OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 24 februarie 2024
Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care

$$X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Barem de corectare și notare:

Din relația lui Hamilton-Cayley $X^2 = Tr(X) \cdot X - \det(X) \cdot I_2$

și $X^3 = \big(Tr(X)\big)X^2 - \det(X) \cdot X$

Ecuația devine $\big(Tr(X)\big)X^2 - \det(X) \cdot X - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$..**1p**

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci $Tr(X) = a + d$ și $\det(X) = ad - bc$

$\big(Tr(X)\big)X^2 - (\det(X) + 2)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (ad - bc + 2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ **1p**

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+d)(a^2+bc) - a(ad-bc+2) = -1 \\ b(a^2+d^2+ad+bc-2) = 0 \\ c(a^2+d^2+ad+bc-2) = 10 \\ (a+d)(d^2+bc) - a(ad-bc+2) = -1 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow b = 0$ **1p**

$\begin{cases} b = 0 \\ (a+d)a^2 - a(ad+2) = -1 \\ c(a^2+d^2+ad+bc-2) = 10 \\ (a+d)d^2 - a(ad+2) = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a^3 - 2a + 1 = 0 \\ c(a^2+d^2+ad-2) = 10 \\ (a+d)d^2 - a(ad+2) = 4 \end{cases}$

$a^3 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+a-1) = 0 \Rightarrow a = 1$ **1p**

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ c(d^2 + d - 1) = 10 \\ d^3 - 2d - 4 = 0 \end{cases}$$

$d^3 - 2d - 4 = 0 \Rightarrow d = 2$ **1p**

$c = 2$ **1p**

Deci, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ **1p**

SUBIECTUL II

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că există numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $C = aA + bB$.

b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $C^n = a_nA + b_nB$ și determinați $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}^*$.

(S.G.M. nr. 10/2023) S:L23.261

Barem de corectare și notare:

a) $C = a \cdot A + b \cdot B \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -2a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & b \\ 2b & b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b & -a + b \\ -2a + 2b & 2a + b \end{pmatrix}$ **1p**

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ -a + b = 1 \\ -2a + 2b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}$ $și$ $a = \frac{2}{3}$...**1p.**

b) $C = \frac{2}{3} \cdot A + \frac{5}{3} \cdot B$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot A.$

Folosind inducția matematică, rezultă că $A^n = 3^{n-1} \cdot A, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.......................**1p**

$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot B.$

Pe baza inducției matematice, rezultă că $B^n = 3^{n-1} \cdot B, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.......................**1p**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$..**1p**

$C^n = (a_1 \cdot A + b_1 \cdot B)^n = a_1^n \cdot A^n + b_1^n \cdot B^n +$

$termeni\ de\ forma\ \underbrace{B^i \cdot A^j\ și\ A^i \cdot B^j}_{=0}\ cu\ i,j \neq 0 =\ a_1^n \cdot 3^{n-1} \cdot A + b_1^n \cdot 3^{n-1} \cdot$

B...**1p**

Rezultă, deci: $a_n = a_1^n \cdot 3^{n-1}, b_n = 3^{n-1} \cdot b_1^n$..**1p**

SUBIECTUL III

Să se calculeze: a) $\frac{1}{2n^2-2n+1} - \frac{1}{2n^2+2n+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5} + \frac{8}{65} + \frac{12}{325} + \cdots + \frac{4n}{4n^4+1}\right)$.

Barem de corectare și notare:

a) $\frac{1}{2n^2-2n+1} - \frac{1}{2n^2+2n+1} = \frac{4n}{(2n^2-2n+1)(2n^2+2n+1)} = \frac{4n}{4n^4+1}$ **2p**

b) Fie $E(n) = \frac{1}{2n^2-2n+1}$. Observăm că $E(n+1) = \frac{1}{2n^2+2n+1}$ **1p**

atunci $\frac{4n}{4n^4+1} = E(n) - E(n+1)$..**1p**

$$\frac{4}{5} + \frac{8}{65} + \frac{12}{325} + \cdots + \frac{4n}{4n^4+1} =$$

$= E(1) - E(2) + E(2) - E(3) + E(3) - E(4) + \cdots + E(n) - E(n+1)$.......**2p**

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5} + \frac{8}{65} + \frac{12}{325} + \cdots + \frac{4n}{4n^4+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}\right) = 1$..........................**1p**

SUBIECTUL IV

Determinați numerele reale $a > 0$ și b pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - x\right)^{\frac{bx^2+x}{x+1}} = e$

Barem de corectare și notare:

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}=\frac{a}{2}$..........**2p**

$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+x}{x+1}=\begin{cases}1, dacă\ b=0\\ \pm\infty, dacă\ b\neq 0\end{cases}$. **1p**

Dacă $a\neq 2$, limita cerută este e pentru $b=0$ și $a=2e$..**2p**

Dacă $a=2$, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)^{\frac{bx^2+x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x-1}}\right]^{\frac{-(bx^2+x)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)}}=e$ pentru $b=-2$...**2p.**