OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 24 februarie 2024
Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

Fie mulțimea $G=\left\{A(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \frac{1}{n}\cdot\sin\alpha\\ -n\cdot\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \mid \alpha\in[0;2\pi)\right\}, n\in\mathbb{N}^*, fixat.$ ***Pe mulțimea*** G ***se consideră operația de înmulțire a matricelor.***

a) Arătați că $(G,\ \cdot)$ ***este grup abelian***

b) Determinați $A^p\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ***unde*** $p\in\mathbb{N}, p\geq 1$.

a) $A(\alpha)\cdot A(\beta)=A\big((\alpha+\beta)\ (mod 2\pi)\big)$, oricare ar fi $A(\alpha), A(\beta)\in G$ și $(\alpha+\beta)(mod 2\pi)\in[0,2\pi)$, rezultă că operația de înmulțire a matricelor este o lege de compoziție pe G **1p**

operația de înmulțire a matricelor este asociativă și comutativă pe G...**1p**

elementul neutru este $A(0)=I_2\in G$...**1p**

orice element $A(\alpha)\in G$, admite simetric, $A^{-1}(\alpha)=A(2\pi-\alpha), \alpha\in(0,2\pi)$. $A^{-1}(0)=A(0)=I_2$

deci $(G,\ \cdot)$ este grup abelian...**1p**

b) $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{n}\\ -n & 0\end{pmatrix}$; $A^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=A(\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$

$A^3\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=A\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{n}\\ n & 0\end{pmatrix}$

$A^4\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$...................... ....**1p**

În final obținem $A^p\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases} I_2, & \text{dacă } p=4m\\ \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{n}\\ -n & 0\end{pmatrix}, & \text{dacă } p=4m+1\\ -I_2, & \text{dacă } p=4m+2\\ \begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{n}\\ n & 0\end{pmatrix}, & \text{dacă } p=4m+3\end{cases}$, $m\in\mathbb{N}^*$, pentru orice

$p\in\mathbb{N}, p\geq 1$..**2p**

SUBIECTUL II

a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculați $\int_1^n \{x\}^2 dx$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

b) Calculați limita : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \int_1^{n^2} [\sqrt{x}]\, dx$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x

a) Se consideră funcția $f: [1, n] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - [x])^2$, unde [x] este partea întreagă a numărului real x, care în $x = p$, cu $p = \overline{2, n-1}$, are puncte de discontinuitate de speța întâi.

Se construiesc funcțiile $f_k: [k, k+1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = (x-k)^2$, $k = \overline{1, n-1}$, funcții continue

$\Rightarrow f_k$ sunt integrabile pe int. $[k, k+1]$, deci $\int_k^{k+1} f_k(x)dx = \int_k^{k+1} f(x)dx$, pentru orice $k = \overline{1, n-1}$...**1p**

$\int_1^n \{x\}^2 dx = \int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (x^2 - 2kx + k^2)dx =$....................**1p**

$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{3k^2+3k+1}{3} - k(2k+1) + k^2\right]$ … … … … … … … **1p**

Obținem în final $\int_1^n \{x\}^2 dx = \frac{n-1}{3}$ **1p**

b) pentru calculul limitei se aplică lema lui Stolz- Cesaro, ținând cont că, dacă notăm $a_n = \int_1^{n^2} [\sqrt{x}]$,

limita devine $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1)^3 - n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_{n^2}^{(n+1)^2} [\sqrt{x}] dx}{3n^2+3n+1}$ (1)..**1p**

Funcția $f: [n^2, (n+1)^2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\sqrt{x}]$, este discontinuă în x = $(n+1)^2$, dar construind funcția $g: [n^2, (n+1)^2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = n$, continuă, obținem că $\int_{n^2}^{(n+1)^2} f(x)dx = \int_{n^2}^{(n+1)^2} g(x)dx$, deci

$\int_{n^2}^{(n+1)^2} [\sqrt{x}] dx = \int_{n^2}^{(n+1)^2} n\, dx = n[(n+1)^2 - n^2] = n(2n+1)$ (2)..**1p**

Din relațiile (1) și (2), obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \int_1^{n^2} [\sqrt{x}]\, dx = \frac{2}{3}$...**1p**

SUBIECTUL III

Determinați toate mulțimile $M \subset \mathbb{C}$ cu proprietățile:

i) card M = 4

ii) M parte stabilă a mulțimii numerelor complexe în raport cu înmulțirea.

M= $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

1°) M ⊂ $\mathbb{C}^*$
Dacă $x \in M$, atunci M = $\{xx_1, xx_2, xx_3, xx_4\} \Rightarrow$ ……………………………….……………..2p
$\Rightarrow x_1x_2x_3x_4 = xx_1xx_2xx_3xx_4 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow \cdots$……………………………..…………………..1p
$\Rightarrow M = U_4$, unde $U_4 = \left\{cos\frac{k\pi}{2} + isin\frac{k\pi}{2} | k \in \{0,1,2,3\}\right\}$ este parte stabilă a mulțimii numerelor complexe în raport cu înmulțirea ……………………………………………………..……...1p
2°) $0 \in M$. Fie A = M−$\{0\} = \{a_1, a_2, a_3\} \Rightarrow$ A ⊂ $\mathbb{C}^*$……..………………………..………..……..1p
Analog se demonstrează că A = U_3, $U_3 = \left\{cos\frac{2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3} | k \in \{0,1,2\}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow M = \{0\} \cup U_3$ care este parte stabilă a mulțimii numerelor complexe în raport cu înmulțirea
1°) ,2°) $\Rightarrow$ $M = U_4$ sau $M = \{0\} \cup U_3$ ……………………………………………….……………..2p

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, dacă\ x < 0 \\ m, dacă\ x = 0 \\ xlnx, dacă\ x > 0. \end{cases}}$$

Aflați m pentru care funcția f admite primitive.

Supliment Gazeta Matematică

$e^{-\frac{1}{x^2}}, xlnx$ sunt funcții elementare $\Rightarrow$ f este continua pe $\mathbb{R}^*$……...…………………………………..1p

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

……………………………………………………………………………………………1p

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xlnx = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

....2p
1°) Dacă $m = 0$ f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.……………………………………………………1p
2°) Dacă $m \neq 0$, atunici 0 este punct de discontinuitate de spețа I$\Rightarrow$ f nu are proprietatea lui Darboux$\Rightarrow$ f nu admite primitive ..……………………………………………………….2p