OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024
CLASA a VII-a
BAREM DE CORECARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie numerele $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$ și

$$y = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}.$$

a) Calculați media aritmetică a numerelor x și y;

b) Aflați cel mai mic număr natural nenul n încât $\sqrt{M_a \cdot n} \in \mathbb{Q}$, unde M_a este media aritmetică a numerelor x și y ;

c) Arătați că $x < \frac{1012}{2025} < y$.

Soluție:

Oficiu...**1p**

a) $x + y = 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}$...**1p**

$M_a = \frac{x+y}{2} = \frac{1012}{2025}$...**1p**

b) $\sqrt{M_a \cdot n} = \sqrt{n \cdot \frac{1012}{2025}} = \sqrt{n \cdot \frac{2^2 \cdot 11 \cdot 23}{5^2 \cdot 9^2}} \in \mathbb{Q}$ dacă n=$11 \cdot 23 = 253$.....................**1p**

c) Grupând termenii câte doi obținem: $x = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \cdots \ldots + \frac{1}{2024\cdot 2025}$

$y = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots \ldots + \frac{1}{2023\cdot 2024}$...**1p**

Evident $x > 0, y > 0$ și fiecare dintre cei 1012 termeni din x este mai mic decât termenul de același rang din y, deci $x < y$...**1p**

Avem $x < \frac{x+y}{2} < y$, deci $x < \frac{1012}{2025} < y$...**1p**

SUBIECTUL II (7puncte)

Considerăm expresia $E = \frac{2x + \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2} + \sqrt{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}}{x+2}$, unde $x \neq -2$. Aflați numerele întregi x pentru care expresia este număr întreg.

Soluție:

Oficiu...**1p**

$\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$,

$\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2} = |\sqrt{5} - 4| = 4 - \sqrt{5}$,

$\sqrt{(5+\sqrt{2})^2}=|5+\sqrt{2}|=5+\sqrt{2}$ ……..**2p**

E=$\frac{2x+9}{x+2}$……………………….....………………………………………….**1p**

E = $\frac{2x+9}{x+2} \in \mathbb{Z}$ dacă x+2 divide 5.....…………………………………………..…..**1p**

$x+2 \in D_5=\{\pm 1, \pm 5\}$, adică $x \in \{-7,-3,-1,3\}$……………………………….…..**2p**

SUBIECTUL III (7puncte)

Fie triunghiul ABC ascuțitunghic cu m($\sphericalangle A$)=60^0. Construim BS$\perp$AC (S$\in AC$), CT$\perp$AB (T$\in AB$) și O mijlocul segmentului BC. Demonstrați că triunghiul SOT este echilateral.

Soluție:

Oficiu……………………………...……………..………………….……………**1p**

În ΔBSC, $\measuredangle S=90^0$ și SO - mediană$\Rightarrow SO=\frac{BC}{2}$………..…………………….………………**1p**

În ΔBTC, $\sphericalangle T=90^0$ și TO mediană $\Rightarrow TO=\frac{BC}{2}$ ………………………………..**1p**

SO=TO=$\frac{BC}{2}$ $\Rightarrow$ ΔSOT – isoscel……………………………………………………...**1p**

Considerăm cercul $\mathcal{C}(O; r=\frac{BC}{2})$.

BO=CO=TO=OS=$\frac{BC}{2}$ $\Rightarrow B,T,S,C \in \mathcal{C}(O; r=\frac{BC}{2})$……………………………….**1p**

$\measuredangle A=\frac{\widehat{BOT}-\widehat{COS}}{2}\Rightarrow 60^0=\frac{180^0-\widehat{TOS}}{2}\Rightarrow \widehat{TOS}$=$60^0$……...……………………………**1p**

$\measuredangle TOS=\widehat{TS}$ = 60^0 $\Rightarrow$ ΔTOS – echilateral ………………...………………………**1p**

SUBIECTUL IV (7puncte)

Fie ABCD un paralelogram cu AC$\cap$BD={O} și punctele M$\in(AB)$, N$\in$ (BC). Punctele P și Q sunt simetricele punctului O față de punctele M, respectiv N. Știind că punctele P și Q aparțin dreptelor AD, respectiv CD, demonstrați că:

a) O este centrul de greutate al triunghiului DPQ;

b) OPBQ este paralelogram.

(Gazeta Matematică)

Soluție:

a) Notăm AB=CD=a și AD=BC=b. Ducem OX∥CD și OY∥AD, X∈AD, Y∈CD. Fie PO∩CD={S} și QO∩AD={T}.

AM – linie mijlocie în ΔPOX ⇒AM = $\frac{OX}{2}=\frac{a}{4}$ și AP=AX=$\frac{b}{2}$. **1p**

OX – linie mijlocie în trapezul AMSD ⇒XO = $\frac{AM+DS}{2}$ ⇒DS = $\frac{3a}{4}$ și SC=$\frac{a}{4}$. CN – linie mijlocie în ΔQOY ⇒ CQ=CY=$\frac{a}{2}$ și CN = $\frac{OY}{2}=\frac{b}{4}$. **1p**

QS = CQ+CS = $\frac{3a}{4}$ ⇒ S – mijlocul DQ ⇒ PS – mediană în ΔDPQ…………………..**1p**

OY – linie mijlocie în trapezul CNTD ⇒ OY= $\frac{CN+DT}{2}$ ⇒ DT =$\frac{3b}{4}$. PT=PA+AT= $\frac{3b}{4}$ ⇒ T – mijlocul lui DP ⇒ QT – mediană în ΔDPQ ⇒ O – centrul de greutate al ΔDPQ……………………………………………………………………….... **1p**

b) DO∩PQ = $\{I\}$ ⇒DI – mediană în ΔDPQ ⇒ PI = QI ………………………**1p**

OI =$\frac{DO}{2}$ = $\frac{BD}{4}$, BI = BO−OI = $\frac{BD}{4}$ ⇒OPBQ – paralelogram ……………………….**1p**

Oficiu……………………………………………………………………………..**1p**

Notă:

- **Timp de lucru 3 ore;**
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**