OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024
CLASA a XI-a

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n^2}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$este convergent și să se calculeze limita sa;

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = l \in \mathbb{R}^*$ atunci $l = 1$.

SUBIECTUL II (7puncte)

a) Dacă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică și există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ atunci funcția f este constantă;

b) Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică condițiile:

i) Există $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = l \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (7puncte)

Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(A) = 9$. Arătați că determinantul matricei $A^2 + 5A + 9I_2$ este un pătrat perfect.

Supliment G.M.11/2023

SUBIECTUL IV (7puncte)

Fie $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$și $\varepsilon \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$.

a) Demonstrați că $\det[(A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C)(A + \varepsilon^2 B + \varepsilon C)] \geq 0$;

b) Dacă $A^2 + B^2 + C^2 = AB + BC + CA$ atunci:

$$n \,\vdots\, 3 \text{ sau } \det[(AB - BA) + (BC - CB) + (CA - AC)] = 0.$$

Notă:

- **Timp de lucru 3 ore;**
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**