CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Secțiunea H2 - clasele IX-XII, filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii
ETAPA LOCALĂ – 9 FEBRUARIE 2024
CLASA A X-A
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Fie $a > 1$ și $b > 0$. Să se demonstreze că

$$\sum_{k=1}^{2024} \log_a\left(\frac{a+kb}{k+1}\right) \geq \sum_{k=1}^{2024} \frac{1+k\cdot\log_a b}{k+1}$$

Barem de corectare și notare

Din inegalitatea mediilor avem $\frac{a+kb}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{ab^k}$ ……………….2p

Aplicăm logaritm în baza a și obținem

$\log_a \frac{a+kb}{k+1} \geq \log_a \sqrt[k+1]{ab^k}$ ……………….2p

$\log_a \frac{a+kb}{k+1} \geq \frac{\log_a(ab^k)}{k+1}$ ……………….1p

$\log_a \frac{a+kb}{k+1} \geq \frac{1+k\cdot\log_a b}{k+1}$ ……………….1p

După însumarea relației din pasul precedent, de la 1 la 2024, se obține relația din problemă ……………….1p

2. Să se determine funcțiile $f: R \to (0,\infty)$ cu proprietatea
$e^{-x-y} \leq \frac{f(x)\cdot f(y)}{(x^2+1)(y^2+1)} \leq \frac{f(x+y)}{(x+y)^2+1}, \forall x,y \in R$.

Barem de corectare și notare

Fie $g: R \to (0,\infty), g(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$ ……………1p

Inegalitatea cerută devine: $e^{-x-y} \leq g(x)\cdot g(y) \leq g(x+y), \forall x,y \in R$ …………....1p

Pentru $x = y = 0 \Rightarrow 1 \leq g^2(0) \leq g(0) \Rightarrow g(0) = 1$ ……………1p

Pentru $y = -x \Rightarrow 1 \leq g(x)\cdot g(-x) \leq g(0) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{g(-x)}, \forall x \in R$ …………..….1p

Pentru $y = 0 \Rightarrow e^{-x} \leq g(x), dar\, g(x) = \frac{1}{g(-x)} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ ……………2p

$g(x) = e^{-x}$

$\Rightarrow f(x) = e^{-x}(x^2+1)$ ……………1p

3. Fie a, b numere reale de același semn și z un număr complex astfel încât $\operatorname{Re}\left(\frac{a+zi}{b+z}\right)=0$ și $\operatorname{Im}\left(\frac{a+z}{b+zi}\right)=0$. Să se arate că $|z|=\sqrt{ab}$.

Barem de corectare și notare

$\operatorname{Re}\left(\frac{a+zi}{b+z}\right)=0 \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{a+zi}{b+z}\right)}=-\left(\frac{a+zi}{b+z}\right)$ ………………..1p

$\frac{a-\bar{z}i}{b+\bar{z}}=-\frac{a+zi}{b+z} \Leftrightarrow 2ab+a(z+\bar{z})+bi(z-\bar{z})=0$ (1) ………………..2p

$\operatorname{Im}\left(\frac{a+z}{b+zi}\right)=0 \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{a+z}{b+zi}\right)}=\frac{a+z}{b+zi}$ ………………..1p

$\frac{a+\bar{z}}{b-\bar{z}i}=\frac{a+z}{b+zi} \Leftrightarrow 2|z|^2 i+ai(z+\bar{z})+b(\bar{z}-z)=0$ (2) ………………..2p

Inmulțind relația (2) cu i și adunând-o cu relația (1), se obține
$2ab-2|z|^2=0 \Rightarrow |z|=\sqrt{ab}$. ………………..1p

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ și $z_1+z_2=z_3$.

Calculați $z_1^{2024}+z_2^{2024}+z_3^{2024}$.

Barem de corectare și notare

Din $z_1+z_2=z_3$ se obține $\bar{z}_1+\bar{z}_2=\bar{z}_3$. Dar $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ de unde prin ………..1p
înlocuire avem $\frac{|z_1|^2}{z_1}+\frac{|z_2|^2}{z_2}=\frac{|z_3|^2}{z_3}$ și pe baza ipotezei deducem $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_3}$ ……….2p

Astfel $z_3^2=z_1\cdot z_2$ și prin urmare $(\exists)\ q\in\mathbb{C}$ astfel încât $z_3=z_1\cdot q$, deci $z_1^2q^2=z_1\cdot z_2$. Deducem $z_2=z_1\cdot q^2$

Din $z_1+z_2=z_3$ obținem $z_1+z_1\cdot q^2=z_1\cdot q$ și de aici ……….2p

$q^2-q+1=0\,, q^3=-1.$ ………2p

Revenim la cerința problemei:

$$z_1^{2024}+z_2^{2024}+z_3^{2024}=z_1^{2024}+z_1^{2024}\cdot q^{4048}+z_1^{2024}\cdot q^{2024}=$$

$$=z_1^{2024}\cdot(1+q^{4048}+q^{2024})=z_1^{2024}\cdot(1+q^{3\cdot 1349+1}+q^{3\cdot 674+2})=$$

$$=z_1^{2024}\cdot(1-q+q^2)=0.$$ ………1p

Notă: Se punctează orice rezolvare corectă, diferită de cea din barem.