p

c) $A^n = X\left(na, nb + \frac{n(n-1)ac}{2}, nc\right),\ n \in N^*$ ……………………………………………………1p

Pentru p prim, $p > 2$, deci impar, avem că $A^p = I, \forall A \in M_p$ ……...……………………….1p

d) Mulțimea M_p conține p^3 elemente, $(M_p, \cdot)$ este grup necomutativ…………………….1p

2017 este număr prim, deci $(M_{2017}, \cdot)$ este grup necomutativ……………………………..1p

2. Fie (G, .) grup și $x, y \in G$. Arătați că:

a) **(3p)** $(x \cdot y \cdot x^{-1})^{2024} = x \cdot y^{2024} \cdot x^{-1}$

b) **(4p)** Dacă $(y \cdot x \cdot y^{-1})^4 = e$ și $x \cdot y = y \cdot x^2$ atunci $x = e$.

Barem de corectare și notare

a) $(x \cdot y \cdot x^{-1})^{2024} = \underbrace{(x \cdot y \cdot x^{-1}) \cdot \cdots \cdot (x \cdot y \cdot x^{-1})}_{de\ 2024\ ori} =$....................................1 p

$= \underbrace{x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot \ldots \cdot x \cdot y \cdot x^{-1}}_{de\ 2024\ ori} = \underbrace{x \cdot y \cdot e \cdot y \cdot e \cdot \ldots \cdot e \cdot y \cdot x^{-1}}_{de\ 2024\ ori} =$

....1 p

$= x \cdot \underbrace{y \cdot \ldots \cdot y}_{de\ 2024\ ori} \cdot x^{-1} = x \cdot y^{2024} \cdot x^{-1}$...1 p

b) Din punctul a) avem $(y \cdot x \cdot y^{-1})^4 = y \cdot x^4 \cdot y^{-1} = e$...1 p

Așadar $y \cdot x^4 = y$ $de\ unde$ $x^4 = e$ ....1 p

Din ipoteză avem că $x \cdot y = y \cdot x^2$ deci $x = y \cdot x^2 \cdot y^{-1}$ de unde

$x^2 = y \cdot x^2 \cdot y^{-1} \cdot y \cdot x^2 \cdot y^{-1} = y \cdot x^4 \cdot y^{-1} = e$ ....1 p

Din $x \cdot y = y \cdot x^2$ obținem $x \cdot y = y$ de unde $x = e$ ....1 p

3. Fie $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Să se demonstreze că:

$$2 \cdot f^2(2) \leq 2 \cdot \int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 (x \cdot f'(x))^2 dx$$

Barem de corectare și notare

Integrăm prin părți și obținem:

$\int_0^2 f^2(x)dx = x \cdot f^2(x)|_0^2 - \int_0^2 2 \cdot x \cdot f(x) \cdot f'(x)dx$ ....2 p

Așadar

$2 \cdot \int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 \left(x \cdot f'(x)\right)^2 dx = \int_0^2 f^2(x)dx + 2 \cdot f^2(2) - \int_0^2 2 \cdot x \cdot$
$f(x) \cdot f'(x)dx + \int_0^2 (x \cdot f'(x))^2 dx =$

....1 p

$2 \cdot \int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 \left(x \cdot f'(x)\right)^2 dx = \int_0^2 f^2(x)dx + 2 \cdot f^2(2) +$

$+\int_0^2 (f^2(x) - 2\cdot f(x)\cdot x\cdot f'(x) + (x\cdot f'(x))^2)dx =$...2 p

$2\cdot\int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 \left(x\cdot f'(x)\right)^2 dx = \int_0^2 f^2(x)dx + 2\cdot f^2(2) + \int_0^2 \left(f(x) - x\cdot f'(x)\right)^2 dx \geq 2\cdot f^2(2)$

....2 p

4. Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_{-2024}^{2024} f(x)dx$.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{f(x)}dx$.

Barem de corectare și notare

a) f(-x)=-f(x), deci f este funcție impară $\Rightarrow \displaystyle\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = 0$ 2p

b) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int_1^2 \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx =$ 5p

$\displaystyle = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1})\Big|_1^2 + \arcsin e^{-x}\Big|_1^2 = \ln\frac{e^2+\sqrt{e^4-1}}{e+\sqrt{e^2-1}} + \arcsin\frac{1}{e^2} - \arcsin\frac{1}{e}$

Notă: Se punctează orice rezolvare corectă, diferită de cea din barem.