OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 24 februarie 2024
Clasa a 9-a

SUBIECTUL I

a) Să se arate că $x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2$, $\forall\, x, y \in (0, +\infty)$

b) Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=a+b+c$ atunci $\frac{a^2+ab}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^2+bc}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^2+ca}{c^3+abc+a^3} \leq 2$

<u>Barem de corectare și notare</u>:

a) $x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2 \Leftrightarrow x^3+y^3-x^2y-xy^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-y)-y^2(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow$
$(x-y)(x^2-y^2) \geq 0$ .... (1p)
$\Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x+y)}_{>0} \geq 0$ .... (1p)

b) Aplicând inegalitatea de la punctul a) perechilor de numere reale strict pozitive (a, b), (b, c) respectiv $(c, a) \Rightarrow a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$, $b^3+c^3 \geq b^2c+bc^2$, $c^3+a^3 \geq c^2a+ca^2$......... (1p)

Utilizând aceste trei inegalități, majorăm membrul stâng al inegalității de demonstrat, astfel:

$$\frac{a^2+ab}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^2+bc}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^2+ca}{c^3+abc+a^3} \leq \frac{a^2+ab}{a^2b+abc+ab^2}+\frac{b^2+bc}{b^2c+abc+bc^2}+\frac{c^2+ca}{c^2a+abc+ca^2} = \text{..........................} \text{ (1p)}$$

$$=\frac{a(a+b)}{ab(a+b+c)}+\frac{b(b+c)}{bc(a+b+c)}+\frac{c(c+a)}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{c}+\frac{c+a}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a}{b}+1+\frac{b}{c}+1+\frac{c}{a}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\right)\underbrace{=}_{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=a+b+c}\frac{a+b+c+3}{a+b+c}=1+\frac{3}{a+b+c} \text{ .... (1p)}$$

Aplicând inegalitatea mediilor $m_a\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right) \geq m_g\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right) \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3$

Dar $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=a+b+c$, deci $a+b+c \geq 3$ .... (1p)

Revenind la inegalitatea de demonstrat, avem:

$$\frac{a^2+ab}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^2+bc}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^2+ca}{c^3+abc+a^3} \leq 1+\frac{3}{a+b+c} \leq 1+\frac{3}{3}=2 \text{ .... (1p)}$$

SUBIECTUL II

Se consideră patrulaterul convex ABCD și punctele H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv ABD. Arătați că punctele A, B, C și D sunt conciclice dacă și numai dacă $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CD}$.

<u>Barem de corectare și notare</u>:

$(\Rightarrow)$ A, B, C, D conciclice. Notăm cu O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ și aplicăm relația lui Sylvester în triunghiurile ABC și ABD:

$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ .... (1p)

Scădem cele două egalități și obținem:

$\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CD}$ .... (1p)

$(\Leftarrow)$ $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CD}$. Notăm cu O și Q centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, respectiv ABD. Din relația lui Sylvester obținem $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{QH_2}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}$ .... (1p)

Prin scăderea celor două relații, obținem

$\overrightarrow{QH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{QD}-\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{H_1O}+\overrightarrow{QH_2}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow$ .... (1p)

$\Leftrightarrow\overrightarrow{H_1O}+\left(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OH_2}\right)=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{QO}+\left(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OD}\right)+\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow$ .... (1p)

$\Leftrightarrow\overrightarrow{H_1H_2}=2\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{CD}$ .... (1p)

Folosind ipoteza $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CD}$, obținem $\overrightarrow{QO}=\vec{0}$, deci Q și O coincid .... (1p)

SUBIECTUL III

Fie punctele M, N, P pe laturile AB, BC, respectiv CA ale triunghiului ABC astfel încât AM = BN = CP. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP. Dacă $AB\cdot\overrightarrow{AT}+BC\cdot\overrightarrow{BT}+CA\cdot\overrightarrow{CT}=\vec{0}$, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

<u>Barem de corectare și notare</u>:

Notăm $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ iar $AM=BN=CP=x$, $a,b,c,x>0$

Condiția din enunț $\Leftrightarrow c\cdot\overrightarrow{AT}+a\cdot\overrightarrow{BT}+b\cdot\overrightarrow{CT}=\vec{0}$

$\frac{AM}{AB}=\frac{x}{c},\ \frac{BN}{BC}=\frac{x}{a},\ \frac{CP}{CA}=\frac{x}{b}\ \Rightarrow c\cdot\overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{AB},\ a\cdot\overrightarrow{BN}=x\cdot\overrightarrow{BC},\ b\cdot\overrightarrow{CP}=x\cdot\overrightarrow{CA}$ .... (1p)

$\Rightarrow c\cdot\overrightarrow{AM}+a\cdot\overrightarrow{BN}+b\cdot\overrightarrow{CP}=x\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=x\cdot\vec{0}=\vec{0}\Rightarrow c\cdot\overrightarrow{AM}+a\cdot\overrightarrow{BN}+b\cdot\overrightarrow{CP}=\vec{0}\ (*)$

Dar $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{TM}-\overrightarrow{TA},\ \overrightarrow{BN}=\overrightarrow{TN}-\overrightarrow{TB},\ \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{TP}-\overrightarrow{TC}$ .... (1p)

Revenind la (*), avem: $c\cdot\left(\overrightarrow{TM}-\overrightarrow{TA}\right)+a\cdot\left(\overrightarrow{TN}-\overrightarrow{TB}\right)+b\cdot\left(\overrightarrow{TP}-\overrightarrow{TC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$

$c\cdot\overrightarrow{TM}+a\cdot\overrightarrow{TN}+b\cdot\overrightarrow{TP}+\left(\underbrace{c\cdot\overrightarrow{AT}+a\cdot\overrightarrow{BT}+b\cdot\overrightarrow{CT}}_{=\vec{0}}\right)=\vec{0}\Rightarrow c\cdot\overrightarrow{TM}+a\cdot\overrightarrow{TN}+b\cdot\overrightarrow{TP}=\vec{0}(**)$....(1p)

T centrul de greutate al triunghiului MNP $\Rightarrow\overrightarrow{r_T}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_N}+\overrightarrow{r_P})$, iar $\overrightarrow{TM}=\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_T}=$

$\overrightarrow{r_M}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_N}+\overrightarrow{r_P})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_N}-\overrightarrow{r_P})$

Analog $\overrightarrow{TN}=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{r_M}+2\overrightarrow{r_N}-\overrightarrow{r_P})$, $\overrightarrow{TP}=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_N}+2\overrightarrow{r_P})$ .... (1p)

Revenind la relația (**) avem:

$\frac{c}{3}(2\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_N}-\overrightarrow{r_P})+\frac{a}{3}(-\overrightarrow{r_M}+2\overrightarrow{r_N}-\overrightarrow{r_P})+\frac{b}{3}(-\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_N}+2\overrightarrow{r_P})=\vec{0}\ /\cdot 3\ \Rightarrow$

$(2c-a-b)\overrightarrow{r_M}+(2a-b-c)\overrightarrow{r_N}+(2b-a-c)\overrightarrow{r_P}=\vec{0}$ .... (1p)

Alegem M pol $\Rightarrow(2c-a-b)\cdot\overrightarrow{MM}+(2a-b-c)\cdot\overrightarrow{MN}+(2b-a-c)\cdot\overrightarrow{MP}=\vec{0}$

$\left.\begin{matrix}(2a-b-c)\cdot\overrightarrow{MN}+(2b-a-c)\cdot\overrightarrow{MP}=\vec{0}\\ \overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\text{ vectori necoliniari}\end{matrix}\right\}$ .... (1p)

$\Rightarrow\begin{cases}2a-b-c=0\\2b-a-c=0\end{cases}\Rightarrow 3a-3b=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}a=b\\2a-b-c=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-c=0\ \Rightarrow a=c\ \Rightarrow a=b=c$

$\Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral .... (1p)

SUBIECTUL IV

Fie $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ un șir de numere naturale nenule și distincte.

a) Demonstrați că $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\geq\frac{2n+1}{3}\cdot(a_1+a_2+\dots+a_n),\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinați numerele naturale nenule și distincte x_1,x_2,x_3,x_4 care verifică egalitatea: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=3\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4)$.

<u>Barem de corectare și notare</u>:

a) Demonstrăm inegalitatea prin inducție matematică.

Notăm $P(n): a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3} \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Verificare: $P(1): a_1^2 \geq \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} \cdot a_1$, (A)

2. Demonstrația: $P(k) \to P(k+1)$.

Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată

$P(k): a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 \geq \frac{2k+1}{3} \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k), (A)$.

$P(k+1): a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{k+1}^2 \geq \frac{2k+3}{3} \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_{k+1})$ (?) .... (1p)

$P(k+1): \underbrace{a_1^2 + ... + a_k^2} + a_{k+1}^2 \geq \underbrace{\frac{2k+1}{3} \cdot (a_1 + ... + a_k)} + \frac{2}{3} \cdot (a_1 + ... + a_k) + \frac{2k+3}{3} a_{k+1}$

Vom demonstra că $a_{k+1}^2 \geq \frac{2}{3} \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k) + \frac{2k+3}{3} \cdot a_{k+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a_{k+1}^2 - (2k+3) \cdot a_{k+1} \geq 2 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k)$ .... (1p)

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$, deci $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, ..., a_n \geq n, ...$ și $a_{n+1} \geq a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, (*) .... (1p)

Folosind relațiile (*) , obținem:

$$3a_{k+1}^2 - (2k+3) \cdot a_{k+1} = a_{k+1} \cdot (3a_{k+1} - 2k - 3) = \underbrace{a_{k+1}}_{\geq a_k + 1} \cdot \left(\underbrace{a_{k+1}}_{\geq a_k + 1} + 2\underbrace{a_{k+1}}_{\geq 2(k+1)} - 2k - 3 \right) \geq$$

$$\geq (a_k + 1) \cdot a_k = 2 \cdot \underbrace{(1 + 2 + 3 + ... + a_k)}_{\text{suma primelor } a_k \text{ numere naturale}} \geq 2 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k)$$ .... (1p)

b) Folosind a) pentru $n = 3$ și relația $\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}_{\geq \frac{7}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)} + x_4^2 = 3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, obținem:

$x_4^2 \leq 3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - \frac{7}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{2}{3}\left(\underbrace{x_1}_{\leq x_4 - 3} + \underbrace{x_2}_{\leq x_4 - 2} + \underbrace{x_3}_{\leq x_4 - 1} \right) + 3x_4 \leq 5x_4 - 4$ .... (1p)

$x_4^2 \leq 5x_4 - 4 \Leftrightarrow \underbrace{(x_4 - 1)}_{>0} \cdot (x_4 - 4) \leq 0 \Rightarrow x_4 - 4 \leq 0$. Cum $x_4 \geq 4 \Rightarrow x_4 = 4$ .... (1p)

$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .... (1p)