OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 24 februarie 2024
Clasa a 9-a

SUBIECTUL I

a) Să se arate că $x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2$, $\forall\, x, y \in (0,+\infty)$

b) Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in (0,+\infty)$ astfel încât $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=a+b+c$

atunci $\frac{a^2+ab}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^2+bc}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^2+ca}{c^3+abc+a^3} \leq 2$

SUBIECTUL II

Se consideră patrulaterul convex ABCD și punctele H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv ABD. Arătați că punctele A, B, C și D sunt conciclice dacă și numai dacă $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CD}$.

SUBIECTUL III

Fie punctele M, N, P pe laturile AB, BC, respectiv CA ale triunghiului ABC astfel încât $AM=BN=CP$. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP. Dacă $AB\cdot\overrightarrow{AT}+BC\cdot\overrightarrow{BT}+CA\cdot\overrightarrow{CT}=\vec{0}$, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

SGM nr. 11-2023

SUBIECTUL IV

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un șir de numere naturale nenule și distincte.

a) Demonstrați că $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinați numerele naturale nenule și distincte x_1, x_2, x_3, x_4 care verifică egalitatea:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=3\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4).$$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Durata probei scrise este de 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte