

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
Etapă locală – 24 februarie 2024  
Clasa a X -a

## Barem de corectare și notare

## SUBIECTUL I

Să se rezolve ecuația  $|x - 3|^{10x^2 - 1} = |x - 3|^{3x}$ .

(GM 6,7,8)

Rezolvare;

Cazul 1  $|x - 3| = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$  .....1pCazul 2  $|x - 3| = 1 \Rightarrow x - 3 = \pm 1 \Rightarrow x = 2$  sau  $x = 4$  .....2 pCazul 3  $10x^2 - 1 = 3x \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$  sau  $x = \frac{1}{2}$  .....4 p

## SUBIECTUL II

Să se determine numărul soluțiilor ecuației  $\{\log_3 x\} = \{\log_9(27x)\}$  situate în interiorul intervalului  $[3^7; 3^{2024}]$ .

Rezolvare

Fie  $x$  soluție a ecuației atunci  $x > 0$  și  $\log_3 x - \log_9(27x) = k \in \mathbb{Z}$  .....2pSchimbăm baza și obținem  $\log_3 x - \frac{\log_3(27x)}{2} = k$  .....1pAtunci  $\log_3 x = 2k + 3 \Rightarrow x = 3^{2k+3}$  .....1p $3^7 \leq 3^{2k+3} \leq 3^{2024} \Rightarrow 7 \leq 2k+3 \leq 2024 \Rightarrow 4 \leq 2k \leq 2021 \Rightarrow 2 \leq k \leq \frac{2021}{2}$  .....2p $k \in \mathbb{Z}$  deci poate lua 1009 valori, așadar ecuația are 1009 soluții în intervalul dat.....1p

## SUBIECTUL III

Fie  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| < \frac{1}{2}$ , să se arate că  $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$ .

Rezolvare

Știm că  $|z| < \frac{1}{2}$  (1) $|(1+i)z^3 + iz| \leq |(1+i)z^3| + |iz| =$  .....2p $= |1+i| \cdot |z^3| + |i| \cdot |z| = \sqrt{2}|z|^3 + |z|$  (2) .....2p

Din (1) și (2) obținem:

 $|(1+i)z^3 + iz| < \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{8} < \frac{2+4}{8} = \frac{3}{4}$  .....3p

**SUBIECTUL IV**

Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1-2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

Rezolvare

Injectivitate:  $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 1 - 2x_1 \neq 1 - 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 + 1 \neq 1 - 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ .....3p

Surjectivitate fie  $y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $y = f(x)$

Dacă  $x \in \mathbb{Q}$  ecuația este  $x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1, x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \in \mathbb{Q}$  deci ecuația are soluție unică.....1p

Dacă  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ecuația este  $1 - 2x = y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  deci ecuația are soluție unică.....1p

Funcția este injectivă și surjectivă deci este inversabilă.....1p

$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{x+1}{2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .....1p