MINISTERUL EDUCAȚIEI

S.S.M.R. – filiala Botoșani

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024
CLASA a VI-a
BAREM DE CORECARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL I (7puncte)

Se consideră mulțimile **A** = $\{x \in \mathbb{N}^* | 30 \ este \ divizibil \ cu \ (2x-1)\}$ și

B =$\{x \in \mathbb{N} | (x+2) \ \hat{i}l \ divide \ pe \ (3x+46)\}$.

a) Scrieți mulțimile **A** și **B** prin enumerarea elementelor.

b) Aflați **A** ∩ **B** și **A** ∪ **B**.

c) Câte submulțimi cu câte 5 elemente are mulțimea **B**?

Soluție:

Oficiu..**1p**

a) $2x$–1 este număr natural impar, divizor al lui 30 ⇔ $2x$–1∈{1, 3, 5, 15} **1p**

A={1, 2, 3, 8}...**1p**

$(x+2)|(3x+46) \Leftrightarrow (x+2)|[(3x+46)-3(x+2)] \Leftrightarrow (x+2)|40$..................**1p**

B={0;2;3;6;8;18;38}...**1p**

b) **A**∩**B**={2;3;8}, A∪B={0;1;2;3;6;8;18;38}..**1p**

c) B are 7 elemente. A alege 5 elemente într-o submulțime, înseamnă a elimina 2 dintre elementele lui B. Sunt 21 de submulțimi **1p**

SUBIECTUL II (7puncte)

Aflați numerele prime p, q, r pentru care este adevărată relația $p^4 \cdot q^3 + p^3 \cdot r = 2024$.

Supliment Gazeta Matematică

Soluție:

Oficiu..**1p**

$2024=2^3 \cdot 11 \cdot 23$...**1p**

$p^4 \cdot q^3+p^3 \cdot r=p^3 \cdot (p \cdot q^3+r)$...**1p**

Se obține p=2 și $2 \cdot q^3+r=253$..**1p**

$q=2 \Rightarrow r=237$ nu este prim

$q=3 \Rightarrow r=199$ este prim

$q=5 \Rightarrow r=3$ este prim

$q \geq 7 \Rightarrow 2 \cdot q^3 \geq 2 \cdot 343 \Rightarrow$ nu există soluții.

În concluzie, p=2, q=3, r=199 sau p=2, q=5, r=3 ....**3p**

SUBIECTUL III (7puncte)

Aflați numerele naturale a, b, c, d, e știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) a, b, c sunt direct proporționale cu 2, 5, 6;

2) c, d și e sunt invers proporționale cu 2, 8 și 9;

3) *media aritmetică a numerelor a, b și c este cu 70 mai mare decât media aritmetică a numerelor d* și *e*.

Soluție:

Oficiu..**1p**

a, b, c sunt direct proporționale cu 2, 5, 6 $\Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=k \Rightarrow a=2k$, $b=5k$, $c=6k$..........**1p**

c, d și e sunt invers proporționale cu 2, 8, 9 $\Rightarrow c\cdot 2=d\cdot 8=e\,9$ și $c=6k \Rightarrow d=\frac{3}{2}k$, $e=\frac{4}{3}k$ ..**1p**

$\frac{a+b+c}{3}=\frac{c+d}{2}+70 \Leftrightarrow \frac{2k+5k+6k}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3k}{2}+\frac{4k}{3}\right)+70$..**1p**

$k = 24$..**2p**

Numerele sunt 48, 120, 144, 36 și 32...**1p**

SUBIECTUL IV (7puncte)

Unghiurile proprii $\measuredangle A_1$, $\measuredangle A_2$, $\measuredangle A_3$ și $\measuredangle A_4$ sunt unghiuri în jurul unui punct A. Știind că măsurile lor exprimate în grade sunt egale cu 3^n+3a, $3^{n+1}+a$, $3^{n+2}-a$, respectiv $3^{n+3}-3a$, cu $n, a \in \mathbb{N}$, determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua a.

Gazeta Matematică

Soluție:

Oficiu..**1p**

$3^n + 3a + 3^{n+1} + a + 3^{n+2} - a + 3^{n+3} - 3a = 360$...**1p**

$3^n \cdot (1 + 3 + 9 + 27) = 360 \Leftrightarrow 3^n = 9 \Leftrightarrow n = 2$...**2p**

$0 < 9 + 3a < 180 \Leftrightarrow a \in\{0, 1, 2, \ldots, 56\}$

$0 < 27 + a < 180 \Leftrightarrow a \in\{0, 1, 2, \ldots, 153\}$

$0 < 81 - a < 180 \Leftrightarrow a \in\{0, 1, 2, \ldots, 80\}$

$0 < 243 - 3a < 180 \Leftrightarrow a \in\{22, 23, 24, \ldots, 80\}$

În concluzie, $a \in\{22, 23, 24,\ldots, 56\}$...**3p**

Notă:

- **Timp de lucru 3 ore;**
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**