CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
Secțiunea H2 - clasele IX-XII, filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii
ETAPA LOCALĂ – 9 FEBRUARIE 2024
CLASA A IX-A
Barem de corectare și notare

1. Să se demonstreze inegalitatea:

a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}, n \in N$

b) Să se determine o valoare, $k \in N^*$, astfel încât:

$$a = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}}, să\ fie\ în\ intervalul\ [k, k+2].$$

Barem de corectare și notare

a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 1p

$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$..1p

b) Vom folosi punctul a) și obținem:

Pentru n=1, $2(\sqrt{2}-1)<1<2$

Pentru n=2 $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-1)$

....

Pentru n=2024 $2(\sqrt{2025}-\sqrt{2024})<\frac{1}{\sqrt{2024}}<2(\sqrt{2024}-\sqrt{2023})$.............2p

Adunând inegalitățile obținem: $2(\sqrt{2025}-1)<a<2\sqrt{2024}$, ...1p

O valoare pentru numărul natural nenul k este, $k=88$..2p

2. Rezolvați ecuația:

$$\left[\frac{2024x-1}{6}\right]+\left[\frac{2024x+2}{6}\right]=2024x, x \in R.$$

Barem de corectare și notare

Ecuația se poate scrie:

$\left[\frac{2024x-1}{6}\right]+\left[\frac{2024x-1+3}{6}\right]=2024x$..1p

adică,

$\left[\frac{2024x-1}{6}\right]+\left[\frac{2024x-1}{6}+\frac{1}{2}\right]=2024x$..1p

Aplicăm egalitatea lui Hermite și obținem:

$\left[2 \cdot \frac{2024x-1}{6}\right] = 2024x \Leftrightarrow \left[\frac{2024x-1}{3}\right] = 2024x$………………………………2p

Avem $2024x = k, k \in Z \Longrightarrow x = \frac{k}{2024}, k \in Z$……………………………...…1p

Atunci, $k \leq \frac{k-1}{3} < k + 1, k \in (-2, -\frac{1}{2}]$………………………………………..1p

Cum $k \in Z$, obținem $k = -1$, deci $x = -\frac{1}{2024}$...1p

3. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD, AB > CD$, E mijlocul lui AB, H mijlocul lui DC, $AC \cap BD = \{F\}$ și $AD \cap BC = \{O\}$. Să se arate că O, H, F, E sunt coliniare.

Barem de corectare și notare

Arătăm că O, H, E sunt coliniare , adică $\overrightarrow{OH} = k \cdot \overrightarrow{OE}$, $k \in R^*$

E mijlocul lui AB $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$, H mijlocul lui DC $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}}{2}$ 1p

$DC \parallel AB \overset{T.F.A.}{\Longrightarrow} \Delta ODC \sim \Delta OAB \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB} = k \Rightarrow \overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ și

$\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OH} = \frac{k \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})}{2} = k \cdot \overrightarrow{OE} \Rightarrow O, H, E\ coliniare (1)$

…...……………………………………..1p

Arătăm că O, H, F sunt coliniare , adică $\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OF}$ coliniari

Cum $AB \parallel DC \overset{T.F.A.}{\Longrightarrow} \Delta OAB \sim \Delta ODC \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC} = h$ și

$\Delta ABF \sim \Delta CDF \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{BF}{DF} = \frac{AF}{CF} = h \Rightarrow \overrightarrow{OA} = h \cdot \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB} = h \cdot \overrightarrow{OC}$ ……..2p

$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA}+h \cdot \overrightarrow{OC}}{1+h} = \frac{h \cdot \overrightarrow{OD}+h \cdot \overrightarrow{OC}}{1+h} = \frac{h \cdot (\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})}{1+h} = \frac{2 \cdot h}{1+h} \cdot \frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}}{2} = \frac{2 \cdot h}{1+h} \cdot \overrightarrow{OH} \Rightarrow \overrightarrow{OF}$ și $\overrightarrow{OH}$ sunt coliniari $\Rightarrow$ O, H, F sunt coliniare (2) 2p

Din (1) și (2) rezultă că O, H, F, E sunt coliniare 1p

4. Fie $ABCD$ un paralelogram cu M mijlocul lui BC, N mijlocul lui CD, $AN \cap DM = \{P\}$. Să se determine valoarea rapoartelor $\frac{DP}{PM}$ și $\frac{AP}{PN}$.

Barem de corectare și notare

Vom scrie vectorii de poziție raportați la polul B și considerăm $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. De asemenea, notăm $\frac{DP}{PM} = k,\ \frac{AP}{PN} = l$

$\frac{DP}{PM} = k \Rightarrow \overrightarrow{DP} = k \cdot \overrightarrow{PM} \Rightarrow \overrightarrow{r_P} = \frac{\overrightarrow{r_D} + k \cdot \overrightarrow{r_M}}{1+k}$ și

$\frac{AP}{PN} = l \Rightarrow \overrightarrow{AP} = l \cdot \overrightarrow{PN} \Rightarrow \overrightarrow{r_P} = \frac{\overrightarrow{r_A} + l \cdot \overrightarrow{r_N}}{1+l} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{r_D} + k \cdot \overrightarrow{r_M}}{1+k} = \frac{\overrightarrow{r_A} + l \cdot \overrightarrow{r_N}}{1+l}$ (1) 2p

Vom exprima vectorii care apar în egalitatea de mai sus în funcție de vectorii necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$:

$\overrightarrow{r_D} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{r_M} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{r_A} = -\vec{a}, \overrightarrow{r_N} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_C}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ 1p

Egalitatea (1) devine:

$\frac{\vec{b}\left(1+\frac{k}{2}\right) - \vec{a}}{1+k} = \frac{-\left(1+\frac{l}{2}\right)\vec{a} + l\vec{b}}{1+l} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\frac{l}{2}}{1+l} - \frac{1}{1+k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1+\frac{k}{2}}{1+k} - \frac{l}{1+l}\right)\vec{b} = \vec{0}$ 2p

Cum vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt necoliniari, rezultă că

$\frac{1+\frac{l}{2}}{1+l} - \frac{1}{1+k} = 0$ și $\frac{1+\frac{k}{2}}{1+k} - \frac{l}{1+l} = 0$ 1p

De aici rezultă $k = \frac{2}{3}, l = 4$ 1p

Notă: Se punctează orice rezolvare corectă, diferită de cea din barem.